Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лещева, О. В. Суворова, О φ -структуре на проективной группе $L_2(q)$, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 725–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:14:37

УДК 512.54

О φ -СТРУКТУРЕ НА ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЕ $L_2(q)$

С. В. Лещёва, О. В. Суворова

В данной работе доказывается, что проективная группа $L_2(q)$ не может быть группой автоморфизмов конечной леводистрибутивной квазигруппы. Это частный случай гипотезы, по которой группа автоморфизмов леводистрибутивной квазигруппы разрешима.

Библиография: 5 названий.

В данной работе доказывается несуществование нетривиального автоморфизма φ группы $\Pi = L_2(q)$ со свойством $x\varphi(x^{-1}) \in sTs^{-1} \implies x \in T$. Здесь T – подгруппа φ -неподвижных элементов. Это шаг в реализации программы доказательства гипотезы о разрешимости групп трансляций конечных леводистрибутивных квазигрупп, сводящейся к проверке отсутствия автоморфизма φ с указанным свойством у конечной простой группы. Группы, для которых φ существует, называются далее φ -группами. Сведения о них можно найти в [1]. Отметим следующие из свойств: φ -структура наследуется при переходе к φ -инвариантным подгруппам и факторгруппам по φ -инвариантным нормальным делителям; на смежных классах Π/T можно ввести структуру леводистрибутивной квазигруппы, если положить $x \circ y = x\varphi(x^{-1})y$. Каждая квазигруппа может быть получена таким образом (хотя и с неоднозначно определенной группой Π). Однако, каждое представление можно редуцировать к минимальному, уже однозначно определяемому квазигруппой. Для этого от Π переходим к главной подгруппе $\Pi_1 = \langle x\varphi(x^{-1}) \mid x \in \Pi \rangle$, порожденной каноническими элементами, а затем профакторизуем по наибольшему нормальному делителю, содержащемуся в T . Группа Π для минимального представления есть коммутант группы левых трансляций квазигруппы G .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G = \Pi/T$ – минимальное представление квазигруппы и p – простой делитель $(T : T')$, где T' – коммутант группы T . Тогда p делит $|G| = (\Pi : T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм перенесения $V_{\Pi \rightarrow T}$, выбирая в качестве представителей классов канонические элементы. Так как для $t \in T$ $tx\varphi(x^{-1})t^{-1} = tx\varphi(tx)^{-1}$ каноничен, то $V_{\Pi \rightarrow T}(t) = t^{(\Pi:T)}$. Группа Π не допускает эпиморфизма в φ -тривиальную группу, отличную от единичной, поскольку $\Pi = \Pi_1$. Значит, $t^{(\Pi:T)} = 1$ в T/T' , что доказывает теорему.

Группы $L_2(q)$ будут интерпретироваться как группы (2×2) -матриц с определителем 1 над конечными полями, профакторизованные по центру. Последний тривиален в

четной характеристике и состоит из двух элементов (единичной и противоположной ей матриц) в характеристике, отличной от 2.

Элементы $L_2(q)$, исключая единичный, можно разбить на три типа: приводимые, неприводимые и унитарные, в зависимости от того, имеет ли характеристический многочлен соответствующей матрицы различные корни в $\mathbb{F}_q$, в квадратичном расширении $\mathbb{F}_q$ или эти корни совпадают и равны ± 1 .

Сведения о централизаторах элементов $L_2(q)$ можно найти, например, в [2], [3]. В частности, централизатор H^+ неинволютивного неприводимого элемента во всех случаях циклический. То же верно и для централизатора H^- неинволютивного приводимого элемента. Нормализаторы $N(H^+)$ диэдральны вдвое большего порядка.

Нам понадобится следующая информация о подгруппах в $L_2(q)$ [2, с. 9] порядка, взаимно простого с q . Эти подгруппы либо абелевы, либо диэдральны, либо изоморфны одной из групп A_4, Σ_4, A_5 . Известны автоморфизмы в $L_2(q)$ [4], [5]. Для $x \in L_2(q)$ $\varphi(x) = s\underline{x}s^{-1}$. Здесь $\underline{x}$ получается из x , если подвергнуть элементы x автоморфизму поля $\mathbb{F}_q$, s – произвольная (2×2) -матрица.

Предложение. $L_2(q)$ не имеет регулярных автоморфизмов.

Доказательство. В противном случае можно выделить φ -инвариантную силовскую подгруппу, содержащуюся в H^+ или H^- . Ее централизатор и нормализатор φ -инвариантны. Но $N(H^\pm)/H^\pm = \mathbb{Z}_2$ φ -тривиальна. Противоречие.

Таким образом, в дальнейшем можно считать подгруппу φ -неподвижных элементов $T \subset \Pi = L_2(q)$ нетривиальной.

Теорема 2. Простая группа $L_2(q)$ не может быть нетривиальной φ -группой.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $T \neq 1$ – подгруппа φ -неподвижных элементов в $\Pi = L_2(q)$. Покажем сначала, что T взаимно проста с q . Пусть это не так. Тогда T содержит унитарную матрицу, которую без ограничения общности можно считать совпадающей с $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В автоморфизме $\varphi(x) = s\underline{x}s^{-1}$ матрица s с точностью до скалярного множителя должна быть унитарной и, как нетрудно проверить,

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подгруппа u унитарных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оказывается φ -инвариантной. Включим u в ее нормализатор – борелевскую подгруппу, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Разумеется, последняя также φ -инвариантна.

Проверим нарушение φ -свойства. Равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$$

(выполнено при $c = \underline{a}$), равносильно равенству $a - \underline{a} = \lambda^2 c$. Пусть k – подполе в $\mathbb{F}_q$ неподвижных элементов относительно автоморфизма $a \rightarrow \underline{a}$. Рассмотрим три случая: $[\mathbb{F}_q : k] \geq 3$, $[\mathbb{F}_q : k] = 2$, $[\mathbb{F}_q : k] = 1$.

Если характеристика основного поля четна, то в первых двух случаях равенству $a - \underline{a} = \lambda^2 c$ всегда можно удовлетворить при $c \neq 0$, поскольку все элементы из $\mathbb{F}_q^*$ – квадраты. Таким образом, в этих случаях φ -свойство нарушено. В нечетной характеристике к тому же выводу при $[\mathbb{F}_q : k] \geq 3$ можно прийти следующим образом. Уравнение $a - \underline{a} = \lambda^2 c$ можно разрешить относительно a , если след $\text{Tr}_{\mathbb{F}_q/k} \lambda^2 = 0$, как это следует из теоремы 90 Гильберта. Приводя квадратичную форму $\text{Tr} \lambda^2$ к сумме квадратов $\text{Tr} \lambda^2 = a_1 \lambda_1^2 + \dots + a_n \lambda_n^2$ (здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – координаты λ в подходящем базисе над k), убеждаемся, что при $n \geq 3$ эта форма представляет 0. Действительно, уже форма $a_1 \lambda_1^2 + a_2 \lambda_2^2$ представляет любой ненулевой элемент. Это очевидно, если форма разложима. В неразложимом случае она пропорциональна норме элемента из квадратичного расширения k , а последняя представляет любой элемент из k^* .

При $[\mathbb{F}_q : k] = 2$ форма $\text{Tr} \lambda^2$ может и не представлять 0. Но в этом случае φ^2 есть сопряжение: $\varphi^2(x) = x u x^{-1}$. Унипотентность следует из $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$, и централизатор U содержит T . Поскольку $\varphi^2 \neq 1$, то $U \neq 1$ и T есть φ -группа. Тогда $N(U)/U$ является группой с регулярным автоморфизмом, ибо $T \subset U$. На этом факторе φ переводит диагональную матрицу $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ в $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ или в $\pm \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Взяв $\lambda = \underline{\lambda}$ или $\lambda \underline{\lambda} = 1$ ($\lambda \neq 1$) приходим к противоречию с регулярностью φ на $N(U)/U$, если в k более трех элементов. Но это действительно так, когда $\text{Tr} \lambda^2$ не представляет 0. В самом деле, пусть $\mathbb{F}_q = k(i)$, где $i^2 = a$ – неквадрат в k . Ясно, что $\text{Tr} \lambda^2 = 2(x^2 + ay^2)$ для $\lambda = x + yi$ не представляет 0, если a – неквадрат, т.е. если -1 – квадрат в k , а это влечет $|k| > 3$.

Обратимся к случаю $[\mathbb{F}_q : k] = 1$. Здесь U φ -тривиальна. Из теоремы 1 и взаимной простоты $|U|$ и $(N(U) : U)$ следует тривиальность и $N(U)$. Для $\varphi(x) = x s x^{-1}$ это дает скалярность s и тождественность φ .

Итак, T взаимно проста с q , что в характеристике 2 завершает доказательство теоремы, так как при p , делящем $|T|$, факторгруппа $N(C(x))/C(x)$ есть $\mathbb{Z}_2$ для p -элемента $x \in T$ и 2 делит $|T|$. Поэтому пусть $\text{Char} \mathbb{F}_q \neq 2$. Ввиду четности $|T|$ в T есть инволюция. Ее централизатор Γ есть диэдральная группа, содержащая силовскую 2-подгруппу из $L_2(q)$. Подгруппа $O_{2'}(\Gamma)$, очевидно, φ -инвариантна и нормальна в Γ . Поэтому $\Gamma/O_{2'}(\Gamma)$ есть φ -группа. Она диэдральна и не является группой с регулярным автоморфизмом, так как образ инволюции в ней φ -тривиален. Далее воспользуемся леммой.

ЛЕММА 1. *Диэдральная 2-группа допускает нетривиальную φ -структуру, лишь когда эта группа имеет порядок 4. В этом случае она является группой с регулярным автоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутант такой группы $N = \langle \tau, \sigma \mid \tau^4 = \sigma^2 = 1, \sigma \tau \sigma^{-1} = \tau^{-1} \rangle$ есть циклическая 2-группа $N' = \langle \tau^2 \rangle$. Она не может давать нетривиальную квазигруппу, так как в минимальном представлении уже минимальной 2-квазигруппы соответствующая группа нециклическа [1]. Если N/N' φ -тривиальна, то этим же свойством обладает и N . Если же N/N' не φ -тривиальна, то (так как $N/N' = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) это группа с регулярным автоморфизмом. Группа N_1 есть тривиальное накрытие $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, так как N не содержит кватернионной подгруппы. Итак, N имеет четвертую группу нормальным делителем. Можно считать, что $\sigma \in N$. Тогда $1, \sigma, \tau^2 \sigma = \sigma \tau \tau^{-1}, \tau^2 = \tau^2 \sigma \sigma$ исчерпывают N_1 и $\tau^4 = 1$. Значит, $|N| = 4$ или $|N| = 8$. Последнее отпадает, так как $\varphi(\tau)$ может быть равным только $\tau^{\pm 1}$ и τ^2 неподвижен, что невозможно.

Из этой леммы немедленно следует φ -тривиальность $\Gamma/O_{2'}(\Gamma)$, т.е. T содержит си-

ловскую 2-подгруппу из $\Pi = L_2(q)$. Из теоремы 1 следует, что для T остаются две возможности: $T = A_4$ или $T = A_5$.

ЛЕММА 2. Пусть p – простое нечетное, делящее $|T|$. Тогда $p \nmid (\Pi : T)$ для $\Pi = L_2(q)$, q нечетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Централизатор N p -элемента из T циклический и содержит силовскую p -подгруппу из Π . Конечно, N φ -инвариантна и абелевость влечет $N = N_1 \oplus (T \cap N)$. Из циклическости следует взаимная простота порядков N_1 и $T \cap N$, т.е. T содержит силовскую p -подгруппу из Π .

Лемма 2 и теорема 1 сразу же исключают случай $T = A_4$. В последнем варианте $T = A_5$ рассмотрим централизаторы $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5$ 2-, 3- и 5-элементов из T соответственно. Положим $N_i = O_{2'}(\Gamma_i)$. Циклическость и φ -инвариантность вновь позволяют записать $N_i = (N_i)_1 \oplus (T \cap N_i)$ со слагаемыми взаимно простых порядков, причем $(N_i)_1$ – группа с регулярным автоморфизмом. Все элементы в ней каноничны и согласно φ -свойству не могут быть сопряжены с 3- или 5-элементами из T . Поскольку в T 2-, 3- и 5-элементы не централизуют друг друга, получаем, что $|N_3|$ не делится на 5, $|N_5|$ – на 3, а $|N_2|$ – ни на 3, ни на 5. Непосредственный подсчет централизаторов показывает, что это невозможно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галкин В. М. Леводистрибутивные квазигруппы конечного порядка // Квазигруппы и лупы. Кишинев, 1973.
- [2] Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
- [3] Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973.
- [4] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
- [5] Стейнберг Р. Лекции по группам Шевалле. М.: Мир, 1975.

Нижегородский государственный технический университет

Поступило
26.07.96