Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кранцберг, Расходящиеся ряды Фурье интегрируемых функций по ортонормированным системам, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 717–724

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:26:48

УДК 517

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПО ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

А. С. Кранцберг

Существуют две ортонормированные системы такие, что для любой функции $f \in L[0, 1]$, $f \neq 0$, ее ряд Фурье хотя бы по одной из этих систем расходится на множестве положительной меры.

Библиография: 7 названий.

В теории ортогональных рядов одним из основных вопросов является вопрос о сходимости или расходимости рядов Фурье функций из того или иного класса.

Постановка следующей задачи “о разделении” двух подмножеств A и B из $L^2[0, 1]$ принадлежит А. М. Олевскому [1, с. 117]. Существует ли ортонормированная система (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, по которой ряд Фурье каждой функции из A сходится почти всюду, а ряд Фурье любой функции из B расходится на множестве положительной меры (или почти всюду)? Вместо $L^2[0, 1]$ можно взять $L[0, 1]$. Можно рассматривать “слабое” разделение, когда расходится ряд Фурье хотя бы одной функции из B . В частном случае A может содержать только нулевую функцию: $A = \{0\}$.

Известная теорема Банаха о том, что для любого множества B , представимого в виде объединения счетного числа компактов из L^2 , существует ОНС, по которой ряд Фурье каждой функции $f \in B$, $f \neq 0$, расходится почти всюду [2], означает, что множества $\{0\}$ и $B \setminus \{0\}$ разделяются.

Приведем в терминах “разделения” некоторые известные результаты.

1. Для любого $p > 1$ существует полная ортонормированная система (ПОНС), слабо разделяющая $\bigcup_{r>p} L^r$ и L^p [1, с. 107].
2. Существует ПОНС, слабо разделяющая класс C и класс ограниченных функций, имеющих разрывы первого рода [3].
3. Существует ПОНС, разделяющая $\{0\}$ и $C \setminus \{0\}$ [4].
4. Существует ПОНС, разделяющая L^2 и $L \setminus L^2$ [5].

В то же время, очевидно, что $\{0\}$ и $L^2 \setminus \{0\}$ разделить нельзя.

Можно рассматривать также разделение классов A и B не одной ОНС, а некоторой их совокупностью, понимая разделение, например, в таком смысле: ряды Фурье каждой функции из A по всем ОНС из данной совокупности сходятся почти всюду, а для любой функции из B ее ряд Фурье хотя бы по одной из ОНС расходится на множестве положительной меры.

В данной заметке рассматривается вопрос о разделении множеств $A = \{0\}$ и $B = L \setminus \{0\}$ совокупностью ОНС.

ТЕОРЕМА. *Существуют две ортонормированные системы $\varphi^1 = \{\varphi_k^1(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\varphi^2 = \{\varphi_k^2(x)\}_{k=1}^\infty$ такие, что для любой функции $f \in L[0, 1]$, $f \neq 0$, ее ряд Фурье хотя бы по одной из систем расходится на множестве положительной меры. Более того, если $E^1(f)$ и $E^2(f)$ – множества точек расходимости рядов Фурье функции f по системам φ^1 и φ^2 соответственно, то*

$$E^1(f) \cup E^2(f) = [0, 1].$$

Для доказательства нам потребуются следующие простые утверждения (леммы 1–4), встречающиеся в той или иной форме в работах по теории ортогональных рядов.

В дальнейшем символы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ означают норму соответственно в $L^2[0, 1]$ и $L[0, 1]$; $\|f\|_C = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ ($f(x)$ – не обязательно непрерывная функция); $|\Delta|$ – длина отрезка Δ ; $\text{supp } f$ – носитель функции f .

ЛЕММА 1. *Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^p$ – набор функций, ограниченных на $[0, 1]$, $\Delta \subset [0, 1]$ – отрезок, m – натуральное число. Существует ортогональная система $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^m$ такая, что $\tau_k \perp \varphi_i$, $k = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, p$; $\text{supp } \tau_k \subset \Delta$ и*

$$\|\tau_k\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\tau_k\|_C^2 \cdot |\Delta|. \quad (1)$$

Это предложение является простым следствием одного результата из [6, с. 263, теорема 4]: для произвольных ортонормированных на $[0, 1]$ наборов функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^p$ и $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^m$ существует функция $\varepsilon(x)$ такая, что $|\varepsilon(x)| = 1$ для $x \in [0, 1]$ и $\varphi_i(x) \perp \varepsilon(x)\psi_k(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Действительно, набор $\{\varphi_i\}_{i=1}^p$ в лемме можно считать ортонормированным. Выберем произвольно ортонормированные на Δ функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$ ($\psi_k(x) = 0$ для $x \notin \Delta$), удовлетворяющие (1). Тогда $\tau_k(x) = \varepsilon(x)\psi_k(x)$ – искомые функции.

ЛЕММА 2. *Для любого набора функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^p$ и любого натурального $N > 2$ существуют ОНС $\{M_k(x)\}_{k=1}^N$ и абсолютная постоянная b такие, что*

- 1) $\|M_k\|_C < \infty$;
- 2) $M_k \perp \varphi_i$, $k = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, p$;
- 3) для каждого набора чисел $\{c_k\}$, $c_k \geq 1/4$, $k = 1, 2, \dots, N$, при любом $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$b\sqrt{N} \ln N < \max_{1 \leq r \leq N} \left| \sum_{k=1}^r c_k M_k(x) \right|. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $N = 5n$, n – натуральное число. Пусть $m_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, – транспонированные на $[0, 1]$ функции Меньшова [7, с. 193]. Для них выполняется неравенство (2), если $x \in [2/5, 3/5]$. Эти функции постоянны на отрезках вида $[(\nu - 1)/T, \nu/T]$, $\nu = 1, 2, \dots, T$, где T – некоторое число, кратное 5. Возьмем функцию Радемахера $r_1(x)$ [1, с. 2]. Будем считать, что функции $m_k(x)$ и $r_1(x)$ продолжены на всю числовую ось с периодом 1, а в точках разрыва они непрерывны справа. Положим

$$q_i(x) = r_1(2^i T x), \quad m_\nu^i(x) = m_\nu\left(x + \frac{i}{5}\right), \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Определим функции

$$\mu_k(x) = q_i(x)t_\nu^i(x), \quad k = \nu + (i - 1)n.$$

Легко убедиться в том, что $\{\mu_k\}_{k=1}^N$ — ОНС на $[0, 1]$ и для нее выполняется (2) при всех $x \in [0, 1]$. Применим к системам $\{\varphi_i\}_{i=1}^p$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^N$ упомянутую выше теорему 4 из [6]. Система функций $M_k = \varepsilon\mu_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, — искомая.

Пусть $W_1, W_2, \dots, W_n$ — некоторые множества функций. Через $L(W_1, W_2, \dots, W_n)$ обозначим линейное пространство, порожденное всеми функциями из этих множеств.

ЛЕММА 3. Пусть даны функция $t(x)$, $\|t\| \leq 1$, набор функций $\varphi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^p$, число $0 < \alpha < 1$, натуральное число N и отрезок $\Delta \subset [0, 1]$. Тогда существует система ограниченных функций $u = \{u_k(x)\}_{k=1}^N$, $\sup u_k \subset \Delta$, $L(u) \perp L(\varphi, t)$ такая, что каждая из систем

$$\left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{N}} t(x) + u_k(x) \right\}_{k=1}^N \quad u \quad \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{N}} t(x) - u_k(x) \right\}_{k=1}^N$$

будет ортонормированной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$t_k(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} t(x), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Систему функций $\{t_k\}$ можно продолжить на отрезок $[1, 2]$ до ортонормированной системы. (Это следует, например, из теоремы Шура [1, с. 56].) Обозначим продолжение этих функций через $\bar{t}_k(x)$, $x \in [1, 2]$. Пусть L_N — какое-нибудь N -мерное пространство ограниченных функций, носители которых принадлежат Δ , и $L_N \perp L(\varphi, t)$. Если ω — изометричное отображение пространства $L(\{\bar{t}_k\})$ в L_N , то искомые функции получим, полагая $u_k = \omega \bar{t}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Пусть N и m — натуральные числа ($m \leq N$), $f(x) \in L$, $\Phi = \{\Phi_k(x)\}_{k=1}^N$ — ортогональная система, $c = \{c_k\}_{k=1}^N$ — последовательность чисел. Обозначим

$$\delta(f, x, \Phi, m, c) = \sup_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{k=1}^i c_k(f, \Phi_k) \Phi_k(x) \right|.$$

При $c = \{1\}_{k=1}^N$ получаем обычную мажоранту частных сумм (для ортонормированной системы). Положим

$$\delta(f, x, \Phi, m) = \inf_{1/4 \leq \|c\|_\infty \leq 1} \delta(f, x, \Phi, m, c), \quad \text{где } \|c\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |c_k|.$$

Если $\varphi = \{a_k \Phi_k\}_{k=1}^N$, $\|a_k\|_\infty \geq 1/2$, то

$$\delta(f, x, \varphi, m, \{1\}) \geq \delta(f, x, \Phi, m). \quad (3)$$

Непосредственно проверяется справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть $\Phi = \{\Phi_k(x)\}_{k=1}^N$ и $\Psi = \{\Psi_k(x)\}_{k=1}^N$ – ортогональные системы. Тогда

$$\delta(f, x, \Psi, m) \geq \delta(f, x, \Phi, m) - \sum_{k=1}^N |(f, \Psi_k)| \cdot |\Psi_k(x) - \Phi_k(x)| - \sum_{k=1}^N |(f, \Psi_k - \Phi_k)| \cdot |\Phi_k(x)|.$$

Положим $\Delta_n^k = [(k-1)/n, k/n]$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\chi_n^k(x)$ – характеристическая функция отрезка Δ_n^k . Система $\{\chi_n^k\}$ полна в $L[0, 1]$. Обозначим через $\{t_i(x)\}_{i=1}^\infty$ систему, содержащую все функции χ_n^k , причем каждую из них бесконечное число раз. Пусть Δ_i – носитель функции t_i , $\overline{\Delta}_i = [0, 1] \setminus \Delta_i$.

Основная идея доказательства теоремы содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 5. Пусть для натурального числа n уже определены последовательность натуральных чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$ и две ортогональные системы ограниченных функций $\Psi_n^1 = \{\Psi_{k,n}^1(x)\}_{k=1}^{k_n}$, $\Psi_n^2 = \{\Psi_{k,n}^2(x)\}_{k=1}^{k_n}$ такие, что

- 1) $\|\Psi_{k,n}^i\|^2 \leq 4 - 1/2^n$, $i = 1, 2$;
- 2) если $f \in L[0, 1]$ удовлетворяет при некотором натуральном s ($1 \leq s \leq n$) условиям

$$\|f\|_1 \leq s, \quad |(f, t_s)| \geq \frac{1}{s}, \quad (4)$$

то для любого $x \in \overline{\Delta}_s$ выполняется неравенство

$$\delta(f, x, \Psi_n^1, k_s) + \delta(f, x, \Psi_n^2, k_s) \geq s - 1 + \frac{1}{2^n}. \quad (5)$$

Тогда существуют две ортогональные системы ограниченных функций $\Psi_{n+1}^1 = \{\Psi_{k,n+1}^1(x)\}_{k=1}^{k_{n+1}}$ и $\Psi_{n+1}^2 = \{\Psi_{k,n+1}^2(x)\}_{k=1}^{k_{n+1}}$ такие, что будут выполняться соотношения

- 1) $\|\Psi_{k,n}^i - \Psi_{k,n+1}^i\|_C \leq 1/2^{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, k_n$, $i = 1, 2$;
- 2) $\|\Psi_{k,n+1}^i\|^2 \leq 4 - 1/2^{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, k_{n+1}$;
- 3) если функция $f \in L$ удовлетворяет при некотором натуральном s ($1 \leq s \leq n+1$) условиям (4), то

$$\delta(f, x, \Psi_{n+1}^1, k_s) + \delta(f, x, \Psi_{n+1}^2, k_s) \geq s - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число ν настолько большим, чтобы $\nu > n+1$ и

$$\frac{6n}{2^\nu} \sum_{k=1}^{k_n} \|\Psi_{k,n}^i\|_C \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Пусть

$$\alpha = 2^{-2\nu-1}. \quad (7)$$

Возьмем натуральное число N так, чтобы

$$N \geq e^{(n+1)^2/(b\alpha)}, \quad (8)$$

где число b из леммы 2, и положим $k_{n+1} = k_n + N$. В силу леммы 2 можно выбрать ортонормированную систему функций $M = \{M_r(x)\}_{r=1}^N$ так, чтобы

$$L(M) \perp L(\Psi_n^1, \Psi_n^2, t_{n+1}) \quad (9)$$

и выполнялось неравенство (2). Лемма 3 позволяет выбрать систему функций $u = \{u_k\}_{k=1}^N$ так, чтобы носители функций принадлежали отрезку Δ_{n+1} ,

$$L(u) \perp L(\Psi_n^1, \Psi_n^2, t_{n+1}, M) \quad (10)$$

и каждая из систем

$$\left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{N}} t_{n+1} + u_k \right\}_{k=1}^N, \quad \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{N}} t_{n+1} - u_k \right\}_{k=1}^N$$

была ортонормированной.

Положим

$$\Phi_r^i(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} t_{n+1}(x) + (-1)^{i-1} (u_r(x) + M_r(x)), \quad i = 1, 2, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Из (9)–(11) следует, что $\{\Phi_r^1\}_{r=1}^N$, $\{\Phi_r^2\}_{r=1}^N$ – ортогональные системы и $\|\Phi_r^i\|^2 = 2$, $r = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2$. В силу леммы 1 можно выбрать ортогональную систему функций $\tau = \{\tau_{k,r}^i(x)\}$, $k = 1, 2, \dots, k_n$, $r = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2$, носители которых принадлежат Δ_{n+1} ,

$$\begin{aligned} \|\tau_{k,r}^i\|_C &= \frac{1}{2^\nu}, & k &= 1, 2, \dots, k_n, \quad r, m = 1, 2, \dots, N, \quad r \neq m, \\ \text{supp } \tau_{k,r}^i &\cap \text{supp } \tau_{k,m}^i = \emptyset, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\|\tau_{k,r}^i\|^2 \geq \frac{|\Delta_{n+1}|}{2^{2\nu+1}N}, \quad (13)$$

$$L(\tau) \perp L(\Psi_n^1, \Psi_n^2, M, u, t_{n+1}). \quad (14)$$

Положим

$$\tau_k^i = \sum_{r=1}^N \tau_{k,r}^i(x). \quad (15)$$

Введем функции

$$w_r = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} (-1)^i \frac{(\Psi_{k,n}^i, t_{n+1})}{\|\tau_{k,r}^i\|^2} \tau_{k,r}^i(x), \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Оценим норму $\|w_r\|$. Из (16), (7), (13) и условия 1) следует

$$\begin{aligned} \|w_r\|^2 &= \frac{\alpha^2}{N} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} \frac{(\Psi_{k,n}^i, t_{n+1})^2}{\|\tau_{k,r}^i\|^2} \leq \frac{1}{2^{4\nu+2}N} \sum_{i=1}^2 \max_{1 \leq j \leq k_n} \frac{1}{\|\tau_{j,r}^i\|^2} \sum_{k=1}^{k_n} (\Psi_{k,n}^i, t_{n+1})^2 \\ &\leq \frac{2N2^{2\nu+1}4\|t_{n+1}\|^2}{2^{4\nu+2}N|\Delta_{n+1}|} = \frac{8}{2^{2\nu+1}} < 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Положим

$$\begin{aligned}\Psi_{k,n+1}^i(x) &= \Psi_{k,n}^i(x) + \tau_k^i(x), & k &= 1, 2, \dots, k_n, & i &= 1, 2, \\ \Psi_{k_n+r,n+1}^i(x) &= \Phi_r^i(x) + (-1)^{i-1}w_r(x), & r &= 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\quad (18)$$

Таким образом, определены две системы функций

$$\Psi_{n+1}^1 = \{\Psi_{k,n+1}^1\}_{k=1}^{k_{n+1}}, \quad \Psi_{n+1}^2 = \{\Psi_{k,n+1}^2\}_{k=1}^{k_{n+1}}.$$

(Условимся в дальнейшем для упрощения записи опускать индекс $n+1$ у функции Ψ .)

Ортогональность каждой из этих систем проверяется непосредственно. Пусть, например, индексы k и j таковы, что $1 \leq k \leq k_n$ и $k_n+1 \leq j \leq k_{n+1}$. Тогда, полагая $r = j - k_n$ и учитывая формулы (18), (14)–(16) и (9)–(11), получим

$$\begin{aligned}(\Psi_k^i, \Psi_j^i) &= (\Psi_{k,n}^i + \tau_k^i, \Phi_r^i + (-1)^{i-1}w_r) = (\Psi_{k,n}^i, \Phi_r^i) + (-1)^{i-1}(\tau_k^i, w_r) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{N}}(\Psi_{k,n}^i, t_{n+1}) + (-1)^{i-1}(\tau_{k,r}^i, w_r) = 0.\end{aligned}$$

Далее имеем из (18) и (12)

$$\|\Psi_k^i - \Psi_{k,n}^i\|_C = \|\tau_k^i\|_C = \frac{1}{2^\nu} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, k_n, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Следовательно, выполнено утверждение 1) леммы 5. Из индуктивного предположения 1) леммы 5, (18) и (12) вытекает справедливость утверждения 2) для $k = 1, 2, \dots, k_n$

$$\|\Psi_k^i\|^2 = \|\Psi_{k,n}^i\|^2 + \|\tau_k^i\|^2 \leq 4 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^\nu} \leq 4 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Справедливость утверждения 2) для $k = k_n+1, \dots, k_{n+1}$ следует из (18) и (17)

$$\|\Psi_k^i\|^2 = \|\Phi_{k,n}^i\|^2 + \|w_k\|^2 \leq 3 \leq 4 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Пусть вначале $s \leq n$. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (4), то, используя лемму 4, соотношения (5), (19), (6), получим для $x \in \Delta_s$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \delta(f, x, \Psi^i, k_s) &\geq \sum_{i=1}^2 \delta(f, x, \Psi_n^i, k_s) - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} |(f, \Psi_k^i)| \cdot |\Psi_k^i(x) - \Psi_{k,n}^i(x)| \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} |(f, \Psi_k^i - \Psi_{k,n}^i)| \cdot |\Psi_{k,n}^i(x)| \\ &\geq s - 1 + \frac{1}{2^n} - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} \|f\|_1 \cdot \|\Psi_k^i\|_C \frac{1}{2^\nu} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} \|f\|_1 \cdot \|\Psi_k^i - \Psi_{k,n}^i\|_C \cdot \|\Psi_{k,n}^i\|_C \\ &\geq s - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{3s}{2^\nu} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{k_n} \|\Psi_{k,n}^i\|_C \geq s - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Итак, утверждение 3) выполнено для $s \leq n$. Пусть теперь $s = n + 1$. Возьмем $x \in \overline{\Delta}_{n+1}$. Из определения Ψ^i , Φ^i , u , w , t_{n+1} следует, что для $k = k_n + 1, \dots, k_{n+1}$

$$\Psi_k^1 + \Psi_k^2 = \frac{2\alpha}{\sqrt{N}} t_{n+1} \quad \text{и} \quad \Psi_k^i(x) = (-1)^{i-1} M_r(x), \quad r = k - k_n.$$

Поэтому, учитывая (2) и выбор числа N (формула (8)), получим для любого набора чисел $\{c_k\}_{k=1}^{k_{n+1}}$, $c_k \geq 1/4$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \max_{1 \leq m \leq k_{n+1}} \left| \sum_{k=1}^m c_k(f, \Psi_k^i) \Psi_k^i(x) \right| &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \max_{k_{n+1} \leq m \leq k_{n+1}} \left| \sum_{k=1}^m c_k(f, \Psi_k^i) \Psi_k^i(x) \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{r=1}^m c_{k_n+r}(f, \Psi_{k_n+r}^i) M_r(x) \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{r=1}^m c_{k_n+r}((f, \Psi_{k_n+r}^1) M_r(x) + (f, \Psi_{k_n+r}^2) M_r(x)) \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{r=1}^m c_{k_n+r}(f, \Psi_{k_n+r}^1 + \Psi_{k_n+r}^2) M_r(x) \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{2\alpha}{\sqrt{N}} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{r=1}^m c_{k_n+r}(f, t_{n+1}) M_r(x) \right| \\ &\geq \frac{\alpha}{\sqrt{N}(n+1)} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{r=1}^m c_{k_n+r} M_r(x) \right| \geq \frac{\alpha}{n+1} b \ln N \geq n+1, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство утверждения 3) леммы 5. Для $n = 1$ возьмем $k_1 = 1$, $\Psi_n^1 = \Psi_n^2 = 1$. Условия леммы 5 выполняются.

Таким образом, для любого натурального n в силу леммы 5 можно определить две ортогональные системы $\{\Psi_{k,n}^i(x)\}_{k=1}^{k_n}$, $i = 1, 2$.

Положим для натурального числа k и числа $x \in [0, 1]$

$$\Phi_k^i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{k,n}^i(x), \quad i = 1, 2.$$

Поточечный предел существует в силу утверждения 1) леммы 5. Обозначим $\Phi^i = \{\Phi_k^i\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2$. Из соотношения (5) следует, что для функции $f(x)$, удовлетворяющей при некотором натуральном s условиям (4), выполняется неравенство

$$\delta(f, x, \Phi^1, k_s) + \delta(f, x, \Phi^2, k_s) \geq s - 1, \quad x \in \overline{\Delta}_s. \quad (20)$$

Теперь определим две системы функций $\varphi^1 = \{\varphi_k^1(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\varphi^2 = \{\varphi_k^2(x)\}_{k=1}^\infty$, полагая

$$\varphi_k^i(x) = \frac{\Phi_k^i(x)}{\|\Phi_k^i\|}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что эти системы являются искомыми. Пусть $f(x) \in L[0, 1]$, $\|f\|_1 \neq 0$, а x — произвольная точка отрезка $[0, 1]$. Из определения отрезков Δ_n , функций t_n и полноты

системы $\{t_n\}$ в L следует, что для бесконечного числа номеров s $x \notin \Delta_s$ и выполняются условия (4). Из (3) и (20) следует неравенство

$$\delta(f, x, \varphi^1, k_s, \{1\}) + \delta(f, x, \varphi^2, k_s, \{1\}) \geq s - 1,$$

что и завершает доказательство теоремы.

В связи с доказанной теоремой укажем на следующие вопросы, ответы на которые автору неизвестны.

Могут ли системы функций состоять из алгебраических многочленов?

Можно ли расхожимость на множестве положительной меры заменить на расхожимость почти всюду?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Olevskii A. M. Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer, 1975.
- [2] Banach S. Sur la divergence des séries orthogonales // Studia Math. 1940. V. 9. P. 139–154.
- [3] Веселов В. М. О системах сходимости и расхожимости в пространствах C и B // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 6. С. 911–922.
- [4] Кранцберг А. С. О расходящихся рядах Фурье по ортогональным системам // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 4. С. 540–553.
- [5] Кашин Б. С. О некоторых свойствах ортогональных систем сходимости // Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 68–87.
- [6] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [7] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

Московский институт коммунального хозяйства и строительства

Поступило

25.11.96

Исправленный вариант

03.09.97