Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Масол, Некоторые применения оценки мощности одной конфигурации, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 729–736

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:31:36

УДК 519.6

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОЦЕНКИ МОЩНОСТИ ОДНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

В. И. Масол

Строятся две конфигурации и мощность одной из них оценивается через мощность другой. Полученная оценка применяется к некоторым комбинаторным задачам.

Библиография: 3 названия.

0. Пусть W – совокупность всех непустых подмножеств конечного множества Ω , мощность которого $|\Omega| = k$, $1 \leq k < \infty$. Рассмотрим две конфигурации (определение понятия “конфигурация” см. в [1, с. 34]) W_Δ и I_s , где

$$\begin{aligned} W_\Delta \subseteq W, \quad W_\Delta &= \{\omega_1, \dots, \omega_\Delta\}, \quad |W_\Delta| = \Delta, \quad \Delta \geq 1, \\ \omega_i &\neq \omega_j \quad \text{для } i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, \Delta\}; \\ I_s \subseteq W, \quad I_s &= \{m_1, \dots, m_s\}, \quad |I_s| = s, \quad s \geq 0, \\ m_i &\neq m_j \quad \text{для } i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, s\}, \end{aligned}$$

удовлетворяющие условию

$$|m_i \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, \Delta}. \quad (1)$$

В п. 1 дана оценка мощности множества I_s при выполнении условий (1) и

$$\Delta \in [2^{r-1}, 2^r - 1], \quad 1 \leq r \leq k. \quad (2)$$

Полученная оценка используется при решении некоторых комбинаторных задач типа перечислительных (п. 2, 3), существования и построения (п. 4) (определения указанных типов задач см., например, в [1, с. 36]).

1. Введем некоторые обозначения. Пусть $L_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}$ – совокупность всех элементов, которые принадлежат $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_z}$ и только, $|L_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}| = l_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}$, где $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta$, $z = \overline{1, \Delta}$. Обозначим через φ общее количество положительных (непустых) элементов множества $\{l_{\alpha_1, \dots, \alpha_z} : 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta, z = \overline{1, \Delta}\}$ ($\{L_{\alpha_1, \dots, \alpha_z} : 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta, z = \overline{1, \Delta}\}$). Число φ назовем *характеристическим числом конфигурации* W_Δ . Далее, компоненты вектора $\vec{x}(v) = (x_1(v), \dots, x_\varphi(v))$, $v \in W$, будем строить по следующему правилу:

$$x_t(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } |v \cap L_{k_t}| \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } |v \cap L_{k_t}| \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases} \quad (3)$$

где $t = \overline{1, \varphi}$, $k_1, \dots, k_\varphi$ – попарно различные элементы множества

$$\{\{\alpha_1, \dots, \alpha_z\} : 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta, z = \overline{1, \Delta}\},$$

каждому из которых соответствует положительное (непустое) $l_{k_1}, \dots, l_{k_\varphi}$ ($L_{k_1}, \dots, L_{k_\varphi}$). Введем, наконец, однородную систему линейных уравнений

$$\sum_{t=1}^{\varphi} a_q^{(t)} x_t = 0, \quad q = \overline{1, \Delta}, \quad (4)$$

над полем $\text{GF}(2)$ с матрицей коэффициентов A , содержащей Δ строк и φ столбцов,

$$A = \|a_q^{(t)}\|_{q=\overline{1, \Delta}, t=\overline{1, \varphi}}, \quad \text{где } a_q^{(t)} = \begin{cases} 1, & \text{если } q \in k_t, \\ 0, & \text{если } q \notin k_t, \end{cases} \quad t = \overline{1, \varphi}, \quad q = \overline{1, \Delta}.$$

Матрицу A назовем *матрицей, построенной на конфигурации* W_Δ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия (1) и (2). Тогда

$$s \leq 2^{k-r} - 1. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s = 0$, то, очевидно, (5) выполняется. Пусть $s > 0$. С помощью правила (3) для произвольного $\tilde{m} \in I_s$ можно построить вектор $\vec{x}(\tilde{m})$, который является решением системы (4). В самом деле, из $\tilde{m} \in I_s$ в силу (1) следует, что $|\tilde{m} \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}$, $j = \overline{1, \Delta}$, но

$$\omega_j = \bigcup_{t=1}^{\varphi} L_{k_t}^{(j)}, \quad \text{где } L_{k_t}^{(j)} = \begin{cases} L_{k_t}, & \text{если } a_j^{(t)} = 1, \\ \emptyset, & \text{если } a_j^{(t)} = 0. \end{cases}$$

Значит,

$$|\tilde{m} \cap \omega_j| = \sum_{t=1}^{\varphi} |\tilde{m} \cap L_{k_t}^{(j)}|, \quad j = \overline{1, \Delta},$$

откуда $a_j^{(1)} x_1(\tilde{m}) \oplus \dots \oplus a_j^{(\varphi)} x_\varphi(\tilde{m}) = 0$, $j = \overline{1, \Delta}$, где символ “ $\oplus$ ” обозначает сложение по модулю 2.

Будем обозначать совокупность всех элементов множества I_s , соответствующих построенному с помощью правила (3) решению $\vec{x}(\tilde{m})$ системы (4), где $\tilde{m} \in I_s$, через $M(\tilde{m})$, т.е. $M(\tilde{m}) \subseteq I_s$, $M(\tilde{m}) = \{v_1, \dots, v_\mu\}$, $v_i \neq v_j$ для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$; $\vec{x}(v_t) = \vec{x}(\tilde{m})$ для $t = \overline{1, \mu}$; $\vec{x}(v) \neq \vec{x}(\tilde{m})$ для $v \in I_s \setminus M(\tilde{m})$. Пусть вектор $\vec{x}(\tilde{m})$ содержит $\varkappa$, $0 \leq \varkappa \leq \varphi$, единичных компонент, расположенных на местах с номерами $i_1, \dots, i_\varkappa$ и $\varphi - \varkappa$ нулевых компонент, расположенных на местах с номерами $j_1, \dots, j_{\varphi-\varkappa}$. Тогда, очевидно, мощность μ множества $M(\tilde{m})$ удовлетворяет неравенству

$$\mu \leq 2^{k-s_1+s_2+s_3} - \chi(\varkappa = 0), \quad (6)$$

где $s_1 = \sum_{t=1}^{\varphi} l_{k_t}$, 2^{k-s_1} – количество всех подмножеств множества $\Omega \setminus \bigcup_{t=1}^{\varphi} L_{k_t}$;

$$s_2 = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\varkappa\}} (l_{k_i} - 1),$$

$2^{l_{k_i}-1}$ – количество всех подмножеств множества L_{k_i} , $i \in \{i_1, \dots, i_{\varkappa}\}$, каждое из которых содержит нечетное число элементов из Ω ;

$$s_3 = \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_{\varphi-\varkappa}\}} (l_{k_j} - 1),$$

$2^{l_{k_j}-1}$ – количество всех подмножеств множества L_{k_j} , $j \in \{j_1, \dots, j_{\varphi-\varkappa}\}$, каждое из которых содержит четное число элементов из Ω ;

$$\chi(\varkappa = 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varkappa = 0, \\ 0, & \text{если } \varkappa \neq 0. \end{cases}$$

Из (6) и определений сумм s_1, s_2, s_3 следует $\mu \leq 2^{k-\varphi} - \chi(\varkappa = 0)$. Итак, каждому $\tilde{m} \in I_s$ соответствует построенное с помощью правила (3) решение системы (4) и число элементов из I_s , соответствующих этому решению, не превосходит $2^{k-\varphi} - \chi(\varkappa = 0)$. Отсюда, очевидно, получаем

$$s \leq 2^{k-\varphi} R - 1, \quad (7)$$

где R – число решений системы (4). В силу (2) ранг f матрицы A коэффициентов системы (4), $\text{rank}(A) = f$, над полем $\text{GF}(2)$ удовлетворяет неравенству $f \geq r$. Поэтому $R = 2^{\varphi-f} \leq 2^{\varphi-r}$. Отсюда с учетом (7) имеем (5). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы 1 следует, что если имеют место (1), (2) и $f > r$, то $s < 2^{k-r} - 1$. Поэтому при выполнении условий (1), (2) и $s = 2^{k-r} - 1$, $1 \leq r \leq k$, справедливо равенство $\text{rank}(A) = r$.

2. Обозначим через $H(\omega)$, $\omega \in W$, конфигурацию, содержащую все такие попарно различные элементы множества W , что для произвольного $v \in H(\omega)$ выполняется соотношение $|v \cap \omega| \equiv 1 \pmod{2}$. Пусть $v \in H(\omega_{i_1})$, где $i_1 \in \{1, \dots, \Delta\}$, и T – число всех конфигураций $H(\omega_{i_1}), \dots, H(\omega_{i_T})$ среди $H(\omega_j)$, $j \in \overline{1, \Delta}$, каждая из которых содержит элемент v такой, что $v \in H(\omega_{i_\nu}), i_\nu \in \{1, \dots, \Delta\}, \nu = \overline{1, T}$.

ТЕОРЕМА 2. Если выполняются условия (1) и

$$\Delta = 2^r - 1, \quad s = 2^{k-r} - 1, \quad 1 \leq r \leq k, \quad (8)$$

то $T = 2^{r-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица A построена на конфигурации W_Δ , вектор $\vec{x}(v)$ построен с помощью правила (3). Отсюда в силу определения конфигурации $H(\omega_{i_1})$ имеем для $v \in H(\omega_{i_1})$

$$a_{i_1}^{(1)} x_1(v) \oplus \dots \oplus a_{i_1}^{(\varphi)} x_\varphi(v) = 1. \quad (9)$$

Условия (1), (8) и замечание 1 позволяют заключить, что $\text{rank}(A) = r$. Путем подходящих замен можно добиться того, чтобы i_1 -я строка матрицы A находилась среди r линейно независимых над $\text{GF}(2)$ строк этой же матрицы A . Пусть указанные r строк имеют номера $z_1, \dots, z_r$, причем первые γ , $1 \leq \gamma \leq r$, среди них таковы, что

$$a_\mu^{(1)} x_1(v) \oplus \dots \oplus a_\mu^{(\varphi)} x_\varphi(v) = d,$$

где $d \in \text{GF}(2)$ и

$$d = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu \in \{z_1, \dots, z_\gamma\}, \\ 0, & \text{если } \mu \in \{z_1, \dots, z_r\} \setminus \{z_1, \dots, z_\gamma\}. \end{cases}$$

(В силу (9) и выбора номеров $z_1, \dots, z_r$ имеем $i_1 \in \{z_1, \dots, z_\gamma\}$, поэтому $\gamma \geq 1$.) Тогда все ненулевые линейные комбинации r линейно независимых над $\text{GF}(2)$ строк матрицы A дадут Δ равенств

$$a_j^{(1)}x_1(v) \oplus \dots \oplus a_j^{(\varphi)}x_\varphi(v) = d, \quad j = \overline{1, \Delta}, \quad (10)$$

в правых частях которых единица встретится 2^{r-1} раз. Действительно, $2^{\gamma-1}$ единиц получается в результате всевозможных линейных комбинаций первых γ строк матрицы A . Линейные комбинации строк матрицы A с номерами $\gamma + 1, \gamma + 2, \dots, r$ дадут $2^{r-\gamma} - 1$ строк матрицы A , которые в сумме с каждой из $2^{\gamma-1}$ уже построенных строк приводят к равенству в системе (10) с единицей в правой части. Значит, в системе (10) общее число равенств с единицей в правой части равно $(2^{r-\gamma} - 1)2^{\gamma-1} + 2^{\gamma-1} = 2^{r-1}$.

Если для произвольного $j \in \{1, \dots, \Delta\}$ в правой части (10) $d = 1$, то в силу построений матрицы A и вектора $\vec{x}(v)$ имеем $|v \cap \omega_j| \equiv 1 \pmod{2}$, отсюда $v \in H(\omega_j)$; а если $d = 0$, то $|v \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}$, т.е. $v \notin H(\omega_j)$. Теорема 2 доказана.

3. Рассмотрим $\Delta + 1$ не совпадающих между собой конфигураций $H(\omega_j)$, $j = \overline{1, \Delta + 1}$, и обозначим через H совокупность всех элементов $h \in H(\omega_{\Delta+1})$, для которых $h \notin H(\omega_j)$, $j = \overline{1, \Delta}$. Прежде чем сформулировать теорему 3 о мощности множества H , докажем лемму 1. Пусть система уравнений

$$\sum_{t=1}^{\psi} a_q^{(t)} x_t = 0, \quad q = \overline{1, \Delta}, \quad \sum_{t=1}^{\psi} a_{\Delta+1}^{(t)} x_t = 1 \quad (11)$$

над полем $\text{GF}(2)$ имеет матрицу коэффициентов $\tilde{A} = \|a_q^{(t)}\|_{q=\overline{1, \Delta}, t=\overline{1, \psi}}$, построенную на $W_{\Delta+1}$; здесь ψ – характеристическое число конфигурации $W_{\Delta+1}$.

ЛЕММА 1. Если выполняются условия (1) и

$$\Delta = 2^r - 1, \quad s = 2^{k-r} - 1, \quad 1 \leq r \leq k - 1, \quad (12)$$

то число R решений системы (11) удовлетворяет равенству

$$R = 2^{\psi-r-1}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\text{rank}(\tilde{A}) = r + 1. \quad (14)$$

Пусть c_t – совокупность всех элементов множества $\omega_{\Delta+1}$, $c_t \subseteq \omega_{\Delta+1}$, таких, что $c_t \subseteq L_{k_t}$, $t = \overline{1, \varphi}$, где φ – характеристическое число конфигурации W_{Δ} , и $c_0 \subseteq \omega_{\Delta+1}$, $c_0 \cap \omega_j = \emptyset$, $j = \overline{1, \Delta}$. Исходя из матрицы A , введенной в п. 1, можно построить с

точностью до перестановки строк и столбцов матрицу $\tilde{A}$, воспользовавшись следующим алгоритмом. Если для некоторого $t \in \{1, \dots, \varphi\}$ $c_t = \emptyset$ ($c_t = L_{k_t}$), то столбец

$$\begin{pmatrix} a_1^{(t)} \\ \vdots \\ a_{\Delta}^{(t)} \end{pmatrix}$$

матрицы A , дополненный элементом $a_{\Delta+1}^{(t)} = 0$ ($a_{\Delta+1}^{(t)} = 1$), является столбцом матрицы $\tilde{A}$. Если для указанного t $c_t \subset L_{k_t}$, $c_t \neq \emptyset$, то столбцы

$$\begin{pmatrix} a_1^{(t)} \\ \vdots \\ a_{\Delta}^{(t)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1^{(t)} \\ \vdots \\ a_{\Delta}^{(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

являются столбцами матрицы $\tilde{A}$. Наконец, если $c_0 \neq \emptyset$, то столбец

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\} \Delta \text{ раз} \right.$$

также является столбцом матрицы $\tilde{A}$. Нетрудно понять, что иных столбцов матрица $\tilde{A}$ иметь не может.

Отсюда следует, что если $\psi > \varphi$ и $c_0 \neq \emptyset$, то матрицу $\tilde{A}$ можно представить в виде

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A^* & \\ 0 & & & \\ 1 & a_{\Delta+1}^{(1)} & \dots & a_{\Delta+1}^{(\psi-1)} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где A^* – матрица, имеющая Δ строк и $\psi - 1$ столбцов, которая либо совпадает с A , либо отличается от A тем, что содержит совпадающие между собой столбцы. В силу (1), (12) и замечания 1 $\text{rank}(A) = r$. Значит, $\text{rank}(A^*) = r$. Отсюда $\text{rank}(\tilde{A}) = r + 1$, т.е. (14) выполняется.

Если $\psi > \varphi$ и $c_0 = \emptyset$, то аналогично (15) получаем

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & \tilde{A}^* & \\ a_{\Delta+1}^{(1)} & \dots & a_{\Delta+1}^{(\psi)} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\tilde{A}^*$ – матрица размера $\Delta \times \psi$, отличающаяся от A лишь тем, что содержит совпадающие между собой столбцы. Пусть среди них будут, в частности, столбцы с номерами ξ и ζ , где $\xi, \zeta \in \{1, \dots, \psi\}$. В таком случае, либо $a_{\Delta+1}^{(\xi)} = 1$ и $a_{\Delta+1}^{(\zeta)} = 0$, либо $a_{\Delta+1}^{(\xi)} = 0$

и $a_{\Delta+1}^{(\zeta)} = 1$. Отсюда, очевидно, имеем $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(\tilde{A}^*) + 1 = \text{rank}(A) + 1 = r + 1$, т.е. (14) выполняется.

Допустим, что $\psi = \varphi$. Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & & A \\ a_{\Delta+1}^{(1)} & \dots & a_{\Delta+1}^{(\psi)} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В силу того, что $\omega_{\Delta+1} \neq \emptyset$, набор $(a_{\Delta+1}^{(1)}, \dots, a_{\Delta+1}^{(\psi)})$ содержит хотя бы одну единицу. Поскольку $(a_{\Delta+1}^{(1)}, \dots, a_{\Delta+1}^{(\psi)}) \neq (0, \dots, 0)$, $\text{rank}(A) = r$ и $\Delta = 2^r - 1$, строка $(a_{\Delta+1}^{(1)} \dots a_{\Delta+1}^{(\psi)})$ в (17) совпадает с одной из строк матрицы A . Тогда $\omega_{\Delta+1}$ совпадает с некоторым множеством ω_j , $j \in \{1, \dots, \Delta\}$, что противоречит выбору $\omega_1, \dots, \omega_{\Delta}, \omega_{\Delta+1}$. Значит, равенство $\psi = \varphi$ не может выполняться. Соотношение (14) установлено.

На основании (14) и известных результатов (см., например, [2, с. 117–119]) для доказательства (13) достаточно установить совместность системы (11). Если $c_0 \neq \emptyset$, то с учетом (15) находим, что вектор $(1, 0, \dots, 0)$ является решением системы (11). Если $c_0 = \emptyset$, то с учетом (16) находим, что ψ -мерный вектор, состоящий из $\psi - 2$ нулей и двух единиц, расположенных на позициях ξ и ζ , является решением системы (11). Значит, система (11) совместна. Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия (1) и (12), то $|H| = 2^{k-r-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$|H| \geq 2^{k-r-1}. \quad (18)$$

В самом деле, используя правило (3), устанавливаем, что, исходя из произвольного решения системы (11), можно получить совокупность, состоящую из $2^{k-s_1+s_2+s_3} = 2^{k-\psi}$ элементов (s_1, s_2 и s_3 введены в доказательстве теоремы 1), принадлежащих конфигурации H ; кроме того, двум различным решениям системы (11) соответствуют две непересекающиеся равномошные совокупности элементов из H . Значит, справедливо неравенство $|H| \geq 2^{k-\psi} R$, которое вместе с (13) дает (18).

Покажем, что

$$|H| \leq 2^{k-r-1}. \quad (19)$$

Если $H = \emptyset$, то (19) заведомо выполняется. Пусть $H \neq \emptyset$ и $h \in H$. В силу определения конфигурации $H(\omega_j)$ имеем $|h \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}$, $j = \overline{1, \Delta}$. Отсюда на основании (1) и (12) заключаем, что $h \in I_s$. Значит, $H \subseteq I_s$. Поэтому для произвольного $h \in H$ можно с помощью правила (3) построить решение $\vec{x}(h)$ системы (11) и аналогично (7) убедиться в том, что число элементов из H , соответствующих решению $\vec{x}(h)$, не превышает $2^{k-\psi}$. Отсюда получаем неравенство $|H| \leq 2^{k-\psi} R$, которое вместе с (13) дает (19).

Соотношения (18) и (19) доказывают теорему 3.

4. Пусть $\Omega = \{1, \dots, k\}$. Рассмотрим матрицу A , построенную на W_Δ , и матрицу B , имеющую Δ строк и k столбцов, определенную равенством

$$B = \|b_q^{(\kappa)}\|_{q=\overline{1,\Delta}, \kappa=\overline{1,k}}, \quad (20)$$

где

$$b_q^{(\kappa)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \kappa \in \omega_q, \\ 0, & \text{если } \kappa \notin \omega_q, \end{cases} \quad \kappa = \overline{1,k}, \quad q = \overline{1,\Delta}.$$

ЛЕММА 2. Ранги матриц A и B над полем $\text{GF}(2)$ совпадают: $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элементу $\omega_j \in W_\Delta$ соответствует по построению строка $(a_j^{(1)} \dots a_j^{(\varphi)})$ матрицы A и строка $(b_j^{(1)} \dots b_j^{(k)})$ матрицы B , $j = \overline{1,\Delta}$. Покажем, что линейно независимым над полем $\text{GF}(2)$ строкам матрицы A соответствуют линейно независимые над $\text{GF}(2)$ строки матрицы B , и наоборот. Очевидно, сказанное имеет место, если $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$. Пусть $\text{rank}(A) = r$, $r \geq 2$. Не нарушая общности, положим, что первые r строк матрицы A являются линейно независимыми над $\text{GF}(2)$. Тогда строки $(b_j^{(1)} \dots b_j^{(k)})$ $j = \overline{1,r}$, матрицы B также являются линейно независимыми над $\text{GF}(2)$. Действительно, допустим, что одна из строк, например $(b_r^{(1)} \dots b_r^{(k)})$, является линейной комбинацией над $\text{GF}(2)$ строк $(b_j^{(1)} \dots b_j^{(k)})$ $j = \overline{1,r-1}$. В таком случае совокупность ω_r состоит из тех и только тех элементов множества Ω , которые принадлежат одному или нескольким множествам $\omega_1, \dots, \omega_{r-1}$. Отсюда следует, что r -я строка матрицы A является линейной комбинацией над $\text{GF}(2)$ строк с номерами $1, \dots, r-1$, что противоречит выбору строк $(a_j^{(1)} \dots a_j^{(\varphi)})$ $j = \overline{1,r}$. Аналогично можно показать, что если $\text{rank}(B) = r$, то $\text{rank}(A) = r$. Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если выполняются условия (1) и

$$\Delta = 2^r - 1, \quad s = 2^{k-r} - 1, \quad 1 \leq r \leq k - 2, \quad (21)$$

$$|\omega_j| \geq 3, \quad j = \overline{1,\Delta}, \quad (22)$$

то существует число $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$ такое, что для некоторых $m_{i_\nu} \in I_s$, $\nu = 1, 2, 3$,

$$|\omega_\alpha \cap m_{i_\nu}| = 2, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad |\omega_\alpha \cap (a \cup b)| = 3, \quad (23)$$

где $a \neq b$, $a, b \in \{m_{i_\nu} : \nu = 1, 2, 3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1), (21) и замечания 1 $\text{rank}(A) = r$, где A – матрица, построенная на W_Δ . Отсюда на основании леммы 2 имеем $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r$, где B – матрица, определенная равенством (20). Поскольку B состоит из $\Delta = 2^r - 1$ ненулевых строк и $\text{rank}(B) = r$, то первые r строк матрицы B можно выбрать так, чтобы они образовывали канонический базис r -мерного подпространства k -мерного пространства над полем $\text{GF}(2)$. Тогда согласно правилу задания канонического базиса (один из вариантов изложения этого правила см., например, в [3, с. 219]) в первых r строках матрицы B существует единичная $(r \times r)$ -матрица. Пусть столбцы с номерами $1 < a_1 < \dots < a_r \leq k$ образуют указанную $(r \times r)$ -матрицу. Применим построенный канонический базис к формированию множеств m_{i_1} , m_{i_2} и m_{i_3} , удовлетворяющих (23). В качестве α выберем $\alpha = 1$. В силу (22) в первой строке матрицы B на позициях с номерами j_1 и j_2

расположены единицы, где j_1 и j_2 — два целых числа, удовлетворяющих соотношениям $1 \leq j_1 < j_2 < a_1$. Далее воспользуемся методом математической индукции. Пусть $\text{rank}(B) = 1$. Тогда в m_{i_1} (соответственно $m_{i_2}; m_{i_3}$) включим лишь следующие элементы: $u_{j_1}^{(1)}$ и $u_{j_2}^{(1)}$ (соответственно $u_{j_1}^{(1)}$ и $u_{a_1}^{(1)}$; $u_{j_2}^{(1)}$ и $u_{a_1}^{(1)}$), где $u_{j_1}^{(1)}$, $u_{j_2}^{(1)}$ и $u_{a_1}^{(1)}$ — элементы множества ω_1 ($u_{j_1}^{(1)}, u_{j_2}^{(1)}, u_{a_1}^{(1)} \in \omega_1$), которые соответствуют по построению единицам первой строки матрицы B , расположенным на позициях с номерами j_1, j_2 и a_1 . Обоснуем индукционный шаг от $\text{rank}(B) = r-1, r \geq 2$, к $\text{rank}(B) = r$. Если $|m_{i_\nu} \cap \omega_r| \equiv 0 \pmod{2}$, то множество m_{i_ν} оставляем без изменений, иначе дополняем его элементом $u_{a_r}^{(r)} \in \omega_r$, который соответствует единице, расположенной в r -й строке матрицы B на позиции с номером $a_r, \nu = 1, 2, 3$. Ясно, что построенное таким образом множество $m_{i_\nu}, \nu = 1, 2, 3$, удовлетворяет соотношениям (23) и

$$|m_{i_\nu} \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}, \quad j \in \{1, \dots, \Delta\}, \quad \nu = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Из (24) следует, что $m_{i_\nu} \in I_s, \nu = 1, 2, 3$, так как в силу теоремы 1 и условия (21) множество I_s содержит все совокупности $m_1, \dots, m_s$, для которых выполняется (1). Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $r = k - 1$ и $s = 1$ условие (22) не выполняется. Действительно, в i -й строке, $i \in \{1, \dots, r\}$, канонического базиса на позициях с номерами $j > a_i$ стоят нули, а позиции с номерами $j < a_i, j \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}, i \in \{2, \dots, r\}$, и $j < a_1$ могут быть заполнены элементами поля $\text{GF}(2)$ произвольным образом. (Здесь сохранены обозначения, введенные при обосновании теоремы 4.) Поэтому если $r = k - 1$ и $s = 1$, то существует значение параметра $j \in \{1, \dots, \Delta\}$ такое, что $|\omega_j| < 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы. М.: Наука, 1985.
- [2] Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
- [3] Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило
01.07.96