Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Моцевитин, О возвращаемости интеграла гладкой условнопериодической функции, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 737–748

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:01:05

УДК 511.9

О ВОЗВРАЩАЕМОСТИ ИНТЕГРАЛА ГЛАДКОЙ УСЛОВНОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Н. Г. Мошевитин

Доказана осцилляция интеграла гладкой многочастотной условнопериодической функции с нулевым средним значением.

Библиография: 5 названий.

1. Формулировка результатов о возвращаемости. Пусть $f: \mathbb{T}^s \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, задаваемая рядом Фурье

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} f_m \exp(2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)),$$

частоты $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{R}$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_s) \in \mathbb{R}^s$. Рассматривается интеграл

$$I(T, \varphi) = I_{f, \omega}(T, \varphi) = \int_0^T f(\omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_s t + \varphi_s) dt.$$

Будем говорить, что $I(T, \varphi)$ *возвращается*, если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T \quad \exists T^* > T : \quad |I(T^*, \varphi)| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_s)$, обладающая нулевым пространственным средним, аналитична в некоторой комплексной окрестности вещественного тора $\mathbb{T}^s$, а набор частот $\omega_1, \dots, \omega_s$ линейно независим над $\mathbb{Z}$. Тогда при каждом φ интеграл $I(T, \varphi)$ *возвращается*.

Очевидным следствием теоремы о возвращаемости является теорема об осцилляции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00378, № 96-15-96072, и фонда ЕФАКОД.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $f(\varphi) \neq 0$. Тогда интеграл $I(T, \varphi)$ осциллирует, т.е. бесконечно много раз меняет знак при $T \rightarrow \infty$.

Несомненно, что в условии теорем 1, 2 достаточно потребовать большой конечной гладкости функции f . Похоже, что теоремы заведомо верны при $f \in C^m(\mathbb{T}^s)$, $m \asymp e^{\gamma s \ln s}$, $\gamma > 0$. Однако, для простоты изложения мы рассматриваем аналитический случай. Точные значения необходимых показателей гладкости в настоящей работе не вычисляются.

Теоремы 1, 2 были высказаны В. В. Козловым в качестве гипотез. При $s = 2$ они были доказаны самим Козловым в [1]. При $s = 3$ теоремы 1, 2 были доказаны автором в [2] (в формулировке теоремы 2 из [2] автор, как легко видеть, допустил неточность, которая исправлена в формулировке настоящей работы). Для нечетной функции f теорема 1 была доказана С. В. Конягиным в [3]. Более того, в последней работе Конягин достаточно точно оценил гладкость нечетной функции f , достаточную для возвращаемости.

Обзор более ранних и более поздних близких результатов имеется соответственно в [4] и [5].

В п. 2–6 настоящей работы будет изложено доказательство теоремы 1. Ясно, что достаточно доказать теорему 1 для интеграла $I(T) = I(T, 0)$. Всюду ниже рассматривается именно этот интеграл.

2. Конструкция. Целочисленному вектору $m = (m^1, \dots, m^s) \in \mathbb{Z}^s$ поставим в соответствие величины $M = \max\{|m^1|, \dots, |m^s|\}$ и $\zeta(m) = m^1\omega_1 + \dots + m^s\omega_s$. В силу аналитичности f можно считать, что для ее коэффициентов Фурье выполнено

$$|f_m| \ll e^{-\delta M}, \quad m \in \mathbb{Z}^s.$$

Возьмем целочисленный вектор m , являющийся наилучшим приближением, т.е. такой, для которого выполнено

$$0 < \zeta(m) = \min_{n \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}: N \leq M} |\zeta(n)|.$$

В дальнейшем $M \rightarrow \infty$. Положим $m_s = m$, $\zeta_s = \zeta(m)$ и определим s векторов $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^s$, $m_j = (m_j^1, \dots, m_j^s)$, рекуррентным образом из условий

$$m_{j-1} \notin \langle m_j, \dots, m_s \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (1)$$

$$0 < \zeta(m_{j-1}) = \min_{n \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\}: n \notin \langle m_j, \dots, m_s \rangle_{\mathbb{R}}, N < M} |\zeta(n)|. \quad (2)$$

Обозначим $\zeta_j = \zeta(m_j)$, $M_j = \max_i |m_j^i|$. Имеем $\zeta_1 > \zeta_2 > \dots > \zeta_s$ и $0 < M_j < M$. Ясно, что в силу (1) для любого j векторы $m_j, \dots, m_s$ будут линейно независимы в $\mathbb{R}^s$. Определим вполне рациональную плоскость $\pi_j = \langle m_j, \dots, m_s \rangle_{\mathbb{R}}$, $\dim \pi_j = s - j + 1$, и решетку $\Lambda_j = \pi_j \cap \mathbb{Z}^s$. Доопределим $\Lambda_{s+1} = \{0\}$. Отметим, что набор $m_j, \dots, m_s$, вообще говоря, не является базисом решетки Λ_j , но

$$\min_{\substack{n \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1} \\ 0 < N < M}} |\zeta(n)| = \zeta_j$$

(последнее является переформулировкой (2)). Более того, можно утверждать, что при любом $\nu < j$ имеет место равенство

$$\min_{\substack{n \in \Lambda_\nu \setminus \Lambda_{\nu+1} \\ 0 < N < M}} |\zeta(n)| = \zeta_j. \quad (3)$$

ЛЕММА 1. Пусть $n = (n^1, \dots, n^s) \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ и $N < M$. Тогда $|\zeta(n)| \gg M^{-s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $n \notin \langle m_2, \dots, m_s \rangle_{\mathbb{R}}$, имеем

$$0 \neq \begin{vmatrix} n^1 & n^2 & \dots & n^s \\ m_2^1 & m_2^2 & \dots & m_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_s^1 & m_s^2 & \dots & m_s^s \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega_1} \begin{vmatrix} \zeta(n) & n^2 & \dots & n^s \\ \zeta_2 & m_2^2 & \dots & m_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_s & m_s^2 & \dots & m_s^s \end{vmatrix}.$$

Кроме того, $|\zeta(n)| \geq \zeta_1 > \zeta_2 > \dots > \zeta_s$. Таким образом, $1 \ll |\zeta(n)| M^{s-1}$.

Лемма доказана.

Всякий вектор $n \in \Lambda_j$ представим в виде

$$n = \lambda_j m_j + \dots + \lambda_s m_s, \quad \lambda_j, \dots, \lambda_s \in \mathbb{Q}. \quad (4)$$

ЛЕММА 2. Для вектора $n \in \Lambda_j$ такого, что $N < M$, рациональные числа $\lambda_j, \dots, \lambda_s$ из (4) удовлетворяют неравенству

$$\max_{\nu=j, \dots, s} |\lambda_\nu| \ll M^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $E = (-M, M)^s \subset \mathbb{R}^s$. Доопределим $\lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = 0$. Полагая

$$\Omega = \begin{pmatrix} m_1^1 & \dots & m_1^s \\ \dots & \dots & \dots \\ m_s^1 & \dots & m_s^s \end{pmatrix}, \quad \det \Omega \neq 0,$$

и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, имеем $\Omega \lambda \in E$ или $\lambda \in \Omega^{-1} E$, так что

$$\max_{\nu} |\lambda_\nu| \ll \max_{i,j} |\omega_{ij}^{-1}| M,$$

где через ω_{ij}^{-1} обозначены элементы обратной матрицы Ω^{-1} . Ясно, что $|\omega_{ij}^{-1}| \ll M^{s-1}$. Таким образом, $|\lambda_\nu| \ll M^s$.

Лемма доказана.

Определим теперь последовательность достаточно быстро монотонно возрастающих величин $\gamma_j, \Gamma_j > 0, j = 1, \dots, s$, из условий $\gamma_1, \Gamma_1 > 3s^2$,

$$\Gamma_j > G_{j-1} = 3s(\gamma_1 + \dots + \gamma_{j-1} + \Gamma_{j-1} + s), \quad (5)$$

$$\gamma_j - \Gamma_j > 10s(\gamma_1 + \dots + \gamma_{j-1} + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_{j-1} + s + 1) > 3G_{j-1} + \Gamma_{j-1} + s. \quad (6)$$

Теперь индуктивным образом определим натуральные растущие $h_j, h_j \leq s, j = 1, \dots, t$. Положим $h_1 = 1$, и пусть величины $h_2, \dots, h_j$ определены. Следующее h_{j+1} определим из соотношений

$$\zeta_{h_{j+1}} > \zeta_{h_j} M^{-\gamma_{h_j}}, \quad \dots, \quad \zeta_{h_{j+1}-1} > \zeta_{h_{j+1}-2} M^{-\gamma_{h_{j+1}-2}}, \quad (7)$$

$$\zeta_{h_{j+1}} \leq \zeta_{h_{j+1}-1} M^{-\gamma_{h_{j+1}-1}}. \quad (8)$$

Условиями (7), (8) величины h_j будут определяться до тех пор, пока $h_j \leq s$. (Отметим, что, вообще говоря, может оказаться $t = 1$.) Доопределим $h_{t+1} = s + 1$, так что формально $\Lambda_{h_{t+1}} = \{0\}$.

Для интеграла $I(T)$ имеет место представление

$$I(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s : 0 < N < M} f_n \int_0^T e^{2\pi i \zeta(n)\tau} d\tau + \sum_{n \in \mathbb{Z}^s : N \geq M} f_n \int_0^T e^{2\pi i \zeta(n)\tau} d\tau. \quad (9)$$

Разобьем первую сумму в (9) следующим образом:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^s : 0 < N < M} = \sum_{j=1}^t \Sigma^{(j)}(T),$$

где

$$\Sigma^{(j)}(T) = \sum_{n \in \Lambda_{h_j} \setminus \Lambda_{h_{j+1}} : 0 < N < M} f_n \int_0^T e^{2\pi i \zeta(n)\tau} d\tau. \quad (10)$$

3. Оценки.

ЛЕММА 3. Для любого j , $1 \leq j \leq t$, с некоторой константой g_j выполнено

$$\Sigma^{(j)}(T) = g_j T + O(\zeta_{h_j} M^s T^2), \quad T \geq 0,$$

причем константа в символе O не зависит от M, T, j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Тейлора

$$\Sigma^{(j)}(T) = \Sigma^{(j)}(0)'T + \Sigma^{(j)}(\theta)''\frac{T^2}{2},$$

где $0 \leq \theta \leq T$. Таким образом, $g_j = \Sigma^{(j)}(0)'$. Оценим $|\Sigma^{(j)}(\theta)''|$. Согласно (10) имеем

$$\begin{aligned} |\Sigma^{(j)}(\theta)''| &\ll \sum_{n \in \Lambda_{h_j} \setminus \Lambda_{h_{j+1}} : 0 < N < M} |f_n| \cdot |\zeta(n)| \ll \sum_{n \in \Lambda_{h_j} : N < M} |f_n| \cdot |\zeta(n)| \\ &\ll \max_{n \in \Lambda_{h_j} : N < M} |\zeta(n)|. \end{aligned} \quad (11)$$

Но если $n \in \Lambda_{h_j}$, то n имеет вид

$$n = \lambda_{h_j} m_{h_j} + \cdots + \lambda_s m_s,$$

где в силу леммы 2 $|\lambda_\nu| \ll M^s$. Таким образом,

$$\zeta(n) = \lambda_{h_j} \zeta_{h_j} + \cdots + \lambda_s \zeta_s.$$

Но $\zeta_{h_j} > \cdots > \zeta_s$, откуда $|\zeta(n)| \ll M^s \zeta_{h_j}$. Подстановка последнего неравенства в оценку (11) доказывает лемму.

ЛЕММА 4. Для любого j , $1 \leq j \leq t$, и для любого T выполнено

$$|\Sigma^{(j)}(T)| \ll \zeta_{h_j}^{-1} M^{\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2}} \max_{\nu=1, \dots, s} \|\omega_\nu T\|,$$

где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10) имеем

$$\begin{aligned} |\Sigma^{(j)}(T)| &\ll \sum_{n \in \Lambda_{h_j} \setminus \Lambda_{h_{j+1}} : 0 < N < M} \frac{|f_n|}{|\zeta(n)|} \max_{\nu} \|\omega_\nu T\| \\ &\ll \left(\min_{n \in \Lambda_{h_j} \setminus \Lambda_{h_{j+1}} : 0 < N < M} |\zeta(n)| \right)^{-1} \max_{\nu} \|\omega_\nu T\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Но если $n \in \Lambda_{h_j} \setminus \Lambda_{h_{j+1}}$, то по построению (соотношение (4))

$$|\zeta(n)| \geq \zeta_{h_{j+1}-1}.$$

С другой стороны, опять же по построению (соотношение (7)) имеем

$$\zeta_{h_{j+1}-1} > M^{-(\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2})} \zeta_{h_j},$$

так что для произвольного $n \in \Lambda_{h_j} \setminus \Lambda_{h_{j+1}}$ выполнено

$$|\zeta(n)| > M^{-(\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2})} \zeta_{h_j}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 5. Для любого T выполнено

$$|\Sigma^{(1)}(T)| \ll M^{\gamma_{h_1} + \dots + \gamma_{h_2-2} + s-1} \max_{\nu=1, \dots, s} \|\omega_\nu T\|.$$

Лемма 5 является следствием леммы 1 и леммы 4, так как $h_1 = 1$.

ЛЕММА 6. Для любого j , $1 \leq j \leq t-1$, и любого T выполнено

$$|\Sigma^{(j)}(T)| = o(\zeta_{h_{j+1}}^{-1} M^{-\Gamma_{h_{j+1}-1}}), \quad M \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 6 является следствием леммы 4, соотношения (8) и неравенства (5), поскольку

$$\zeta_{h_j}^{-1} < \zeta_{h_{j+1}}^{-1} M^{-\gamma_{h_{j+1}-1}}, \quad -\gamma_{h_{j+1}-1} + \gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2} < -\Gamma_{h_{j+1}-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Для заданного $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдется целое T_1 из интервала

$$1 \leq T_1 \leq M^{s(\gamma_1 + \dots + \gamma_{h_2-2} + s-1+\varepsilon)} \quad (14)$$

такое, что $T_1 \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow \infty$ и

$$\Sigma^{(1)}(T_1) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять целое T_1 с помощью принципа Дирихле так, чтобы выполнялось

$$\max_{\nu=1, \dots, s} \|\omega_\nu T_1\| < M^{-(\gamma_1 + \dots + \gamma_{h_2-2} + s - 1 + \varepsilon)}$$

и (14), а затем воспользоваться леммой 4.

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Для величины T_1 из леммы 7 выполнено

$$\sum_{r=2}^t \Sigma^{(r)}(T_1) = \sum_{r=2}^t g_r T_1 + O(M^{-\Gamma_{h_2-1}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 рассматриваемая сумма имеет вид

$$\sum_{r=2}^t \Sigma^{(r)}(T_1) = \sum_{r=2}^t g_r T_1 + \sum_{r=2}^t O(\zeta_{h_r} M^s T^2).$$

Далее, для любого из рассматриваемых r с учетом (14) имеем

$$\zeta_{h_r} M^s T^2 \ll \zeta_{h_2} M^{s+2s(\gamma_1 + \dots + \gamma_{h_2-1} + s - 1 + \varepsilon)}.$$

Подставив в последнюю оценку соотношение (8) с $j = 1$, получаем

$$\zeta_{h_r} M^s T^2 \ll M^{-\gamma_{h_2-1} + 2s(\gamma_1 + \dots + \gamma_{h_2-1} + s)} < M^{-\Gamma_{h_2-1}}.$$

В последнем неравенстве было применено (5).

Лемма доказана.

4. Почти периоды.

ЛЕММА 9. Для любого j , $2 \leq j \leq t$, и любого $\varepsilon > 0$ сумма $\Sigma^{(j)}(T)$ имеет $\varepsilon \zeta_{h_j}^{-1}$ -почти период l_j , причем выполнено

$$\zeta_{h_j}^{-1} \leq l_j \leq \zeta_{h_j}^{-1} M^{s(\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2})} \varepsilon^{-s}.$$

Понятие δ -почти периода означает, что

$$|\Sigma^{(j)}(T + l_j) - \Sigma^{(j)}(T)| < \delta \quad \forall T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $l_j = \tau \zeta_{h_j}^{-1}$ и применяя соображения леммы 4, имеем

$$|\Sigma^{(j)}(T + l_j) - \Sigma^{(j)}(T)| \ll \zeta_{h_j}^{-1} M^{\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2}} \max_{\nu} \left\| \frac{\tau \omega_\nu}{\zeta_{h_j}} \right\|.$$

Теперь согласно принципу Дирихле выбираем τ так, что

$$\max_{\nu=1, \dots, s} \left\| \frac{\tau \omega_\nu}{\zeta_{h_j}} \right\| < \varepsilon M^{-(\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2})}, \quad 1 \leq \tau \leq M^{s(\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2})} \varepsilon^{-s}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что для любого j , $2 \leq j \leq t$, для величины l_j , определенной в лемме 9, выполнено

$$l_j \leq \zeta_{h_{j+1}}^{-1} M^{-\Gamma_{h_{j+1}-1}} \varepsilon^{-s}.$$

Для сокращения обозначений положим

$$\Gamma(j) = \Gamma_{h_{j+1}-1}, \quad G(j) = s(\gamma_{h_j} + \dots + \gamma_{h_{j+1}-2} + \Gamma_{h_{j+1}-1}) < G_{h_{j+1}-1}.$$

ЛЕММА 10. Для любого j , $2 \leq j \leq t$, сумма $\Sigma^{(j)}(T)$ имеет $\zeta_{h_j}^{-1} M^{-\Gamma(j)}/4$ -почти период l_j такой, что

$$\zeta_{h_j}^{-1} \leq l_j \leq \zeta_{h_j}^{-1} M^{G(j)}.$$

Лемма 10 является переформулировкой леммы 9 с учетом новых обозначений при $\varepsilon = M^{-\Gamma(j)}/4$.

5. Применение оценок снизу величин $|g_j|$.

ЛЕММА 11. Зафиксируем j из интервала $2 \leq j \leq t$. Если предположить, что $|g_j| \geq M^{-\Gamma(j)/3}$, то найдутся моменты времени $T_{j,+}$, $T_{j,-}$ такие, что $|T_{j,+}| = |T_{j,-}| = \zeta_{h_j}^{-1} w_j$, $w_j = M^{-\Gamma(j)/2}$, и

$$\Sigma^{(j)}(T_{j,-}) < -M^{-\Gamma(j)} \zeta_{h_j}^{-1}, \quad \Sigma^{(j)}(T_{j,+}) > M^{-\Gamma(j)} \zeta_{h_j}^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3

$$\Sigma^{(j)}(\pm \zeta_{h_j}^{-1} w_j) = \pm g_j \zeta_{h_j}^{-1} w_j + O(\zeta_{h_j}^{-1} M^s w_j^2). \quad (15)$$

Но $|g_j| \geq M^{-\Gamma(j)/3}$ по условию, так что $M^s w_j = M^{s-\Gamma(j)/2} = o(|g_j|)$ и в формуле (15) главный член по порядку больше остаточного. Для самого же главного члена имеем

$$|g_j| \zeta_{h_j}^{-1} w_j > \zeta_{h_j}^{-1} M^{-(1/2+1/3)\Gamma(j)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Зафиксируем j из интервала $2 \leq j \leq t$. Положим $\tau_j^\pm = T_{j,\pm} + 2l_j$. Тогда

$$\sum_{r=j+1}^t \Sigma^{(r)}(\tau_j^\pm) = \sum_{r=j+1}^t g_r \tau_j^\pm + o(M^{-\Gamma(j)} \zeta_{h_j}^{-1}),$$

причем $\tau_j^+, \tau_j^- \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, при каждом рассматриваемом j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $\tau_j^+, \tau_j^- \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ очевидно. Докажем асимптотическое равенство для суммы $\Sigma^{(r)}$. В силу леммы 3 достаточно проверить, что

$$M^s \zeta_{h_{j+1}} \tau_j^\pm = o(M^{-\Gamma(j)} \zeta_{h_j}^{-1}).$$

Учитывая лемму 10, имеем

$$M^s \zeta_{h_{j+1}} \tau_j^\pm < \zeta_{h_{j+1}} \zeta_{h_j}^{-2} M^{2G(j)+s}.$$

Далее применяем (8):

$$M^s \zeta_{h_{j+1}} \tau_j^\pm < \zeta_{h_j}^{-1} M^{2G(j)+s-\gamma_{h_{j+1}-1}}.$$

Теперь, рассмотрев в последней оценке показатель при M и воспользовавшись (5), (6), получаем

$$2G(j) + s - \gamma_{h_{j+1}-1} < 2G_{h_{j+1}-1} + s - \gamma_{h_{j+1}-1} < -\Gamma_{h_{j+1}-1} = -\Gamma(j).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. *Выполнено*

$$\Sigma^{(j)}(\tau_j^-) < -\frac{1}{2}M^{-\Gamma(j)}\zeta_{h_j}^{-1}, \quad \Sigma^{(j)}(\tau_j^+) > \frac{1}{2}M^{-\Gamma(j)}\zeta_{h_j}^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заявленная в лемме 13 оценка верна для величин $T_{j,\pm}$ в силу леммы 11. Но так как l_j является $\zeta_{h_j}^{-1}M^{-\Gamma(j)}/4$ -почти периодом, утверждение леммы 13 следует из леммы 11.

6. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим множество

$$\mathcal{J} = \{j : 2 \leq j \leq t, |g_j| \geq M^{-\Gamma(j)/3}\}.$$

Тогда либо $\mathcal{J} = \emptyset$ для бесконечного количества значений M , либо $\mathcal{J} \neq \emptyset$ для всех значений M .

1) $\mathcal{J} = \emptyset$.

В этом случае для любого j , $2 \leq j \leq t-1$, выполнено $|g_j| < M^{-\Gamma(j)/3}$. Возьмем T_1 из леммы 7. Тогда

$$\Sigma^{(1)}(T_1) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$\sum_{r=2}^{t-1} |\Sigma^{(r)}(T_1)| \ll T_1 M^{-\Gamma(j)/3} + \zeta_{h_2} M^s T_1^2.$$

В последнюю оценку подставляем границу (14) для T_1 и неравенство $\zeta_{h_2} < M^{-\gamma_{h_2}-1}$, которое получается из (8). Имеем

$$\sum_{r=2}^{t-1} |\Sigma^{(r)}(T_1)| \ll M^{-\Gamma(j)/3+s(\gamma_{h_1}+\dots+\gamma_{h_{t-1}}+s)} + M^{s-\gamma_{h_2}-1+2s(\gamma_{h_1}+\dots+\gamma_{h_{t-1}}+s)}.$$

В силу (5), (6) оба показателя при M отрицательны и, следовательно,

$$\sum_{r=2}^{t-1} \Sigma^{(r)}(T_1) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \quad (17)$$

С другой стороны, очевидно,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^s : N \geq M} f_n \int_0^{T_1} e^{2\pi i \zeta(n)\tau} d\tau \ll T_1 e^{-\delta M} \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Подставляя (16)–(18) в (9) и (10), получаем $I(T_1) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

В случае 1) теорема 1 доказана.

2) $\mathcal{J} \neq \emptyset$.

Пусть $k = \max\{j : j \in \mathcal{J}\}$. Тогда

$$|g_j| < M^{-\Gamma(j)/3} \quad \forall j \geq k+1. \quad (19)$$

Рассмотрим величины $\tau_k^\pm$. По лемме 13

$$\Sigma^{(k)}(\tau_k^-) < -\frac{1}{2}M^{-\Gamma(k)}\zeta_{h_k}^{-1}, \quad (20)$$

$$\Sigma^{(k)}(\tau_k^+) > \frac{1}{2}M^{-\Gamma(k)}\zeta_{h_k}^{-1}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{r=1}^{k-1} \Sigma^{(r)}(\tau_k^\pm).$$

Применение оценки леммы 6 дает следующий результат:

$$\sum_{r=1}^{k-1} \Sigma^{(r)}(\tau_k^\pm) = o(\zeta_{h_k}^{-1}M^{-\Gamma(k)}). \quad (22)$$

Далее, по лемме 12

$$\sum_{r=k+1}^t \Sigma^{(r)}(\tau_k^\pm) = \sum_{r=k+1}^t g_r \tau_k^\pm + o(M^{-\Gamma(r)}\zeta_{h_j}^{-1}). \quad (23)$$

Но согласно (19) и оценке для почти периода леммы 10 имеем

$$\sum_{r=k+1}^t |g_r| \cdot |\tau_k^\pm| \ll \zeta_{h_k}^{-1}M^{-\Gamma(k+1)/3+G(k)} = o(M^{-\Gamma(k)}\zeta_{h_j}^{-1}) \quad (24)$$

(в последнем равенстве учтено (6)). Кроме того, очевидно,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^s : N \geq M} f_n \int_0^{\tau_k^\pm} e^{2\pi i \zeta(n)\tau} d\tau \ll \zeta_{h_k} T_1 e^{-\delta_1 M} \quad (25)$$

с некоторым $\delta_1 > 0$.

Подставляя в (9), (10) неравенства (20), (22)–(25), убеждаемся, что

$$I(\tau_k^-) < -\frac{1}{4}\zeta_{h_k}M^{-\Gamma(k)}.$$

Подставляя в (9), (10) неравенства (21)–(25), убеждаемся, что

$$I(\tau_k^+) > \frac{1}{4}\zeta_{h_k}M^{-\Gamma(k)}.$$

Значит, найдется момент времени $T^* \in [l_j; 3l_j]$ такой, что $I(T^*) = 0$.

Теорема 1 доказана.

7. Невозвращаемость интегралов от вектор-функций. В настоящем пункте обсуждается возвращаемость интегралов условнопериодических *вектор-функций*. Мы показываем, что уже для трехчастотных условнопериодических вектор-функций никакая заданная наперед гладкость не может обеспечить возвращаемости интеграла.

Пусть $f^j: \mathbb{T}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, — функции, задаваемые рядами Фурье

$$f^j(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^s \\ k \neq 0}} f_k^j \exp(2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_s x_s)),$$

где частоты $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{R}$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Рассматриваются интегралы

$$I^j(T) = \int_0^T f^j(\omega_1 t, \dots, \omega_s t) dt, \quad j = 1, 2.$$

Будем говорить, что вектор-функция $I(T) = (I^1(T), I^2(T)): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ *возвращается*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T \quad \exists T^* > T: \quad |I^1(T^*)| + |I^2(T^*)| < \varepsilon.$$

Ясно, что справедлив следующий метрический результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть вектор-функция f достаточно гладкая (например, класса C^∞). Тогда возвращаемость $I(T)$ имеет место для почти всех несоизмеримых наборов частот ω .

Пусть $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — положительнозначная монотонная функция такая, что ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^s} \Phi\left(\max_{1 \leq j \leq s} |k_j|\right)$$

сходится. Вектор-функцию $f = (f^1, f^2): \mathbb{T}^s \rightarrow \mathbb{R}^2$ будем называть вектор-функцией *типа Φ* , если для ее коэффициентов Фурье выполнена оценка

$$|f_k^j| \leq \Phi\left(\max_{1 \leq j \leq s} |k_j|\right), \quad k \in \mathbb{Z}^s, \quad j = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого наперед заданного типа Φ найдется вектор-функция $f = (f^1, f^2): \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ типа Φ с нулевым средним,

$$\int_{\mathbb{T}^3} f^j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2,$$

и набор частот $1, \alpha, \beta$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$, таких, что

$$|I^1(T)| + |I^2(T)| \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow +\infty,$$

и, следовательно, интеграл $I(T)$ не возвращается.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого наперед заданного типа Φ найдется комплекснозначная функция $f: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ типа Φ с нулевым средним и набор частот $1, \alpha, \beta$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$, таких, что

$$|I(T)| \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow +\infty.$$

Любопытно отметить, что цитировавшийся в п. 1 результат Козлова о равномерной возвращаемости интеграла гладкой двухчастотной условнопериодической функции [1] справедлив и для вектор-функций. Результат Конягина о возвращаемости интеграла для нечетных функций [3] также имеет место для вектор-функций. Кроме того, очевидно, что теорема Г. Вейля о равенстве пространственного и временного средних для вектор-функций тоже остается справедливой.

8. Доказательство теоремы 3. Будем действовать так же, как и в доказательстве теоремы 2 из [3].

Не ограничивая общности, можно считать, что для любого y выполнено

$$\sum_{l=y+1}^{\infty} \Phi(l) < \frac{1}{4\pi} \Phi(y).$$

Положим $p_1 = q_1 = 1$, $p_0 = q_0 = 0$ и последовательным образом определим p_ν, q_ν .

Итак, пусть заданы p_μ, q_μ , $\mu \leq \nu$. Определим сначала натуральные $b_{\nu+1}$ и $q_{\nu+1}$ так, чтобы они удовлетворяли условию

$$q_{\nu+1} = q_\nu b_{\nu+1} + q_{\nu-1} \geq 4(\Phi(p_\nu))^{-2}.$$

Затем определим натуральные $a_{\nu+1}$ и $p_{\nu+1}$ так, чтобы

$$p_{\nu+1} = p_\nu a_{\nu+1} + p_{\nu-1} \geq 4(\Phi(q_{\nu+1}))^{-2}.$$

Частоты α, β теперь определяются в виде регулярных цепных дробей

$$\alpha = [0; a_1, \dots, a_\nu, \dots], \quad \beta = [0; b_1, \dots, b_\nu, \dots].$$

Ясно, что можно считать, что $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Кроме того, p_ν, q_ν суть все знаменатели подходящих дробей для α, β . Пусть $A_\nu/p_\nu, B_\nu/q_\nu$ — сами подходящие дроби для α и β соответственно. Определим теперь

$$f_1(x_1, x_2) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Phi(p_\mu) \cos(2\pi(A_\mu x_1 - p_\mu x_2)),$$

$$f_2(x_1, x_3) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Phi(q_\mu) \cos(2\pi(B_\mu x_1 - q_\mu x_3)).$$

Функции f_1, f_2 имеют тип Φ . Утверждается, что для них и частот $1, \alpha, \beta$ выполнено заключение теоремы 3. Действительно,

$$I^1(T) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Phi(p_\mu)}{2\pi(A_\mu - p_\mu \alpha)} \sin(2\pi(A_\mu - p_\mu \alpha)T),$$

$$I^2(T) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\Phi(q_\mu)}{2\pi(B_\mu - q_\mu \beta)} \sin(2\pi(B_\mu - q_\mu \beta)T).$$

Рассмотрим интервалы

$$\Xi_{\nu}^1 = \left[(\Phi(p_{\nu}))^{-2}, \frac{p_{\nu}+1}{4} \right], \quad \Xi_{\nu}^2 = \left[(\Phi(q_{\nu}))^{-2}, \frac{q_{\nu}+1}{4} \right].$$

При $T \in \Xi_{\nu}^1$ имеем

$$|I^1(T)| > \frac{\Phi(p_{\nu})T}{4\pi} - O(p_{\nu}) > \frac{1}{8\pi\Phi(p_{\nu})},$$

а при $T \in \Xi_{\nu}^2$ имеем

$$|I^2(T)| > \frac{\Phi(q_{\nu})T}{4\pi} - O(q_{\nu}) > \frac{1}{8\pi\Phi(q_{\nu})}.$$

Очевидно, что множество $(\bigcup_{\nu} \Xi_{\nu}^1) \cup (\bigcup_{\nu} \Xi_{\nu}^2)$ покрывает некоторый луч $[T^*, +\infty)$.

Теорема 3 немедленно следует из сформулированных утверждений.

Отметим, что интегралы $I^1(T)$ и $I^2(T)$ из доказанной теоремы являются интегралами от гладких *двухчастотных* условнопериодических функций и, следовательно, каждый из них в отдельности возвращается. Проведенные выше рассуждения показывают, что эта возвращаемость не является *одновременной*.

Автор выражает глубокую признательность С.В. Конягину за плодотворные обсуждения, проверку настоящей работы и исправление некоторых опечаток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Козлов В. В. Финальные свойства интегралов от квазипериодических функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1978. № 1. С. 106–115.
- [2] Мощевитин Н. Г. О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 723–735.
- [3] Конягин С. В. О возвращаемости интеграла нечетной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 570–577.
- [4] Moshchevitin N. G. Recent results on asymptotic behaviour of integrals of quasiperiodic functions // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 168. P. 201–209.
- [5] Мощевитин Н. Г. Многомерные диофантовы приближения и динамические системы // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2. № 1. С. 81–95.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mosh@nw.math.msu.su

Поступило
02.12.96