Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Хрипунова, Аддитивные задачи с числами, имеющими заданное число простых делителей, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 749–762

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:30:50

УДК 511

АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С ЧИСЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ ЗАДАННОЕ ЧИСЛО ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

М. Б. Хрипунова

Изучается асимптотика сумм вида

$$\sum_{\substack{n \leq N \\ \omega(n)=k}} \tau(|bn - a|),$$

где $\omega(n)$ – число различных простых делителей числа n , а $\tau(n)$ – число всех его делителей.

Библиография: 19 названий.

Пусть $\omega(n)$ – число различных простых делителей n , а $\tau(n)$ – число делителей натурального числа n . Целью настоящей статьи является нахождение асимптотики суммы

$$\sum'_{\substack{n \leq N \\ \omega(n)=k}} \tau(|bn - a|), \quad (1)$$

равномерной по k, a, b при $k \leq \gamma \ln_2 N$, $(a, b) = 1$, $|a| < cN$, $|b| \leq (\ln N)^\alpha$; N – большое натуральное число, γ, c, α – фиксированные постоянные, $\sum'$ означает, что в сумме $bn - a \neq 0$. Здесь и далее $\ln_2 N = \ln \ln N$, $\ln_3 N = \ln \ln \ln N$.

При $a = N, b = 1$, находя асимптотику суммы (1), мы тем самым находим асимптотику числа решений уравнения $N = n + xy$, где $\omega(n) = k$, x, y – натуральные числа; а при $b = 1$ – асимптотику числа решений уравнения $a = n - xy$, где $n < N$, $\omega(n) = k$, x, y – натуральные числа.

Наиболее просто асимптотика выглядит в случае $b = 1, a = 1$.

ТЕОРЕМА 1. При $k \leq \gamma \ln_2 N$ имеем

$$\sum_{\substack{n \leq N \\ \omega(n)=k}} \tau(n-1) = C \frac{N}{\Gamma(\sigma+1)} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \left(1 + O\left(\frac{(\ln_3 N)^2}{\ln_2 N}\right)\right),$$

где

$$C = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right), \quad \lambda(p) = 1 - \frac{p}{p^2 - p + 1}, \quad \sigma = \frac{k-1}{\ln_2 N}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00502.

Данную задачу можно считать аналогом проблемы Титчмарша, которая заключается в нахождении асимптотики суммы $\sum_{p < N} \tau(p-1)$, p – простое число. Эта проблема была решена Титчмаршем [1] в 1930 году с помощью расширенной гипотезы Римана. Ее безусловное решение получил в 60-е годы Ю. В. Линник [2], используя созданный им дисперсионный метод. В последующие годы обобщением проблемы Титчмарша занимались многие авторы: Б. М. Бредихин [3], М. Б. Барбан [4], А. К. Каршнев [5], Ж. А. Пиядина [6], А. Фуджи [7] и др. Они находили асимптотики сумм вида

$$\sum_{n < N} \tau(n+a),$$

где n равно произведению фиксированного числа простых чисел, удовлетворяющих некоторым условиям. К примеру, у Пиядиной [6] n имеет не более шести простых делителей больших $N^{1/883}$.

Настоящая работа является продолжением работ [8] и [9], в которых находятся асимптотики сумм

$$\sum_{\substack{n < N \\ \Omega(n)=k}} \tau(n-1), \quad \sum_{\substack{n < N \\ \Omega(n)=k}} \tau(N-n)$$

равномерно по $k \leq (2-\varepsilon) \ln_2 N$ для обеих сумм и $k \in [(2+\varepsilon) \ln_2 N, b \ln_2 N]$ для второй суммы. Здесь и далее $\Omega(n)$ – число простых делителей n с учетом их кратности.

Действуя по схеме работы [9], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \leq (2-\varepsilon) \ln_2 N$, $(a, b) = 1$, $|a| < cN$, $|b| \leq (\ln N)^\alpha$; c, α – постоянные, N – большое натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} \sum'_{\substack{n < N \\ \Omega(n)=k}} \tau(|bn-a|) &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \frac{N(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\times \Phi(\sigma) E(ab, \sigma) E(\sigma) \left(1 + O\left(\frac{(\ln_3 N)^3}{\ln_2 N}\right)\right), \end{aligned}$$

где $\sigma = k/\ln_2 N$,

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{p^2-p+1}\right)^{-1}, \quad E(\sigma) = \prod_p \left(1 - \frac{\sigma}{p^2-p+1}\right), \\ E(ab, \sigma) &= \prod_{p|ab} \left(1 - \frac{\sigma}{p^2-p+1}\right)^{-1} \prod_{p|a} \left(1 + \sum_{r < \alpha(a,p)} \frac{\sigma}{p^r}\right) \\ &+ \left(\frac{p^2-p+1}{(p-1)^2} - \frac{\sigma}{(p-1)^2}\right) \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\alpha(a,p)}, \end{aligned}$$

$\alpha(a, p)$ – показатель степени, с которым p входит в каноническое разложение a . $\sum'$ означает, что в этой сумме $bn-a \neq 0$.

Сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k \leq \gamma \ln_2 N$, $(a, b) = 1$, $|a| < cN$, $|b| \leq (\ln N)^\alpha$, N – большое натуральное число, γ, c, α – постоянные. Тогда

$$\sum'_{n < N, \omega(n)=k} \tau(|bn - a|) = C \frac{N}{\Gamma(\sigma + 1)} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \times E(a, b, \sigma) \left(1 + O\left(\frac{(\ln_3 N)^2}{\ln_2 N}\right)\right),$$

где

$$C = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p+1)}\right), \quad \lambda(p) = 1 - \frac{p}{p^2 - p + 1}, \quad \sigma = \frac{k-1}{\ln_2 N},$$

$$E(a, b, \sigma) = \prod_{p|a} \left(\lambda(p) + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1} + \sigma \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\alpha(a,p)}}\right) \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \times \left(1 + \frac{\sigma}{p-1}\right) \right) \prod_{p|b} \left(1 + \frac{\sigma}{p-1}\right) \lambda(p) \prod_{p|ab} \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right)^{-1},$$

$\alpha(a, p)$ – наибольший показатель степени, в которой p делит a , $\sum'$ означает, что в этой сумме $bn - a \neq 0$.

При доказательстве этой теоремы в отличие от работ [8] и [9] приходится сталкиваться с дополнительными трудностями, возникающими из-за различий в свойствах функций $\Omega(n)$ и $\omega(n)$. Несмотря на схожесть этих функций, $\Omega(n)$ вполне аддитивная, а $\omega(n)$ просто аддитивная. Это и вносит дополнительные сложности, которые нашли свое отражение при нахождении асимптотики сумм

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=k}} 1, \tag{2}$$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} 1. \tag{3}$$

Асимптотика (2) при всех возможных k , $k \notin [(2-\varepsilon) \ln_2 N, (2+\varepsilon) \ln_2 N]$, была найдена в работах [10]–[12] довольно давно, а асимптотическое поведение (3) при $k \leq \ln N (\ln_2 N)^{-2}$ было получено сравнительно недавно в работе [13].

Далее приведем необходимые вспомогательные результаты.

Пусть $|A|$ – число элементов множества A , $P(t) = \prod_{p \leq t} p$, p – простое число,

$$\pi(x, t, k) = |\{n : n \in [1, x], (n, P(t)) = 1, \omega(n) = k\}|,$$

$$\pi(x, a, d, k) = |\{n : n \leq x, n \equiv a \pmod{d}, \omega(n) = k\}|.$$

При нахождении асимптотики суммы (2) используем следующую лемму.

ЛЕММА 1 [14, лемма 5] (см. также [15, теорема 6]). Пусть $R > 0$. Тогда равномерно по

$$\frac{3}{2} \leq t < \exp((\ln x)^{2/5}), \quad x \geq 3, \quad 1 \leq k \leq R \ln U$$

имеем

$$\pi(x, t, k) = g(r, t) \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln U)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_R\left(\frac{1}{\ln_2 x}\right)\right),$$

где

$$r = \frac{k-1}{\ln U}, \quad U = \frac{\ln x}{\ln t},$$

$$g(r, t) = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \left((\ln t)^r \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r \right) \prod_{p > t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r \left(1 + \frac{r}{p-1}\right).$$

Далее, пусть

$$\mu(x, k, t, a, d) = |\{n : n \leq x, \Omega(n) = k, (n, P(t)) = 1, n \equiv a \pmod{d}\}|.$$

Следующая лемма, которую можно назвать аналогом теоремы Виноградова–Бомбьери, доказана в работе [8].

ЛЕММА 2. Пусть $2 \leq t \leq \sqrt{x}$, $k \leq (\ln_2 x)^2$ и

$$\Delta_k(t) = \sum_{d \leq Q} \max_{y \leq x} \max_{(a,d)=1} \left| \mu(y, k, t, a, d) - \frac{1}{\varphi(d)} |\{n : n \leq y, \Omega(n) = k, (n, dP(t)) = 1\}| \right|.$$

Тогда $\Delta_k(t) \ll Q\sqrt{x} \exp((\ln_2 x)^{2+\varepsilon}) + x(\ln x)^{-B}$, где $\varepsilon > 0$, B – любая положительная постоянная.

ЛЕММА 3. При $d \leq x^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$, $k \leq b \ln_2 x$

$$\max_{(a,k)=1} \pi(x, a, d, k) \ll \frac{x}{\varphi(d) \ln x} \frac{(\ln_2 x)^k}{k!} \sqrt{k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [16] для неотрицательных мультипликативных функций, удовлетворяющих условиям $f(p^r) \leq A_1^r$, $r \geq 1$, $f(n) \leq A_2 n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, доказано, что при $d < x^{1-\alpha}$

$$\max_{(a,d)=1} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d}}} f(n) \ll \frac{x}{\varphi(d) \ln x} \exp\left(\sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p}\right).$$

Отсюда при $1 \leq k \leq b \ln_2 x$ получим

$$\pi(x, a, d, k) \leq \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d}}} \left(\frac{k}{\ln_2 x}\right)^{\omega(n)} \left(\frac{\ln_2 x}{k}\right)^k$$

$$\ll \frac{x}{\varphi(d) \ln x} \exp\left(\frac{k}{\ln_2 x} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\right) \left(\frac{\ln_2 x}{k}\right)^k \ll \frac{x}{\varphi(d) \ln x} \left(e \frac{\ln_2 x}{k}\right)^k.$$

Применяя формулу Стирлинга, получим

$$\left(\frac{\ln_2 x}{k} e\right)^k \frac{k!}{(\ln_2 x)^k} \ll \frac{e^k}{k^k} k^k e^{-k} \sqrt{k},$$

т.е. получим утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть N – натуральное число. Тогда

$$\sum_{d|N} \frac{\ln d}{d} \gamma^{\omega(d)} \leq (\ln_2 N)^{\gamma+1}, \quad \sum_{d|N} \frac{\gamma^{\omega(d)}}{\delta} \ll (\ln_2 N)^\gamma.$$

Если n_1 – числа, все простые делители которых меньше либо равны t , то

$$\sum_{n_1 \leq y} \frac{\gamma^{\omega(n_1)}}{n_1} \ll (\ln t)^\gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\sum_{\delta|N} \frac{\gamma^{\omega(\delta)}}{\delta} \ll \exp\left(\gamma \sum_{p \leq \ln N} \frac{1}{p} + \gamma \sum_{\substack{p|N \\ p > \ln N}} \frac{1}{p}\right) \ll (\ln_2 N)^\gamma.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{d|N} \frac{\ln d}{d} \gamma^{\omega(d)} &\leq \gamma \sum_{p^r|N} \frac{\ln p^r}{p^r} \sum_{d|N} \frac{\gamma^{\omega(d)}}{d} \ll \left(\sum_{p \leq (\ln N)^2} \frac{\ln p}{p} + O(1) \right) \ln_2^\gamma N \ll (\ln_2 N)^{\gamma+1}, \\ \sum_{n_1 \leq y} \frac{\gamma^{\omega(n_1)}}{n_1} &\leq \prod_{p \leq t} \left(1 + \gamma \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^r} \right) \ll \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{\gamma}{p} \right) \ll (\ln t)^\gamma. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть a – натуральное число. Тогда

$$\sum_{\substack{d < N \\ (d, a) = 1}} \frac{1}{\varphi(d)} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{1}{p(p+1)} \right)^{-1} \ln N + O\left(\sum_{d|a} \frac{1 + \ln d}{d} \right).$$

Доказательство леммы 5 можно найти во многих работах, например, [17, лемма 3.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Представим n в сумме (1) в виде $n_1 n_2$, где у n_1 все простые делители не больше $t = \exp((\ln_2 N)^2)$, а у n_2 все простые делители больше t ; n_1 и n_2 могут равняться 1. Пусть

$$U = \max\left\{ N, \max_{n \leq N} |bn - a| \right\},$$

A – большая положительная постоянная. Заметим, что $bn \ll N(\ln N)^\alpha$, иными словами, $U \ll N(\ln N)^\alpha$.

Сначала оценим часть суммы (1), в которой $n_1 > y$, $y = \exp((\ln_2 N)^4)$. Применив неравенство Коши, получим, что эта часть суммы

$$\ll \sqrt{\sum_{n_1 < y} \sum_{n_2 < N/n_1} 1 \cdot \sum_{m < U} \tau^2(m)}. \quad (4)$$

Далее, $\sum_{m < U} \tau^2(m) \ll U(\ln U)^3$ (см. [18]). Оценим сумму (1) по $n_1 > y$ с помощью леммы 5.2 из [19]:

$$\ll N \sum_{y < n_1 \leq N} \frac{1}{n_1} \ll N \ln N \exp\left(-\frac{\ln_3 t}{\ln t} \ln y + 2 \ln_2 t\right).$$

Учитывая, что $\ln y / \ln t \geq (\ln_2 N)^2$, выражение (4)

$$\ll \sqrt{\frac{N}{(\ln N)^{2A+3+\alpha}}} U(\ln U)^3 \ll \frac{N}{\ln^A N}.$$

Кроме того, можно считать, что в сумме (1) n и a не имеют общих простых делителей больших t . Действительно, та часть суммы, в которой есть такие n , будет

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\substack{p^r \parallel a \\ p > t}} \tau(p^r) \sum_{n < N/p^r} \tau\left(\left|bn - \frac{a}{p^r}\right|\right) \leq \sum_{\substack{p^r \parallel a \\ p > t}} \tau(p^r) \sum_{m \leq U/p^r} \tau(m) \\ &\ll U \ln U \sum_{\substack{p^r \parallel a \\ p > t}} \frac{\tau(p^r)}{p^r} \ll U \ln^2 U \sum_{\substack{p \parallel a \\ p > t}} \frac{1}{p} \ll \frac{U \ln^3 U}{t} \ll \frac{N}{\ln^A N}. \end{aligned}$$

Далее можно считать, что n не делится на p^r при $r \geq 2, p > t$. Действительно, эта часть суммы будет

$$\ll \sqrt{\sum_{p > t} \frac{N}{p^2} \cdot \sum_{m < U} \tau^2(m)} \leq \sqrt{\frac{NU \ln^3 U}{t}} \leq \frac{N \ln^{3/2+\alpha} U}{\sqrt{t}} \leq \frac{N}{\ln^A N}.$$

Следовательно, $\omega(n_2) = \Omega(n_2)$.

Учитывая предыдущие рассуждения, представив $\tau(|bn - a|)$ как сумму по делителям и просуммировав под гиперболой, получим, что сумма (1) равна

$$2 \sum_{\substack{d \leq Q \\ (d,b)=1}} \sum_{\substack{n_1 \leq y \\ n_1 n_2 b \equiv a \pmod{d} \\ \omega(n_1 n_2) = k}} \sum_{\substack{n_2 \leq N/n_1}} 1 + R_2 + R_1. \quad (5)$$

Здесь и далее считаем, что $Q \leq \sqrt{U} / \ln^A N$. Выпишем и оценим остатки R_2 и R_1 в (5). Начнем с R_1 :

$$R_1 = \sum_{d \leq Q} \sum_{\substack{n \leq N \\ bn \equiv a \pmod{d} \\ |bn - a| \leq d\sqrt{U} \\ \omega(n) = k}} 1 \ll \sum_{\substack{d \leq Q \\ (d,b)=1}} \left(\frac{2d\sqrt{U}}{bd} + O(1) \right) \ll \frac{Q\sqrt{U}}{b} \ll \frac{U}{\ln^A N}.$$

Здесь мы воспользовались тривиальными оценками и тем, что при $|bn - a| \leq d\sqrt{U}$

$$n \in \left[\frac{a - d\sqrt{U}}{b}, \frac{a + d\sqrt{U}}{b} \right].$$

Теперь займемся оценкой R_2 . Для этого разобьем его на две суммы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \sum_{Q \leq d \leq \sqrt{U}} \sum_{\substack{n \leq N \\ bn \equiv a \pmod{d} \\ \omega(n) = k}} 1 = \sum_{\substack{\delta | a \\ \delta > V}} \sum_{\substack{Q/\delta \leq d \leq \sqrt{U}/\delta \\ (d, ab/\delta) = 1}} \sum_{\substack{n \leq N/\delta \\ bn \equiv a/\delta \pmod{d} \\ \omega(n\delta) = k}} 1 \\
 &+ \sum_{\substack{\delta | a \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{Q/\delta \leq d \leq \sqrt{U}/\delta \\ (d, ab/\delta) = 1}} \sum_{\substack{n \leq N/\delta \\ bn \equiv a/\delta \pmod{d} \\ \omega(n\delta) = k}} 1.
 \end{aligned}$$

Первая сумма в последнем выражении

$$\ll \sum_{\substack{\delta | a \\ \delta > V}} \sum_{\substack{Q/\delta \leq d \leq \sqrt{U}/\delta \\ (d, ab/\delta) = 1}} \frac{U}{\delta d} \ll U \ln N \sum_{\substack{\delta | a \\ \delta > V}} \frac{1}{\delta} \ll \frac{U \ln N}{V} \tau(a),$$

а это в силу оценки $\tau(a) \ll a^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (см. [18]) при $V = U^{3\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$ есть $O((U \ln N)/U^{2\varepsilon})$. Далее применяем для оценки суммы по $\delta \leq V$, входящей в R_2 , лемму 3, учитывая, что $k \leq \gamma \ln_2 N$. Используя лемму 4, получим

$$\begin{aligned}
 R_2 &\ll \sum_{\substack{\delta | a \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{Q/\delta < d \leq \sqrt{U}/\delta \\ (d, ab/\delta) = 1}} \frac{N}{\delta \varphi(d) \ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k - \omega(\delta)}}{(k - \omega(\delta))!} \sqrt{k} + U^{1-2\varepsilon} \ln N \\
 &\ll \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \ln \frac{\sqrt{U}}{Q} \sum_{\delta | a} \frac{(k-1)! \delta^{-1}}{(k - \omega(\delta))!} \frac{1}{(\ln_2 N)^{\omega(\delta)-1}} \\
 &\ll \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} (\ln_2 N)^2 \ln \frac{\sqrt{U}}{Q} \sum_{\delta | a} \frac{\gamma^{\omega(\delta)}}{\delta} \ll \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} (\ln N)^\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $\ln(\sqrt{U}/Q) \ll (\ln N)^\varepsilon$. Представим $\delta \mid ab$ в виде $\delta_1 \delta_2$, где δ_1 – делитель n_1 , а δ_2 – делитель n_2 . Тогда сумма (1) равна

$$2 \sum_{\substack{\delta_1 \delta_2 | a \\ \delta_1 \delta_2 \leq V}} \sum_{\substack{d \leq Q/(\delta_1 \delta_2) \\ (d, ab/(\delta_1 \delta_2)) = 1}} \sum_{\substack{n_1 \leq y \\ (n_1, d) = 1}} \sum_{\substack{n_1 n_2 \leq N/(\delta_1 \delta_2) \\ n_1 n_2 b \equiv a \pmod{d} \\ \Omega(n_2) = k - \omega(n_1 \delta)}} 1 + O\left(\frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} (\ln N)^\varepsilon\right). \quad (6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что n_2 не делится на p^2 и $\omega(n_2) = \Omega(n_2)$.

Главный член выражения (6), записанный в удобном для применения леммы 2 виде, после применения этой леммы становится равным

$$2 \sum_{\substack{\delta_1 \delta_2 | a \\ \delta_1 \delta_2 \leq V}} \sum_{\substack{d \leq Q/(\delta_1 \delta_2) \\ (d, ab/(\delta_1 \delta_2)) = 1}} \sum_{\substack{n_1 \leq y \\ (n_1, d) = 1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n \leq N/\delta \\ \Omega(n_2) = k - \omega(n_1 \delta) \\ (n_2, d) = 1}} 1 + R_3,$$

где

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} \sum_{n_1 \leq y} \sum_{\substack{d \leq Q/\delta \\ (d, abn_1/\delta)=1}} 1 \left(\mu \left(\frac{N}{\delta n_1}, k - \omega(n_1\delta), t, \frac{a}{\delta_1 \delta_2} \bar{n}_1 \bar{b}, d \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\varphi(d)} \left| \left\{ n_2 : n_2 \leq \frac{N}{\delta}, \Omega(n_2) = k - \omega(n_1\delta), (n_2, d) = 1, (n_2, P(t)) = 1 \right\} \right| \right) \\
 &\ll \sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} \sum_{n_1 \leq y} \left(\frac{Q}{\delta} \sqrt{\frac{N}{\delta n_1}} \exp \left((\ln_2 N)^{2+\varepsilon} + \frac{N}{n_1 \delta} (\ln N)^{-B} \right) \right) \\
 &\ll Q \sqrt{N} \exp((\ln_2 N)^{2+\varepsilon}) \sqrt{y} + \frac{N \ln^2 N}{\ln^B N} \ll \frac{N}{\ln^A N}
 \end{aligned}$$

при $Q = \sqrt{N/y} \exp(-(\ln_2 N)^5)$ с любой положительной постоянной A .

В главном члене выражения (6) продлим интервал изменения d от Q/δ до $\sqrt{N}/\delta$ (так как часть главного члена при $d \in [Q/\delta, \sqrt{N}/\delta]$ оценивается так же, как и остаток R_2), поменяем местами суммы по n_2 и d , а затем применим лемму 5. Тогда главный член примет вид

$$\begin{aligned}
 &2 \sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} \sum_{n_1 \leq y} \sum_{\substack{n_2 \leq N/\delta \\ \Omega(n_2) = k - \omega(n_1\delta)}} \left(\prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p+1)} \right) \prod_{p| \frac{abn}{\delta}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{1}{p(p-1)} \right)^{-1} \ln \frac{\sqrt{N}}{\delta} \right. \\
 &\quad \left. + O \left(\sum_{d| \frac{abn}{\delta}} \frac{1 + \ln d}{d} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Остатки, возникающие при использовании леммы 5 с заменой $\ln(\sqrt{N}/\delta)$ на $\ln \sqrt{N}$, оцениваются следующим образом:

$$\ll \sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} \ln \delta \sum_{\substack{n \leq N/\delta \\ \Omega(n_2) = k - \omega(n_1\delta)}} 1 + \sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{n \leq N/\delta \\ \Omega(n_2) = k - \omega(n_1\delta)}} \sum_{d| \frac{abn}{\delta}} \frac{1 + \ln d}{d}.$$

Учитывая, что $k \leq \gamma \ln_2 N$, $\omega(n_1\delta) \leq \omega(n_1) + \omega(\delta)$, используя лемму 4 и лемму 1 при $t = \exp((\ln_2 N)^2)$, получим, что последнее выражение

$$\begin{aligned}
 &\ll \ln_2^2 N \sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} (1 + \ln \delta) \sum_{n_1 \leq y} \sum_{\substack{n_2 \leq N/(\delta n_1) \\ \omega(n_2) = k - \omega(n_1\delta)}} 1 \\
 &\ll \ln_2^2 N \frac{N}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{\delta|a} \frac{\gamma^{\omega(\delta)} (1 + \ln \delta)}{\delta} \sum_{\substack{n_1 \leq y \\ \omega(n_1\delta) \leq k}} \gamma^{\omega(n_1)} n_1^{-1} \\
 &\ll \frac{N}{\ln N (k-1)!} \ln_2^{k-1} N \ln^\varepsilon N.
 \end{aligned}$$

Итак, в обозначениях теоремы 3 и леммы 1 задача свелась к исследованию суммы

$$\sum_{\substack{\delta|a \\ \delta \leq V}} \sum_{\substack{n_1 \leq y \\ \omega(n_1\delta) \leq k}} \prod_{p| \frac{abn_1}{\delta}} \lambda(p) C \ln N \pi \left(\frac{N}{n_1 \delta}, t, k - \omega(n_1\delta) \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln^2 N} \right) \right). \quad (7)$$

Мы воспользовались тем, что произведение $\lambda(p)$ можно производить только по $p \leq t$. Действительно, если $n_2 = A \leq N^\alpha$, то

$$\prod_{\substack{p > t \\ p|A}} \lambda(p) = \exp\left(O\left(\sum_{\substack{p > t \\ p|A}} \frac{p}{p^2 - p + 1}\right)\right) = \exp\left(O\left(\frac{\ln N}{t}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right).$$

Прежде чем воспользоваться леммой 1, сделаем некоторые преобразования. Заметим, что $\ln t \leq (\ln N)^\varepsilon$, $\delta n_1 \leq N^\varepsilon$; поэтому

$$z = \frac{\ln(N/(\delta n_1))}{\ln t} \geq (1 - \varepsilon)(\ln N)^{1-\varepsilon}, \quad \ln z \geq \frac{1}{2} \ln_2 N.$$

Следовательно, учитывая, что $k \leq \gamma \ln_2 N$ и $r = (k - 1 - \omega(n_1 \delta)) / \ln z$, имеем

$$\prod_{p > t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r \left(1 + \frac{r}{p-1}\right) = \exp\left(r \sum_{p > t} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Пусть $\sigma = (k - 1) / \ln_2 N$. Тогда

$$|r - \sigma| \ll (k - 1) \frac{|\ln z - \ln_2 N|}{(\ln_2 N)^2} + \frac{\omega(n_1 \delta)}{\ln_2 N}. \quad (8)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\ln z - \ln_2 N = \ln \frac{z}{\ln N} = \ln \left(1 - \frac{\ln \delta n_1}{\ln N}\right) - \ln_2 t,$$

получаем

$$|r - \sigma| \ll (k - 1) \frac{\ln \delta n_1}{\ln N (\ln_2 N)^2} + (k - 1) \frac{\ln_2 t}{(\ln_2 N)^2} + \frac{\omega(n_1 \delta)}{\ln_2 N} \ll \frac{\ln \delta n_1}{\ln N \ln_2 N} + \frac{\ln_2 t}{\ln_2 N} + \frac{\omega(n_1 \delta)}{\ln_2 N}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(r+1)} - \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} &= \left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right)'_{\theta} (r - \sigma) \ll \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} |r - \sigma| \\ &\ll \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \left(1 + O\left(\frac{\ln \delta n_1}{\ln N} + \frac{\ln_2 t}{\ln_2 N} + \frac{\omega(n_1 \delta)}{\ln_2 N}\right)\right), \quad \theta \in (r+1, \sigma+1). \end{aligned}$$

Положим $T = k - \omega(n_1 \delta) - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} (\ln z)^T (\ln t)^{T/\ln z} &= \left(\ln_2 \frac{N}{\delta n_1}\right)^T \left(1 - \frac{\ln_2 t}{\ln_2 \frac{N}{\delta n_1}}\right)^T (\ln t)^{T \left(\ln_2 \frac{N}{\delta n_1}\right)^{-1}} \left(1 - \ln_2 t / \ln_2 \frac{N}{\delta n_1}\right)^{-1} \\ &= (\ln_2 N)^T \left(1 + O\left(\frac{\ln \delta n_1}{\ln N \ln_2 N}\right)\right)^T \exp\left(T \ln \left(1 - \frac{\ln_2 t}{\ln_2 \frac{N}{\delta n_1}}\right)\right) \\ &\quad + T \ln_2 t \left(1 - \frac{\ln_2 t}{\ln_2 \frac{N}{\delta n_1}}\right)^{-1} \left(\ln_2 \frac{N}{\delta n_1}\right)^{-1} \\ &= (\ln_2 N)^T \left(1 + O\left(\frac{\ln \delta n_1}{\ln N} + \frac{\ln_2^2 t}{\ln_2 N}\right)\right). \end{aligned}$$

Учитывая последнее соотношение, получим

$$\pi\left(\frac{N}{\delta n_1}, t, k - \omega(\delta n_1)\right) = \frac{1}{\Gamma(\sigma + 1)} \frac{N}{\delta n_1 \ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1-\omega(\delta n_1)}}{(k-1-\omega(\delta n_1))!} \\ \times \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r \left(1 + O\left(\frac{\ln n_1 \delta}{\ln N} + \frac{\ln_2^2 t}{\ln_2 N} + \frac{\omega(n_1 \delta)}{\ln_2 N}\right)\right).$$

Прежде чем подставить полученный результат в (7), заметим, что

$$\frac{(\ln_2 N)^{k-1-\omega(n_1 \delta)}}{(k-1-\omega(n_1 \delta))!} = \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(k-1) \cdots (k-\omega(n_1 \delta))}{(\ln N)^{\omega(\delta n_1)}} \\ = \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O\left(\frac{\omega^2(n_1 \delta)}{k}\right)\right) \left(\frac{k}{\ln_2 N}\right)^{\omega(\delta n_1)}.$$

Кроме того, если обозначить $\sigma_1 = \sigma - \omega(n_1 \delta)(\ln_2 N)^{-1}$, то

$$\prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r = \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\sigma_1} \exp(O(|r - \sigma_1| \ln_2 t)).$$

Таким образом, учитывая (8), имеем

$$\prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r = \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\sigma} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\omega(n_1 \delta)/\ln_2 N} \left(1 + O\left(\frac{\ln \delta n_1}{\ln N} + \frac{\ln_2 t}{\ln_2 N}\right)\right).$$

Подставим полученный результат в (7), отбрасывая условие $p \leq t$ в произведении $\lambda(p)$ и, кроме того, условия $\delta \leq V$, $n_1 \leq y$ (можно отбросить, ведь остатки оцениваются как и ранее), $\omega(n_1 \delta) \leq k$ (можно отбросить, так как среди остатков есть $\omega^2(n_1 \delta)k^{-1} \geq 1$ при $\omega(n_1 \delta) \geq k$). Получим, что (7) равно

$$\frac{CN}{\Gamma(\sigma + 1)} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\sigma} \left(1 + O\left(\frac{(\ln_2 t)^2}{\ln_2 N} + \frac{\ln y}{\ln N}\right)\right) \\ \times \sum_{\delta|a} \frac{1}{\delta} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \prod_{p|\frac{abn_1}{\delta}} \lambda(p) \mu^{\omega(n_1 \delta)} \left(1 + O\left(\frac{\ln \delta}{\ln N} + \frac{\omega^2(n_1 \delta)}{k}\right)\right),$$

где

$$\mu = \frac{k}{\ln_2 N} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/\ln_2 N} = \frac{k}{\ln_2 N} \left(1 + O\left(\frac{\ln_2 t}{\ln_2 N}\right)\right). \quad (9)$$

Оценим остаток, возникающий за счет $O(\ln \delta (\ln N)^{-1})$. Так как $\lambda(p) \geq 1/3$ и $\mu \leq 2\gamma$, имеем

$$\sum_{\delta|a} \frac{1}{\delta} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \prod_{p|\frac{abn_1}{\delta}} \lambda(p) \mu^{\omega(n_1 \delta)} \frac{\ln \delta}{\ln N} \\ \leq \frac{1}{\ln N} \sum_{q^r \delta|a} \frac{\ln q^r}{\delta q^r} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \cdot 3 \prod_{p|\frac{abn_1}{\delta}} 2\gamma \lambda(p) \mu^{\omega(n_1 \delta)} \\ \leq \frac{6\gamma}{\ln N} \sum_{q^r|a} \frac{\ln q^r}{q^r} \sum_{\delta|a} \frac{1}{\delta} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \prod_{p|\frac{abn_1}{\delta}} \lambda(p) \mu^{\omega(n_1 \delta)}.$$

Применим лемму 4 и отбросим этот остаток, так как он

$$\begin{aligned} &\ll \frac{CN}{\Gamma(\sigma+1)} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\ln_2^2 N}{\ln N} \sum_{\delta|a} \frac{1}{\delta} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \prod_{p|\frac{abn_1}{\delta}} \lambda(p) \mu^{\omega(n_1\delta)} \\ &\ll \frac{CN}{\ln N} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} (\ln N)^\varepsilon. \end{aligned}$$

Остается оценить остаток с $\omega^2(n_1\delta)/k$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(v) = \sum_{\delta|a} \sum_{n_1} \frac{1}{\delta n_1} \prod_{\delta p|abn_1} \lambda(p) v^{\omega(n_1\delta)}.$$

Преобразуем ее:

$$\Phi(v) = \sum_{\delta|a} \prod_{p|\frac{ab}{\delta}} \lambda(p) v^{\omega(\delta)} \sum_{n_1} \frac{v^{\omega(n_1\delta) - \omega(\delta)}}{n_1} \prod_{\substack{q|\frac{abn_1}{\delta} \\ q \nmid \frac{ab}{\delta}}} \lambda(q).$$

Сумма по n_1 равна

$$\begin{aligned} &\prod_{\substack{p|ab \\ p \leq t}} \left(1 + \frac{\lambda(p)v}{p-1}\right) \prod_{p|b} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \prod_{\substack{p|\delta \\ p \nmid \frac{a}{\delta}}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \\ &\times \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \prod_{\substack{p|\delta \\ p \nmid \frac{a}{\delta}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right)^{-1} \prod_{p|\frac{a}{\delta}} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \\ &= \prod_{\substack{p|ab \\ p \leq t}} \left(1 + \frac{\lambda(p)v}{p-1}\right) \prod_{p|a} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \prod_{p|b} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \\ &\times \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \left(1 + \frac{v}{p-1}\right)^{-1} \prod_{\substack{p|\delta \\ p \nmid \frac{a}{\delta}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Phi(v) = \prod_{\substack{p|ab \\ p \leq t}} \left(1 + \frac{\lambda(p)v}{p-1}\right) \prod_{p|ab} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \lambda(p) \Psi(v),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \sum_{\delta|a} \frac{1}{\delta} v^{\omega(\delta)} \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \frac{1}{\lambda(p)} \prod_{\substack{p|\delta \\ p \nmid \frac{a}{\delta}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p|a} \left(1 + \frac{v}{\lambda(p)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right)^{-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\alpha(a,p)}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v}{p^{\alpha(a,p)}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \frac{1}{\lambda(p)}\right). \end{aligned}$$

Напомним, что $\alpha(a, p)$ – показатель степени, с которой p входит в каноническое разложение a . Далее,

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \prod_{\substack{p \nmid ab \\ p \leq t}} \left(1 + \frac{\lambda(p)v}{p-1}\right) \prod_{p|a} \left(\lambda(p) + \frac{\lambda(p)v}{p-1} + v \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\alpha(a,p)}}\right)\right) \\ &\quad + \frac{v}{p^{\alpha(a,p)}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \prod_{p|b} \left(1 + \frac{v}{p-1}\right) \lambda(p). \end{aligned}$$

Теперь запишем $\Phi(v)$ в следующем виде:

$$\Phi(v) = \prod_{p \leq t} f(p, a, b, v) \prod_{p|ab} g(p, a, b, v),$$

причем при $0 \leq v \leq 2\gamma$ функции $f(p, a, b, v) = f, g(p, a, b, v) = g$ обладают следующими свойствами: $1 \leq f \leq c, 1/3 \leq g \leq c, |f'| + |f''| \ll 1/p, |g'| + |g''| \ll 1/p, c$ – постоянная. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{v}{k} (v\Phi'(v))' &= \frac{1}{k} (v\Phi'(v) + v^2\Phi''(v)) \\ &= \frac{1}{k} \left(v \left(\sum_{p \leq t} \frac{f'}{f} + \sum_{p|ab} \frac{g'}{g} \right) \Phi(v) + v^2 \left(\sum_{p \leq t} \frac{f'}{f} + \sum_{p|ab} \frac{g'}{g} \right)^2 \Phi(v) \right. \\ &\quad \left. + v^2 \left(\sum_{p \leq t} \frac{f''f - (f')^2}{f} + \sum_{p|ab} \frac{g''g - (g')^2}{g} \right) \Phi(v) \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \sum_{\delta|a} \frac{1}{\delta} \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \prod_{p|\frac{abn_1}{\delta}} \lambda(p) \mu^{\omega(n_1\delta)} \frac{\omega^2(n_1\delta)}{k} &= \frac{v}{k} (v\Phi'(v))' \Big|_{v=\mu} \\ &\ll \frac{1}{k} \mu \Phi(\mu) \left(\ln_2 t + \sum_{p|ab} \frac{1}{p} \right) \ll \frac{\ln_2 t}{\ln_2 N} \Phi(\mu). \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь равенством (9) и оценкой $\sum_{p|ab} (1/p) \ll \ln_3 N$. Следовательно, главный член имеет вид

$$\frac{CN}{\Gamma(\sigma+1)} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{(k-1)/\ln_2 N} \Phi(\mu) \left(1 + O\left(\frac{(\ln_2 t)^2}{\ln_2 N}\right)\right).$$

Наша задача – избавиться с нужной точностью от зависимости от t произведения

$$\prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{(k-1)/\ln_2 N} \Phi(\mu).$$

Пусть

$$\mu_0 = \frac{k-1}{\ln_2 N} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/\ln_2 N} = \sigma \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/\ln_2 N}.$$

Воспользуемся первым равенством из (9); получим

$$\Phi(\mu) - \Phi(\mu_0) = \Phi'(\theta)(\mu - \mu_0) = \Phi(\theta) O\left(\frac{\Phi'(\theta)}{\Phi(\theta)} |\mu - \mu_0|\right) \ll \Phi(\theta) \frac{\ln_2 t}{\ln_2 N},$$

где $\mu_0 < \theta < \mu$ и $\Phi(\theta) \leq \Phi(\mu)$, т.е.

$$\Phi(\mu) = \Phi(\mu_0) \left(1 + O\left(\frac{\ln_2 t}{\ln_2 N}\right)\right).$$

Обозначим

$$E_{a,b}(v) = \prod_{p|ab} g(p, a, b, v).$$

Тогда

$$E'_{a,b}(v) \ll \sum_{p|ab} \frac{1}{p} \cdot E_{a,b}(v) \ll \ln_3 N E_{a,b}(v).$$

Следовательно, учитывая, что $|\sigma - \mu_0| \ll \ln_2 t (\ln_2 N)^{-1}$, имеем

$$E_{a,b}(\mu_0) = E_{a,b}(\sigma) \left(1 + O\left(\frac{\ln_3 N \ln_2 t}{\ln_2 N}\right)\right).$$

Рассмотрим произведение при $\sigma = (k-1)/\ln_2 N$:

$$\begin{aligned} & \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 + \sigma \prod_{q \leq t} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1/\ln_2 N} \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \\ &= \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \left(1 + O\left(\frac{\ln_2 t}{\ln_2 N}\right)\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \left(1 + O\left(\frac{\ln_2 t}{\ln_2 N}\right)\right). \end{aligned}$$

Окончательно, учитывая, что $t = \exp((\ln_2 N)^2)$, находим, что главный член (1) равен

$$\frac{CN}{\Gamma(\sigma+1)} \frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) E(a, b, \sigma),$$

где

$$\begin{aligned} E(a, b, \sigma) &= \prod_{p|a} \left(\lambda(p) + \frac{\sigma \lambda(p)}{p-1} + \sigma \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\alpha(a,p)}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p-1}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{p-1}\right) \right) \right) \\ &\times \prod_{p|b} \left(1 + \frac{\sigma}{p-1}\right) \lambda(p) \prod_{p|ab} \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right)^{-1} \left(1 + O\left(\frac{(\ln_3 N)^2}{\ln_2 N}\right)\right). \end{aligned}$$

Это выражение действительно можно считать главным членом, так как

$$\begin{aligned} E(a, b, \sigma) &\geq \prod_{p|ab} \left(1 + \sigma \frac{\lambda(p)}{p-1}\right)^{-1} \prod_{p|a} \left(1 - \frac{p}{p^2 - p + 1}\right) \\ &\geq c + \exp\left(-\sigma \sum_{p|ab} \frac{1}{p}\right) \geq c_1 (\ln_2 N)^{-\sigma - c_2} > c_1 (\ln N)^{-\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$.

Учитывая оценки остатков, полученные выше, приходим к утверждению теоремы 3.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. М. Тимофееву за полезные советы по содержанию работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Titchmarsh E. C. A divisor problem // *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 1930. V. 54. P. 414–429.
- [2] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.
- [3] Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. I // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1963. Т. 27. № 2. С. 439–462.
- [4] Барбан М. Б. Об аналогах проблемы делителей Титчмарша // *Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон.* 1963. Т. 19. С. 5–13.
- [5] Каршнев А. К. Обобщение проблемы делителей Титчмарша // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1969. Т. 13. № 1. С. 69–70.
- [6] Пиядина Ж. В. Аддитивные задачи с почти простыми числами // *Всероссийская школа "Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел". Тезисы докл. Минск, 1989.*
- [7] Fujii A. On some analogues of Titchmarsh divisor problem // *Nagoya Math. J.* 1976. V. 64. P. 149–158.
- [8] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях // *Матем. заметки.* 1994. Т. 55. № 2. С. 144–156.
- [9] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. Проблема Титчмарша с числами, имеющими заданное число простых делителей // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 4. С. 586–603.
- [10] Selberg A. Note on a paper by L. G. Sathe // *J. Indian Math. Soc. (N.S.).* 1954. V. 18. P. 83–87.
- [11] Sathe L. G. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given member of prime factors // *J. Indian Math. Soc. (N.S.).* 1953. V. 17. P. 63–141; 1954. V. 18. P. 27–81.
- [12] Nicolas J.-L. Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers // *Acta Arith.* 1984. V. 44. P. 191–200.
- [13] Hildebrand A., Tenenbaum G. On the number of prime factors of an integer // *Duke Math. J.* 1988. V. 56. P. 471–501.
- [14] Balazard M. Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* 1990. V. 40. № 2. P. 255–270.
- [15] Alladi K. The distribution of $\nu(n)$ in the sieve of Eratosthenes // *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2).* 1982. V. 33. P. 129–148.
- [16] Shiu P. A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions // *J. Reine Angew. Math.* 1980. V. 313. P. 161–170.
- [17] Halberstam H., Richert H.-E. *Sieve Methods.* London–New York: Acad. Press, 1974.
- [18] Виноградов И. М. *Метод тригонометрических сум в теории чисел.* М.: Наука, 1971.
- [19] Прахар И. М. *Распределение простых чисел.* М.: Мир, 1967.