Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Терсенов, Задача Дирихле для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 592–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 05:46:40

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ал. С. Терсенов

В статье исследуется задача Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений. Получены новые априорные оценки решения и градиента решения. Оценки эти получаются без каких-либо предположений о гладкости коэффициентов и правой части уравнения. Кроме того, допускается произвольный рост правой части по градиенту решения. На основе полученных оценок доказываются теоремы существования.

Библиография: 14 названий.

Введение. Данная статья посвящена исследованию задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений. Как известно (см. [1], [2]), доказательство разрешимости краевых задач и, в частности, задачи Дирихле сводится к получению априорной оценки решения $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, в норме пространства $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ (мы следуем обозначениям, принятым в [2]). Эта процедура разделяется на четыре этапа: оценка $\max |u(\mathbf{x})|$, оценка $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$ на границе области, глобальная (т.е. во всей области) оценка $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$ и, наконец, оценка $|\nabla u(\mathbf{x})|$ в норме пространства C^α , $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$. Ключевой здесь является оценка $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$, поскольку после ее получения разрешимость краевых задач следует без дополнительных ограничений на характер нелинейности уравнения. Как известно, при получении оценки для $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$ в общем случае применяется следующий классический подход (см. [1]–[3]): граничная оценка $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$ получается при помощи построения барьеров для $u(\mathbf{x})$ вблизи границы, а глобальная – при помощи дифференцирования и применения принципа максимума к функции $v(\mathbf{x}) = |\nabla u(\mathbf{x})|^2$. Этот метод восходит к Бернштейну (см. [4]). Очевидно, при таком подходе необходимо требовать дифференцируемость коэффициентов и правой части уравнения, а также накладывать ряд обременительных ограничений на поведение первых производных коэффициентов и правой части (см. [1], [2]). При получении как граничной, так и глобальной оценки градиента, вообще говоря, необходимо требовать выполнения условия Бернштейна [4] (см. [1]–[3]). Это условие заключается в том, что скорость роста правой части уравнения по $|\nabla u(\mathbf{x})|$ при $|\nabla u(\mathbf{x})| \rightarrow +\infty$ не должна превышать скорости роста главной части по $|\nabla u(\mathbf{x})|$ более, чем на $|\nabla u(\mathbf{x})|^2$. Известно (см., например, [5]), что для уравнения $\Delta u = f(\mathbf{x}, u, \nabla u)$ в случае непрерывной функции $f(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ выполнения условия Бернштейна достаточно для того, чтобы из оценки $\max |u|$ вытекала оценка $\max |\nabla u|$. Похожаев в [6] показал, что если вместо непрерывности функции f потребовать выполнение более слабого условия: $f \in L_q(\Omega)$, $q > n$, при $u \in W_q^2(\Omega)$, то условие Бернштейна уже не будет достаточным для получения оценки $\max |\nabla u|$ из $\max |u|$. В [6] сформулировано условие на рост функции $f(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ по

$\mathbf{p}$, при которых оценка $\max |u|$ влечет оценку $\max |\nabla u|$. Это условие зависит от q и переходит в условие Бернштейна при $q = +\infty$. Что касается оценки $\max |u(\mathbf{x})|$, то существует ряд достаточных условий, гарантирующих такую оценку, см. [1], [2], [7]. Отметим, что в [7] рассматриваются параболические уравнения, однако результаты, полученные там, легко переносятся и на эллиптический случай.

Настоящая статья посвящена получению граничной и глобальной априорной оценки для $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$ в случае, когда условие Бернштейна не выполнено. При получении глобальной оценки используется метод введения дополнительной переменной, предложенный Кружковым (см. [8]) для исследования квазилинейных параболических уравнений с одной пространственной переменной (об этом методе см. также [9]–[14]). На основе метода Кружкова удается получить глобальную априорную оценку для $|\nabla u(\mathbf{x})|$ без дифференцирования для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений со многими независимыми переменными. Специфика этого класса уравнений заключается, в частности, в том, что коэффициенты не зависят явно от самого решения и от части пространственных переменных. Предполагаем, что область, в которой решается задача Дирихле, является выпуклой. Основное отличие от аналогичной оценки в [12] заключается в том, что допускается произвольный рост правой части по $|\nabla u(\mathbf{x})|$ независимо от роста главной части уравнения. Приведем в качестве примера следующую задачу:

$$\Delta u = f_1(\mathbf{x}) + \phi_1(u)\phi_2(\nabla u) \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1)$$

Здесь $f_1(\mathbf{x})$ – ограниченная в $\bar{\Omega}$ функция, $\phi_1(u)$ – неубывающая функция, $u\phi_1(u) \geq 0$ и $\phi_2(\nabla u) \geq 0$. Например, $\phi_1 = u^3$ либо $\phi_1 = u|u|^{1/3}$, а $\phi_2 = e^{|\nabla u|}\sqrt{|\nabla u|} + 1$ либо $\phi_2 = |u_{x_1}|^{k_1} + \dots + |u_{x_n}|^{k_n} + k_0$, где k_i – неотрицательные вещественные числа.

Как было показано Ладыженской и Уральцевой (см. [1]), после получения оценок для $\max |u(\mathbf{x})|$ и $\max |\nabla u(\mathbf{x})|$ оценка $|\nabla u(\mathbf{x})|$ в норме пространства C^α получается при определенных условиях на гладкость коэффициентов и правой части уравнения.

В п. 1 для простоты изложения все рассуждения ведутся для уравнения $\Delta u = f(\mathbf{x}, u, \nabla u)$. Сформулированы теоремы существования решения, которые вытекают из полученных оценок. В частности, существование классического решения задачи (1) гарантируется, если $f_1 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\phi_1 \in C^\alpha(\mathbb{R})$, $\phi_2 \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Уравнениям с двумя независимыми переменными посвящен п. 2. Здесь рассмотрено общее двумерное уравнение и, кроме того, приводятся многомерное квазилинейное уравнение, на которое распространяются результаты второго пункта.

1. Многомерный случай. Для простоты все рассуждения будем вести при $n = 3$, случай $n > 3$ может быть исследован аналогично. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – строго выпуклая область и $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1)$. Не ограничивая общности, считаем, что, во-первых, точка $(0, 0, 0) \in \Omega$, во-вторых, части $\partial\Omega$, лежащие в полупространствах $x_1 \leq 0$, $x_1 \geq 0$, можно представить в виде

$$x_1 = F_1(x_2, x_3), \quad x_1 = G_1(x_2, x_3),$$

а части $\partial\Omega$, лежащие в полупространствах $x_2 \leq 0$, $x_2 \geq 0$ и $x_3 \leq 0$, $x_3 \geq 0$, можно представить в виде

$$x_2 = F_2(x_1, x_3), \quad x_2 = G_2(x_1, x_3) \quad \text{и} \quad x_3 = F_3(x_1, x_2), \quad x_3 = G_3(x_1, x_2)$$

соответственно, где F_i, G_i – дважды непрерывно дифференцируемые функции и, в-третьих, x_i меняется в пределах от $-l_i$ до l_i , $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\Delta u = f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

где f представима в виде

$$f(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = f_1(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) + f_2(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}). \quad (1.3)$$

Предположим, что при $\mathbf{x} \in \Omega$, $|u| \leq M$ и конечных $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ функция f_1 удовлетворяет структурному ограничению

$$|f_1(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})| < \psi(|p_1|), \quad (1.4)$$

где $\psi(\rho) > 0$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} > \mu_1 \equiv \max\{M, \text{osc}(u)\}, \quad (1.5)$$

а функция f_2 удовлетворяет соотношению

$$uf_2(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \geq 0. \quad (1.6)$$

Введем функции $h_1(x_1)$ и $h_2(x_1) \equiv h_1(-x_1)$:

$$h_1'' + \psi(|h_1'|) = 0, \quad h_1(-l_1) = 0, \quad h_1(-l_1 + \tau_0) = \mu_1,$$

постоянная τ_0 будет выбрана ниже. Представим h_1 в параметрическом виде:

$$h_1 = h_1(q) = \int_q^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}, \quad x_1 = x_1(q) = \int_q^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)} - l_1,$$

где параметр q лежит в интервале $[q_0, q_1]$, причем $q_1 > q_0 > 0$ и

$$h_1(q_0) = \int_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} = \mu_1.$$

Это возможно в силу условия (1.5). Положим

$$\tau_0 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}. \quad (1.7)$$

Очевидно, $h_1' > 0$, $h_2' < 0$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $u(\mathbf{x})$ – классическое решение задачи (1.1), (1.2) такое, что $|\nabla u| < +\infty$ в $\overline{\Omega}$. Предположим, что условия (1.3), (1.4), (1.6) выполнены. Тогда

$$|u(\mathbf{x})| \leq h_k(\zeta_k) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}_k, \quad k = 1, 2,$$

где $\zeta_1 = x_1 - F_1 - l_1$, $\zeta_2 = x_1 - G_1 + l_1$ и

$$D_1 = \{\mathbf{x}: F_1(x_2, x_3) < x_1 < F_1(x_2, x_3) + \tau_0, (x_2, x_3) \in \Omega_1\} \cap \Omega,$$

$$D_2 = \{\mathbf{x}: G_1(x_2, x_3) - \tau_0 < x_1 < G_1(x_2, x_3), (x_2, x_3) \in \Omega_1\} \cap \Omega,$$

Ω_1 – проекция области Ω на плоскость (x_2, x_3) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tau_0 \geq 2l_1$, то $\partial D_1 = \partial D_2 = \partial \Omega$ и в силу граничного условия $u|_{\partial \Omega} = 0 \leq h_k, k = 1, 2$.

Если $\tau_0 < 2l_1$, то ∂D_1 состоит из двух частей: Γ_1 и Γ_2 , где $\Gamma_1 \subset \partial \Omega$, а Γ_2 — та часть поверхности $x_1 = F_1(x_2, x_3) + \tau_0$, которая лежит в Ω . На Γ_1 имеем $u = 0 \leq h_1$, а на Γ_2 получаем $h_1(-l_1 + \tau_0) = \mu_1 \geq u$. Аналогично, при $\tau_0 \leq 2l_1$ поверхность $\partial D_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где $\Gamma_3 \subset \partial \Omega$, а Γ_4 — та часть поверхности $x_1 = G_1(x_2, x_3) - \tau_0$, которая лежит в Ω . На Γ_3 имеем $u = 0 \leq h_2$, а на Γ_4 получаем $h_2(l_1 - \tau_0) = \mu_1 \geq u$. Следовательно, $|u(\mathbf{x})| \leq h_k(\zeta_k)$ на ∂D_k .

В D_k имеем

$$\Delta h_k(\zeta_k) = h_k'' + h_{kx_2x_2} + h_{kx_3x_3} \leq -\psi(|h_k'|), \quad k = 1, 2,$$

поскольку для $i = 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned} h_{1x_ix_i}(\zeta_1) &= -(F_{1x_i}^2 \psi(|h_1'(x_1 - F_1 - l_1)|) + F_{1x_ix_i} h_1'(x_1 - F_1 - l_1)) \leq 0, \\ h_{2x_ix_i}(\zeta_2) &= -(G_{1x_i}^2 \psi(|h_2'(x_1 - G_1 + l_1)|) + G_{1x_ix_i} h_2'(x_1 - G_1 + l_1)) \leq 0. \end{aligned}$$

В последнем нетрудно убедиться, если вспомнить, что $h_1' \geq 0$, а $h_2' \leq 0$ и, кроме того, в силу выпуклости области, $F_{1x_ix_i} \geq 0$, $G_{1x_ix_i} \leq 0$. Следовательно, для $v \equiv u - h_k$ получаем

$$\Delta v \geq f(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \psi(|h_k'|). \quad (1.8)$$

Если функция v достигает своего наибольшего значения в точке $N \in \overline{D}_k \setminus \partial D_k$, тогда в этой точке $v > 0$, $v_{x_i} = 0$, т.е. $u > h_k \geq 0$, $\nabla u = \nabla h_k$, следовательно, из (1.4), (1.6) и (1.8) получаем

$$\Delta v|_N \geq f_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \psi(|u_{x_1}|) + f_2(\mathbf{x}, u, \nabla u)|_N > 0.$$

Это противоречит предположению о достижении функцией v максимума во внутренних точках области D_k . Следовательно,

$$u(\mathbf{x}) \leq h_k(\zeta_k) \quad \text{в } \overline{D}_k, \quad k = 1, 2.$$

Теперь получим оценку снизу. Для $w \equiv u + h_k$ имеем

$$\Delta w \leq f(\mathbf{x}, u, \nabla u) - \psi(|h_k'|). \quad (1.9)$$

Если функция w принимает наименьшее значение в точке $N_1 \in \overline{D}_k \setminus \partial D_k$, то в этой точке $u < 0$, $\nabla u = -\nabla h_k$ и, следовательно, в силу (1.4) и (1.6) из (1.9) получаем

$$\Delta w|_{N_1} \leq f_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) - \psi(|u_{x_1}|) + f_2(\mathbf{x}, u, \nabla u)|_{N_1} < 0.$$

Это противоречит предположению, что w принимает минимум во внутренних точках области D_k . Следовательно, $u(\mathbf{x}) \geq -h_k(\zeta_k)$ в $\overline{D}_k$, $k = 1, 2$. Лемма доказана.

Приступим теперь к получению глобальной оценки $|u_{x_1}|$. Предположим, что f_2 дополнительно удовлетворяет соотношениям

$$f_2(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3) - f_2(\zeta, x_2, x_3, v, p_1, p_2, p_3) \geq 0, \quad (1.10_1)$$

$$f_2(\zeta, x_2, x_3, u, -p_1, p_2, p_3) - f_2(x_1, x_2, x_3, v, -p_1, p_2, p_3) \geq 0 \quad (1.10_2)$$

при $x_1 > \zeta$, $u > v$, $p_1 > 0$ и любых p_2, p_3 .

ЛЕММА 1.2. Пусть выполнены предположения леммы 1.1 и условия (1.10). Тогда для $u(\mathbf{x})$ имеет место оценка

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u_{x_1}| \leq C_1,$$

где постоянная C_1 зависит лишь от ψ и M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение (1.1) в двух различных точках области Ω : $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и (ζ, x_2, x_3) . Имеем

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = f^{(x_1)} \quad \text{для } u = u(\mathbf{x}), \quad (1.11)$$

$$u_{\zeta \zeta} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = f^{(\zeta)} \quad \text{для } u = u(\zeta, x_2, x_3), \quad (1.12)$$

где $f^{(z)} \equiv f(z, x_2, x_3, u(z, x_2, x_3), \nabla u(z, x_2, x_3))$. Вычитая уравнение (1.12) из уравнения (1.11), для функции $v(\mathbf{x}, \zeta) \equiv u(x_1, x_2, x_3) - u(\zeta, x_2, x_3)$ получаем

$$\Delta_{\mathbf{x}, \zeta} v \equiv v_{x_1 x_1} + v_{\zeta \zeta} + v_{x_2 x_2} + v_{x_3 x_3} = f^{(x_1)} - f^{(\zeta)}.$$

Пусть функция $h(\tau) \equiv h(x_1 - \zeta)$ является решением задачи

$$h'' + \psi(|h'|) = 0, \quad h(0) = 0, \quad h(\tau_0) = \mu_1,$$

величина τ_0 была определена при построении барьера h_1 (см. (1.7)). Очевидно,

$$\Delta_{\mathbf{x}, \zeta} h(x_1 - \zeta) = 2h'' = -2\psi(|h'|).$$

Для функции $w \equiv v - h(x_1 - \zeta)$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{x}, \zeta} w &= f^{(x_1)} - f^{(\zeta)} - 2\psi(|h'|) \\ &= f_1(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) - \psi(|h'|) \\ &\quad - (f_1(\zeta, x_2, x_3, u(\zeta, x_2, x_3), \nabla u(\zeta, x_2, x_3)) - \psi(|h'|)) \\ &\quad + f_2(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) - f_2(\zeta, x_2, x_3, u(\zeta, x_2, x_3), \nabla u(\zeta, x_2, x_3)). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Рассмотрим область Q :

$$Q = \{(\mathbf{x}, \zeta) : x_1 \in (F_1, G_1), \zeta \in (F_1, G_1), 0 < x_1 - \zeta < \tau_0, (x_2, x_3) \in \Omega_1\}$$

(напомним, что Ω_1 есть проекция Ω на плоскость (x_2, x_3)). Если $\tau_0 \geq 2l_1$, то полагаем

$$Q = \{(\mathbf{x}, \zeta) : x_1 \in (F_1, G_1), \zeta \in (F_1, G_1), 0 < x_1 - \zeta, (x_2, x_3) \in \Omega_1\}.$$

Предположим, что функция w принимает наибольшее значение во внутренней точке N области Q ($N \in \overline{Q} \setminus \partial Q$). Очевидно, в N функция $w > 0$, $\nabla w = 0$ и, следовательно, $u \geq 0$, $u_{x_1}(\mathbf{x}) = h'(x_1 - \zeta)$, $u_{\zeta}(\zeta, x_2, x_3) = h'(x_1 - \zeta)$, $u_{x_i}(\mathbf{x}) = u_{x_i}(\zeta, x_2, x_3)$, $i = 2, 3$, т.е.

$$\nabla u(\mathbf{x})|_N = \nabla u(\zeta, x_2, x_3)|_N.$$

Таким образом, из (1.4), (1.10₁) и (1.13) получаем $\Delta_{\mathbf{x}, \zeta} w|_N > 0$, что противоречит предположению о том, что w принимает максимум во внутренней точке области Q .

Покажем, что $w \leq 0$ на ∂Q .

1) Для $x_1 = \zeta$ имеем $v = h = 0$.

2) При $x_1 - \zeta = \tau_0$ получаем $h(\tau_0) = \mu_1 \geq u(\mathbf{x}) - u(\zeta, x_2, x_3)$. Эта часть границы присутствует лишь в случае $\tau_0 < 2l_1$.

3) При $\zeta = F_1(x_2, x_3)$, $x_1 \in [F_1, F_1 + \tau_0] \cap [F_1, G_1]$, $(x_2, x_3) \in \Omega_1$ выполняется $v - h = u(\mathbf{x}) - h(x_1 - F_1)$. Покажем теперь, что $u(\mathbf{x}) \leq h(x_1 - F_1)$. Для этого достаточно получить равенство $h(x_1 - F_1) = h_1(x_1 - F_1 - l_1)$, а затем применить лемму 1.1. Требуемое равенство непосредственно следует из того, что

$$\begin{aligned} h_1''(\zeta_1) + \psi(|h_1'(\zeta_1)|) &= 0, & h_1(-l_1) &= 0, & h_1(-l_1 + \tau_0) &= \mu_1, & \zeta_1 &= x_1 - F_1 - l_1, \\ h''(\eta) + \psi(|h'(\eta)|) &= 0, & h(0) &= 0, & h(\tau_0) &= \mu_1, & \eta &= x_1 - F_1. \end{aligned}$$

4) При $x_1 = G_1(x_2, x_3)$, $\zeta \in [G_1 - \tau_0, G_1] \cap [F_1, G_1]$, $(x_2, x_3) \in \Omega_0$ получаем

$$v - h = -u(\zeta, x_2, x_3) - h(G_1 - \zeta).$$

Покажем, что $u(\zeta, y) \geq -h(G_1(y) - \zeta)$. Достаточно убедиться в том, что $h(G_1 - \zeta) = h_2(\zeta - G_1 + l_1)$, а затем вновь применить лемму 1.1. Последнее равенство непосредственно вытекает из того, что

$$\begin{aligned} h_2''(\zeta_2) + \psi(|h_2'(\zeta_2)|) &= 0, & h_2(l_1 - \tau_0) &= \mu_1, & h_2(l_1) &= 0, & \zeta_2 &= \zeta - G_1 + l_1, \\ h''(\tilde{\eta}) + \psi(|h'(\tilde{\eta})|) &= 0, & h(0) &= 0, & h(\tau_0) &= \mu_1, & \tilde{\eta} &= G_1 - \zeta. \end{aligned}$$

Таким образом, $w \leq 0$ на ∂Q . Благодаря тому, что w не может принимать максимум в $\overline{Q} \setminus \partial Q$, получаем, что $u(\mathbf{x}) - u(\zeta, x_2, x_3) \leq h(x_1 - \zeta)$ в $\overline{Q}$.

Аналогично, взяв функцию $\tilde{v} \equiv u(\zeta, x_2, x_3) - u(\mathbf{x})$ вместо v , получаем $v \geq -h(x_1 - \zeta)$ в $\overline{Q}$ (здесь мы используем условие (1.10₂)).

В силу симметрии переменных x_1 и ζ точно так же рассматриваем случай $\zeta > x_1$. В результате имеем, что для $x_1 \in [F_1, G_1]$, $\zeta \in [F_1, G_1]$, $(x_2, x_3) \in \Omega_1$, $0 < |x_1 - \zeta| < \tau_0$ выполняется неравенство

$$\frac{|u(\mathbf{x}) - u(\zeta, x_2, x_3)|}{|x_1 - \zeta|} \leq \frac{h(|x_1 - \zeta|) - h(0)}{|x_1 - \zeta|},$$

которое, в свою очередь, влечет оценку $|u_{x_1}(\mathbf{x})| \leq h'(0) = C_1$. Лемма доказана.

Сформулируем теперь условия, обеспечивающие априорную оценку u_{x_2} .

Предположим, что функция f_1 при $\mathbf{x} \in \Omega$, $|u| \leq M$, $|p_1| \leq C_1$ и конечных p_2 , p_3 удовлетворяет неравенству

$$|f_1(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})| < \psi(|p_2|). \quad (1.14)$$

Введем функции $h_3(x_2)$, $h_4(x_2)$ следующим образом: $h_4(x_2) = h_3(-x_2)$,

$$h_3'' + \psi(|h_3'|) = 0, \quad h_3(-l_2) = 0, \quad h_3(-l_2 + \tau_0) = \mu_1.$$

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 1.1.

ЛЕММА 1.3. Пусть выполнены условия лемм 1.1, 1.2 и условие (1.14). Тогда

$$|u(\mathbf{x})| \leq h_k(\zeta_k) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}_k, \quad k = 3, 4,$$

где $\zeta_3 = x_2 - F_2 - l_2$, $\zeta_4 = x_2 - G_2 + l_2$,

$$D_3 = \{\mathbf{x}: F_2 < x_2 < F_2 + \tau_0, (x_1, x_3) \in \Omega_2\} \cap \Omega,$$

$$D_4 = \{\mathbf{x}: G_2 - \tau_0 < x_2 < G_2, (x_1, x_3) \in \Omega_2\} \cap \Omega,$$

а Ω_2 – проекция Ω на плоскость (x_1, x_3) .

Предположим дополнительно, что

$$f_2(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3) - f_2(x_1, \zeta, x_3, v, p_1, p_2, p_3) \geq 0, \quad (1.15_1)$$

$$f_2(x_1, \zeta, x_3, u, p_1, -p_2, p_3) - f_2(x_1, x_2, x_3, v, p_1, -p_2, p_3) \geq 0, \quad (1.15_2)$$

при $x_2 > \zeta$, $u > v$, $p_2 > 0$ и любых p_1, p_3 .

ЛЕММА 1.4. Пусть выполнены условия (1.15) и условия лемм 1.1–1.3. Тогда для $u(\mathbf{x})$ выполняется оценка

$$\sup_{\Omega} |u_{x_2}| \leq C_2,$$

где постоянная C_2 зависит лишь от ψ и M .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.2.

Перейдем к оценке u_{x_3} . Предположим, что функция f_1 при $\mathbf{x} \in \Omega$, $|u| \leq M$, $|p_1| \leq C_1$, $|p_2| \leq C_2$ и конечных p_3 удовлетворяет условию

$$|f_1(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})| < \psi(|p_3|). \quad (1.16)$$

Введем функции $h_5(x_3)$, $h_6(x_3)$ следующим образом: $h_6(x_3) = h_5(-x_3)$

$$h_5'' + \psi(|h_5'|) = 0, \quad h_5(-l_3) = 0, \quad h_5(-l_3 + \tau_0) = \mu_1.$$

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 1.1.

ЛЕММА 1.5. Пусть выполнены условия лемм 1.1–1.4 и условие (1.16). Тогда

$$|u(\mathbf{x})| \leq h_k(\zeta_k) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}_k, \quad k = 5, 6,$$

где $\zeta_5 = x_3 - F_3 - l_3$, $\zeta_6 = x_3 - G_3 + l_3$,

$$D_5 = \{\mathbf{x}: F_3 < x_3 < F_3 + \tau_0, (x_1, x_2) \in \Omega_3\} \cap \Omega,$$

$$D_6 = \{\mathbf{x}: G_3 - \tau_0 < x_3 < G_3, (x_1, x_2) \in \Omega_3\} \cap \Omega,$$

а Ω_3 – проекция Ω на плоскость (x_1, x_2) .

Для получения глобальной оценки величины u_{x_3} предположим, что

$$f_2(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3) - f_2(x_1, x_2, \zeta, v, p_1, p_2, p_3) \geq 0, \quad (1.17_1)$$

$$f_2(x_1, x_2, \zeta, u, p_1, p_2, -p_3) - f_2(x_1, x_2, x_3, v, p_1, p_2, -p_3) \geq 0 \quad (1.17_2)$$

при $x_3 > \zeta$, $u > v$, $p_3 > 0$ и любых p_1, p_2 .

ЛЕММА 1.6. Пусть выполнены условия (1.17) и условия лемм 1.1–1.5. Тогда для $u(\mathbf{x})$ выполняется

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u_{x_3}| \leq C_3,$$

где постоянная C_3 зависит лишь от ψ и M .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В леммах 1.2, 1.4 и 1.6 получены оценки $|u_{x_i}|$, зависящие лишь от $M = \max |u|$ и ψ , в предположении, что ψ удовлетворяет условию (1.5). Нетрудно показать, что если условие (1.5) заменить следующим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\psi(\rho)} > 2l_i, \quad (1.18)$$

то можно получить оценки $|u_{x_i}|$, зависящие лишь от ψ и l_i . Для этого необходимо внести некоторые изменения в построение барьеров $h_i(x_i)$ и $h(\tau)$. А именно h_i и h должны быть решениями задач

$$\begin{aligned} h_i'' + \psi(|h_i'|) &= 0, & h_i(-l_i) &= 0, & h_i(l_i) &= H, & i &= 1, 3, 5, \\ h'' + \psi(|h'|) &= 0, & h(0) &= 0, & h(2l_i) &= H \end{aligned} \quad (1.19)$$

соответственно. Представим решение задачи (1.19) в параметрическом виде:

$$h(q) = \int_q^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}, \quad \tau(q) = \int_q^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Параметр $q \in [q_0, q_1]$, а q_0, q_1 выбраны так, что $0 \leq q_0 < q_1 < +\infty$ и $\tau(q_0) = 2l_1$, что возможно в силу (1.18). Оценка

$$|u(\mathbf{x})| \leq h_k(\zeta_k), \quad k = 1, \dots, 6,$$

получается аналогично лемме 1.1; отметим, что в данном случае $\tau_0 \equiv \tau(q_0) = 2l_i$ и $D_i = \Omega, i = 1, \dots, 6$. Глобальная оценка получается аналогично лемме 1.2.

Сформулируем теорему существования и единственности.

ТЕОРЕМА 1.1. Предположим, что $f \in C^\alpha(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ и выполнены условия (1.3), (1.4), (1.6), (1.10), (1.14)–(1.17). Предположим также, что выполнено условие, обеспечивающее априорную оценку $|u| \leq M$. Тогда в любой строго выпуклой области Ω такой, что $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, задача (1.1), (1.2) имеет по крайней мере одно решение $u(\mathbf{x}) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Если функция f возрастает по переменной u , то такое решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование такого решения следует из полученных выше априорных оценок и теоремы 13.8 из [2]. В [2, теорема 10.2] единственность классического решения доказывается в предположении независимости функции a_{ij} от u , дифференцируемости a_{ij} и f по $\mathbf{r}$ и убывания функции f по переменной u . От условия дифференцируемости по $\mathbf{r}$ можно легко избавиться, действуя так же, как в доказательстве теоремы 2.1 из [13].

Приведем два примера. Сначала остановимся на задаче (1), сформулированной во введении. Оценка $\max |u|$ следует, например, из [7]. Нетрудно видеть, что условия (1.4),

(1.6), (1.10), (1.14)–(1.17) выполнены. Таким образом, если $f_1(\mathbf{x}) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $f_2 \equiv \phi_1(u)\phi_2(\nabla u) \in C^\alpha(\mathbb{R}^4)$, то теорема 1.1 гарантирует существование решения задачи (1), принадлежащее пространству $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим теперь следующее уравнение:

$$\Delta u = f_1(\mathbf{x}, u, u_{x_1}) + f_2(\mathbf{x}, u, \nabla u), \quad (1.20)$$

где $|f_1(\mathbf{x}, u, p_1)| \leq \tilde{K}(1 + p_1^2)$ при $\mathbf{x} \in \Omega$, $|u| \leq M$ и любом p_1 . В качестве f_2 можно взять такую же функцию, как и в предыдущем примере. Для классического решения задачи (1.20), (1.2) такого, что $|\nabla u| < +\infty$, верны оценки лемм 1.1–1.6. Условие (1.4) выполняется с $\psi(p_1) = K_1(1 + p_1^2)$, где $K_1 > \tilde{K}$. Из леммы 1.2 следует оценка $|u_{x_1}| \leq C_1$. Условия (1.14), (1.16) выполнены с $\psi \equiv K_2 > \max\{\tilde{K}, F\}$, где $F = \max|f_1(\mathbf{x}, u, p_1)|$, максимум функции $|f_1(\mathbf{x}, u, p_1)|$ берется по множеству $\bar{\Omega} \times [-M, M] \times [-C_1, C_1]$. Из лемм 1.4 и 1.6 следуют оценки $|u_{x_2}| \leq C_2$, $|u_{x_3}| \leq C_3$.

Если в уравнении (1.20) функции $f_1 \in C^\alpha(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и $f_2 \in C^\alpha(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, то согласно теореме 1.1 существует решение задачи (1.20), (1.2), принадлежащее $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

2. Двумерный случай. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$a(x, y, u, \nabla u)u_{xx} + 2b(x, y, u, \nabla u)u_{xy} + c(x, y, u, \nabla u)u_{yy} = f(x, y, u, \nabla u) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.2)$$

где $\nabla u = (u_x, u_y)$. Функции a, b, c, f определены на множестве $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ и принимают конечные значения при $(x, y) \in \Omega$ и конечных $u, \nabla u$. Предположим, что

$$a \geq a_0 > 0, \quad c \geq c_0 > 0, \quad b^2 - ac < 0 \quad \text{в } \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

где a_0 и c_0 – некоторые постоянные. Будем считать, что f представима в виде (1.3), где

$$|f_1(x, y, u, \mathbf{p})| < a(x, y, u, \mathbf{p})\psi(|p_1|) \quad (2.4)$$

при $(x, y) \in \Omega$, $|u| \leq M$ и конечных $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Функция ψ определена в п. 1 (см. (1.5)).

ЛЕММА 2.1. Пусть $u(x, y)$ – классическое решение задачи (2.1), (2.2) такое, что $|\nabla u| < +\infty$ в $\bar{\Omega}$ и выполнены условия (2.3), (2.4), (1.6). Предположим, что

$$b(x, y, u, \nabla h_k(\zeta_k))h_{kx_i x_j}(\zeta_k) \leq 0, \quad k = 1, 2, \quad b(x, y, u, \mathbf{p}) = b(x, y, u, -\mathbf{p}). \quad (2.5)$$

Тогда

$$|u(x, y)| \leq h_k(\zeta_k) \quad \forall (x, y) \in \bar{D}_k, \quad k = 1, 2,$$

где

$$D_1 = \{(x, y): F_1(y) < x < F_1(y) + \tau_0, -l_2 < y < l_2\} \cap \Omega, \\ D_2 = \{(x, y): G_2(y) - \tau_0 < x < G_1(y), -l_2 < y < l_2\} \cap \Omega.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.1. Функции h_k, ζ_k определены в п. 2.

Получим теперь глобальную оценку $|u_x|$. Предположим, что

$$f_3(x, y, u, p_1, p_2) - f_3(\zeta, y, v, p_1, p_2) \geq 0, \quad (2.6_1)$$

$$f_3(\zeta, y, u, -p_1, p_2) - f_3(x, y, v, -p_1, p_2) \geq 0 \quad (2.6_2)$$

при $x \geq \zeta, u \geq v, p_1 \geq 0$ и любом $p_2, f_3 = f_2/c$.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1, условие (2.2) и

$$2b^2 - ac < 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1. \quad (2.7)$$

Тогда для $u(x, y)$ имеем

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u_x| \leq C_4,$$

где постоянная C_4 зависит лишь от ψ и M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем (2.1) следующим образом:

$$\frac{a(x)}{c(x)} u_{xx} + 2 \frac{b(x)}{c(x)} u_{xy} + u_{yy} = \frac{f(x)}{c(x)},$$

где $g^{(z)} \equiv g(z, y, u(z, y), \nabla u(z, y))$. Рассмотрим это уравнение в точке $(x, \zeta) \in \Omega, \zeta \neq x$:

$$\frac{a(\zeta)}{c(\zeta)} u_{\zeta\zeta} + 2 \frac{b(\zeta)}{c(\zeta)} u_{\zeta y} + u_{yy} = \frac{f(\zeta)}{c(\zeta)}.$$

Вычитая это уравнение из уравнения для $u(x, y)$, для функции $v(x, y, \zeta) \equiv u(x, y) - u(\zeta, y)$ получаем

$$L^* v \equiv \frac{a(x)}{c(x)} v_{xx} + 2 \frac{b(x)}{c(x)} v_{xy} + \frac{a(\zeta)}{c(\zeta)} v_{\zeta\zeta} + 2 \frac{b(\zeta)}{c(\zeta)} v_{\zeta y} + v_{yy} = \frac{f(x)}{c(x)} - \frac{f(\zeta)}{c(\zeta)}.$$

Условие (2.7) обеспечивает эллиптичность оператора L^* . Действительно,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{a(x)}{c(x)} & \frac{b(x)}{c(x)} & 0 \\ \frac{b(x)}{c(x)} & 1 & \frac{b(\zeta)}{c(\zeta)} \\ 0 & \frac{b(\zeta)}{c(\zeta)} & \frac{a(\zeta)}{c(\zeta)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{a(x)}{c(x)} \left[\frac{a(\zeta)}{c(\zeta)} - 2 \left(\frac{b(\zeta)}{c(\zeta)} \right)^2 \right] + \frac{a(\zeta)}{c(\zeta)} \left[\frac{a(x)}{c(x)} - 2 \left(\frac{b(x)}{c(x)} \right)^2 \right] \right) > 0.$$

Аналогично лемме 1.2 завершаем доказательство.

Предположим, что при $(x, y) \in \Omega, |u| \leq M, |p_1| \leq C_4$ и конечном p_2 выполняется

$$|f_1(x, y, u, p_1, p_2)| < a(x, y, u, p_1, p_2) \psi(|p_2|). \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $u(x, y)$ – классическое решение задачи (2.1), (2.2) такое, что $|\nabla u| < +\infty$ в $\overline{\Omega}$. Предположим, что условия (2.3)–(2.8) выполнены. Тогда

$$|u(x, y)| \leq h_k(\zeta_k) \quad \forall (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = 3, 4,$$

где

$$D_3 = \{(x, y) : F_2(x) < y < F_2(x) + \tau_0, -l_1 < x < l_1\} \cap \Omega, \\ D_4 = \{(x, y) : G_2 - \tau_0 < y < G_2, -l_1 < x < l_1\} \cap \Omega.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.1.

Сформулируем условия, гарантирующие глобальную оценку $|u_y|$. Предположим, что

$$f_4(x, y, u, p_1, p_2) - f_4(x, \zeta, v, p_1, p_2) \geq 0, \quad (2.9_1)$$

$$f_4(x, \zeta, u, p_1, -p_2) - f_4(x, y, v, p_1, -p_2) \geq 0 \quad (2.9_2)$$

при $y \geq \zeta, u \geq v, p_2 \geq 0$ и любом $p_1, f_4 = f_2/a$.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.3 и условие (2.9). Тогда для $u(x, y)$ имеет место оценка

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u_y| \leq C_5,$$

где постоянная C_5 зависит лишь от ψ и M .

Доказательство леммы 2.4 аналогично доказательству леммы 2.1.

Сформулируем теорему существования.

ТЕОРЕМА 2.1. Предположим, что $a, b, c, f \in C^\alpha(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ и выполнены условия (2.3)–(2.9). Предположим также, что выполнено условие, гарантирующее оценку $|u| \leq M$. Тогда в любой строго выпуклой области Ω задача (2.1), (2.2) имеет по крайней мере одно решение $u(x, y) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Если функция f возрастает по переменной u , а функции a, b, c не зависят от u , то такое решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полученных оценок и условия (2.3) уравнение (2.1) можно рассматривать как линейное строго эллиптическое уравнение

$$\tilde{a}(x, y)u_{xx} + 2\tilde{b}(x, y)u_{xy} + \tilde{c}(x, y)u_{yy} = \tilde{f}(x, y)$$

с ограниченными коэффициентами $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ и правой частью $\tilde{f}$. Из теоремы 11.4 [2] следует, что решение задачи Дирихле для этого уравнения (при гладких краевых условиях и гладкой границе) удовлетворяет неравенству

$$|u|_{C^{1+\delta}(\bar{\Omega})} \leq C \left(\sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} \left(\frac{|\tilde{f}|}{\lambda} \right) \right), \quad \delta \in (0, 1),$$

где λ – минимальное собственное значение матрицы старших коэффициентов. Постоянная C зависит лишь от верхних граней модулей коэффициентов и правой части. Из этой оценки и теоремы 13.8 [2] следует существование требуемого решения.

В заключение приведем уравнение, на которое могут быть распространены результаты п. 1. Рассмотрим задачу Дирихле

$$a_{ij}(x_i, x_j, \nabla u) u_{x_i x_j} = f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad (2.10)$$

здесь $a_{ii} = a_{ii}(x_i, \nabla u)$. Предполагаем, что для $\mathbf{x} \in D_k$, $k = 1, 2$, $|u| \leq M$ и произвольных $\mathbf{p}$ выполняется

$$\sum_{i,j=1, i \neq j}^3 a_{ij}(x_i, x_j, \nabla h_k(\zeta_k)) h_{k x_i x_j}(\zeta_k) \leq 0, \\ a_{ij}(x_i, x_j, \mathbf{p}) = a_{ij}(x_i, x_j, -\mathbf{p}) \quad \text{для } i \neq j,$$

это многомерный аналог условия (2.5). Кроме того, необходимо требовать выполнение многомерного аналога условия (2.7). Это условие, сформулированное в [12], очень громоздко, и мы не будем приводить его здесь; отметим лишь, что оно выполнено если $a_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$. Полагаем, что $a_{ij} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, $f \in C^\alpha(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Трудности, возникающие за счет появления коэффициентов $a_{ij}(x_i, x_j, \nabla u)$, могут быть преодолены точно так же, как и в [12].

Отметим, что специфика двумерного случая, как видно из теоремы 2.1, позволяет рассматривать уравнения с коэффициентами, зависящими от всех переменных. Кроме того, требование дифференцируемости старших коэффициентов можно заменить на условие их непрерывности по Гёльдеру.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [2] Гилбарг Д., Трудингер Н. С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [3] Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985.
- [4] Бернштейн С. Н. Об уравнениях вариационного исчисления. Собр. сочинений. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
- [5] Amman H., Crandall M. G. On some existence theorems for semi-linear elliptic equations // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. № 5. P. 779–790.
- [6] Похожаев С. И. Об уравнении вида $\Delta u = f(x, u, \nabla u)$ // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). № 1(10). С. 324–338.
- [7] Tersenov A. I. S. Estimate of the solution of the Dirichlet problem for parabolic equations and applications // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 273. № 1. P. 206–216.
- [8] Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 1979. № 5. С. 217–271.
- [9] Камынин В. Л. Априорные оценки и глобальная разрешимость квазилинейных параболических уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1981. № 1. С. 33–38.
- [10] Камынин В. Л. Априорные оценки решений квазилинейных параболических уравнений на плоскости и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 590–598.
- [11] Хуснутдинова Н. В. Об условиях ограниченности градиента решения вырождающихся параболических уравнений // Динамика сплошной среды. 1985. Т. 71. С. 120–129.
- [12] Tersenov A. I. S. On quasilinear non-uniformly elliptic equations in some non-convex domains // Comm. Partial Differential Equations. 1998. V. 23. № 11. P. 2165–2186.
- [13] Tersenov A. I. S. On quasilinear non-uniformly parabolic equations in general form // J. Differential Equations. 1998. V. 142. № 1. P. 263–276.
- [14] Tersenov A. I. S., Tersenov A. R. S. The Cauchy problem for a class of quasilinear parabolic equations // Ann. Mat. Pura Appl. 2003. V. 182. № 3. P. 325–336.

Университет о. Крит, Греция
 E-mail: tersenov@math.uoc.gr

Поступило
 28.08.2002