Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чередникова, Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 763–773

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:39:51

УДК 512.541

КОЛЬЦА КВАЗИЭНДОМОРФИЗМОВ СИЛЬНО НЕРАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 3

А. В. Чередникова

В статье получена классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3.

Библиография: 13 названий.

Все рассматриваемые в статье группы являются абелевыми группами без кручения конечного ранга. Через $\mathbb{Q}$ обозначим поле рациональных чисел.

Говорят, что группа G *квазиравна* группе H ($G \doteq H$), если $G \supseteq nH \supseteq mG$ для некоторых ненулевых целых чисел n и m .

Под *квазиразложением* группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i ($i \in I$) делимой оболочки $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G таких, что $G \doteq \bigoplus_{i \in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется *квазислагаемым* группы G .

Группа G называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

Кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G – это минимальная рациональная алгебра, содержащая кольцо $E(G)$ эндоморфизмов группы. Естественно, $\mathcal{E}(G)$ возникает при вложении G в делимую оболочку.

В статье дается классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3.

Напомним необходимые в дальнейшем некоторые определения и факты.

Псевдоцоклем группы G называется сервантная оболочка суммы всех минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп группы G (обозначается через $\text{Soc } G$).

Из [1, лемма 5.3] и артиновости справа кольца квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга следует, что псевдоцокль группы без кручения конечного ранга всегда отличен от нуля.

Кольцо $\mathbf{R}$ называется *локальным* или *вполне примарным*, если оно содержит двусторонний идеал $\mathbf{J}$ такой, что $\mathbf{R}/\mathbf{J}$ является телом. Это означает, что $\mathbf{J}$ – наибольший левый (правый) идеал кольца $\mathbf{R}$, отличный от $\mathbf{R}$. Заметим, что $\mathbf{J}$ совпадает с радикалом Джекобсона кольца $\mathbf{R}$.

В статье используются также следующие обозначения. Пусть G – группа. Тогда $\text{IT}(G)$ и $\text{OT}(G)$ – соответственно внутренний и внешний типы группы G [2]. Если $M \subseteq G$, то $\langle M \rangle_*$ – сервантная подгруппа в G , порожденная множеством M .

Определения, факты и обозначения можно найти в [3], [4].

1. Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3, совпадающих со своими псевдопоколями. Группа называется *неприводимой*, если она не имеет нетривиальных сервантных вполне характеристических подгрупп.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3. $G = \text{Soc } G$ тогда и только тогда, когда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G является алгеброй над $\mathbb{Q}$ размерности 1 или 3. При этом

- 1) $\mathcal{E}(G) \cong \mathbb{Q} \iff G$ содержит вполне характеристическую подгруппу ранга 1;
- 2) $\mathcal{E}(G)$ – поле алгебраических чисел степени 3 $\iff G$ неприводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующей теоремой.

ТЕОРЕМА А [5]. Пусть G – группа без кручения конечного ранга. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathcal{E}(G)$ – тело;
- 2) $G = \text{Soc } G$ и группа G сильно неразложима;
- 3) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) = \text{rank } P$, где P – некоторая (равносильно любая) минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G .

По условию теоремы 1 G является сильно неразложимой и $G = \text{Soc } G$. Это по теореме А равносильно тому, что $\mathcal{E}(G)$ – тело. Делимая оболочка $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G является $\mathcal{E}(G)$ -модулем. Тогда $\mathbb{Q} \otimes G$ можно рассматривать как векторное пространство над телом $\mathcal{E}(G)$. В свою очередь, $\mathcal{E}(G)$ является векторным пространством над $\mathbb{Q}$. При этом $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) < 9$. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes G) = \dim_{\mathcal{E}(G)}(\mathbb{Q} \otimes G) \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G).$$

Пусть $\dim_{\mathcal{E}(G)}(\mathbb{Q} \otimes G) = t$, а $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) = s$. Отсюда $ts = 3$. Следовательно, s принимает значения либо 1, либо 3. Предположим, что $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) = 1$. Это равносильно тому, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbb{Q}$. Отсюда по теореме А $\mathcal{E}(G) \cong \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда G содержит вполне характеристическую подгруппу ранга 1.

Пусть $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) = 3$. Тогда по теореме А это равносильно тому, что группа G содержит минимальную сервантную вполне характеристическую подгруппу ранга 3, т.е. группа G не имеет собственных сервантных вполне характеристических подгрупп. Значит, группа G является неприводимой.

Теперь покажем, что тело размерности 3 над $\mathbb{Q}$ является полем. Рассмотрим центр $\mathbf{Z}(\mathcal{E}(G))$ тела $\mathcal{E}(G)$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbf{Z}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \mathcal{E}(G)$. Ранг алгебры с делением над ее центром всегда является квадратом натурального числа [6]. Отсюда

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G) = \dim_{\mathbf{Z}(\mathcal{E}(G))} \mathcal{E}(G) \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{Z}(\mathcal{E}(G)).$$

Обозначим $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{Z}(\mathcal{E}(G)) = s$, а $\dim_{\mathbf{Z}(\mathcal{E}(G))} \mathcal{E}(G) = k^2$. Следовательно, $sk = 3$. Значит, $k^2 = 1$ и $k = 1$. Получили, что $\mathcal{E}(G) = \mathbf{Z}(\mathcal{E}(G))$ – поле.

Итак, мы доказали, что G неприводима тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(G)$ – поле алгебраических чисел степени 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что теорема 1 верна для сильно неразложимых абелевых групп без кручения произвольного ранга p , где p – простое число.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Каждое поле алгебраических чисел степени 3 над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов сильно неразложимой абелевой группы без кручения ранга 3.

Действительно, пусть $\mathbb{K}$ – поле алгебраических чисел степени 3 над $\mathbb{Q}$. Тогда существует полное подкольцо $\mathbf{A}$ поля алгебраических чисел $\mathbb{K}$ такое, что аддитивная группа A^+ кольца $\mathbf{A}$ является сильно неразложимой [7, теорема 8.4]. Очевидно, что группа A^+ имеет ранг 3. В [8] Р. Пирс доказал, что в этом случае $\mathcal{E}(A^+)$ является изоморфным (как рациональная алгебра) полному матричному кольцу $\mathbf{M}_m(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ – подполе поля $\mathbb{K}$ такое, что $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = m$. Более того, в той же работе доказано, что A^+ сильно неразложима тогда и только тогда, когда $\mathbb{F} = \mathbb{K}$. Следовательно, в нашем случае $\mathcal{E}(A^+) \cong \mathbb{K}$, что и требовалось доказать.

2. Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3, отличных от своих псевдоцоклей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3 и $\text{Soc } G \neq G$. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{Q} \right\}, & \mathbf{A}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{B}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}, 0 \neq k \in \mathbb{Q}, k = \text{const} \right\}, \\ \mathbf{C}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть G – сильно неразложимая группа без кручения ранга 3. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ изоморфно подалгебре полной матричной алгебры $\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$ порядка 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем линейно независимые элементы $x_1, x_2, x_3 \in G$. Положим $R_1 = \langle x_1 \rangle_*$, $R_2 = \langle x_2 \rangle_*$, $R_3 = \langle x_3 \rangle_*$. Обозначим через $i_k: R_k \rightarrow G$ и $\pi_k: G \rightarrow \mathbb{Q} \otimes R_k$ возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции. Тогда $i_1(x_1), i_2(x_2), i_3(x_3)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы G .

Всякий квазиэндоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$ вполне определяется элементами $\varphi i_1(x_1), \varphi i_2(x_2), \varphi i_3(x_3)$, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi i_1(x_1) &= \pi_1 \varphi i_1(x_1) + \pi_2 \varphi i_1(x_1) + \pi_3 \varphi i_1(x_1), \\ \varphi i_2(x_2) &= \pi_1 \varphi i_2(x_2) + \pi_2 \varphi i_2(x_2) + \pi_3 \varphi i_2(x_2), \\ \varphi i_3(x_3) &= \pi_1 \varphi i_3(x_3) + \pi_2 \varphi i_3(x_3) + \pi_3 \varphi i_3(x_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, с каждым элементом $\varphi \in \mathcal{E}(G)$ ассоциируется (3×3) -матрица

$$f: \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1 \varphi i_1 & \pi_1 \varphi i_2 & \pi_1 \varphi i_3 \\ \pi_2 \varphi i_1 & \pi_2 \varphi i_2 & \pi_2 \varphi i_3 \\ \pi_3 \varphi i_1 & \pi_3 \varphi i_2 & \pi_3 \varphi i_3 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, $\varphi_{i1}(x_1), \varphi_{i2}(x_2), \varphi_{i3}(x_3)$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi_{i1}(x_1) &= \alpha_{11}(x_1) + \alpha_{21}(x_2) + \alpha_{31}(x_3), \\ \varphi_{i2}(x_2) &= \alpha_{12}(x_1) + \alpha_{22}(x_2) + \alpha_{32}(x_3), \\ \varphi_{i3}(x_3) &= \alpha_{13}(x_1) + \alpha_{23}(x_2) + \alpha_{33}(x_3),\end{aligned}\tag{2}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Пусть задано отображение

$$g: \begin{pmatrix} \pi_1 \varphi_{i1} & \pi_1 \varphi_{i2} & \pi_1 \varphi_{i3} \\ \pi_2 \varphi_{i1} & \pi_2 \varphi_{i2} & \pi_2 \varphi_{i3} \\ \pi_3 \varphi_{i1} & \pi_3 \varphi_{i2} & \pi_3 \varphi_{i3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда отображение gf будет изоморфизмом $\mathcal{E}(G)$ и подалгебры полной матричной алгебры $\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$ порядка 3 [9].

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. По условию $\text{Soc } G \neq G$. Следовательно, $\text{Soc } G$ может иметь ранга 1 или 2.

Рассмотрим сначала случай, когда $\text{Soc } G$ имеет ранг 2. Пусть линейно независимые элементы x_1 и x_2 группы G принадлежат $\text{Soc } G$. Возьмем элемент $x_3 \in G \setminus \text{Soc } G$. Так как подгруппа $\text{Soc } G$ сервантна в G , элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы и, следовательно, образуют максимальную линейно независимую систему группы G .

Так как из определения псевдопоколя следует, что $\text{Soc } G$ является сервантной вполне характеристической подгруппой группы G , равенства (1) леммы примут вид

$$\begin{aligned}\varphi_{i1}(x_1) &= \pi_1 \varphi_{i1}(x_1) + \pi_2 \varphi_{i1}(x_1), \\ \varphi_{i2}(x_2) &= \pi_1 \varphi_{i2}(x_2) + \pi_2 \varphi_{i2}(x_2), \\ \varphi_{i3}(x_3) &= \pi_1 \varphi_{i3}(x_3) + \pi_2 \varphi_{i3}(x_3) + \pi_3 \varphi_{i3}(x_3).\end{aligned}$$

Тогда равенства (2) леммы примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi_{i1}(x_1) &= \alpha_{11}(x_1) + \alpha_{21}(x_2), \\ \varphi_{i2}(x_2) &= \alpha_{12}(x_1) + \alpha_{22}(x_2), \\ \varphi_{i3}(x_3) &= \alpha_{13}(x_1) + \alpha_{23}(x_2) + \alpha_{33}(x_3).\end{aligned}$$

Отсюда по лемме

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbb{K}.$$

Так как $\mathcal{E}(G)$ является артиновым, радикал Джекобсона $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$ кольца $\mathcal{E}(G)$ нильпотентен [9].

Найдем максимальный нильпотентный идеал $\mathbf{I}$ кольца $\mathbb{K}$. Вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}^n = 0,$$

где n – некоторое натуральное число, если $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$, $\alpha_{21} = 0$ или $\alpha_{12} = 0$.

Предположим, что в кольце $\mathcal{E}(G)$ имеются квазиэндоморфизмы φ и ψ , принадлежащие $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$, причем φ и ψ соответствуют матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с рациональными элементами.

Так как $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$ нильпотентен, он является ниль-идеалом [10]. Следовательно, элемент $\varphi + \psi$ должен быть нильпотентным. Но $\varphi + \psi$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не являющаяся нильпотентной. Получили противоречие.

Таким образом, $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$ является подкольцом кольца, имеющего вид

$$\mathbf{I}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} \quad \text{либо} \quad \mathbf{I}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Допустим $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \mathbf{I}_1$. Следовательно,

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Известно [11], что если группа G сильно неразложима, кольцо $\mathcal{E}(G)$ артиново справа и $\text{rank}(G/\text{Soc } G) < \infty$, то $\mathbf{N}(\mathcal{E}(G)) = \text{Ann}(\text{Soc } G)$, где $\mathbf{N}(\mathcal{E}(G))$ – ниль-радикал кольца $\mathcal{E}(G)$, а $\text{Ann}(\text{Soc } G) = \{\varphi \in E(G) \mid \varphi(x) = 0, x \in \text{Soc } G\}$. Следовательно, $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))(\text{Soc } G) = 0$.

Возьмем произвольный элемент $g \in \text{Soc } G$ и произвольный элемент $\varphi \in \mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \mathbf{I}_1$. Элемент g представим в виде $g = n_1 x_1 + n_2 x_2$, где $n_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $\varphi(g) = \varphi(n_1 x_1 + n_2 x_2) = n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2)$. В нашем случае $\varphi(x_1) = 0$, а $\varphi(x_2) = \alpha_{12} x_1$. Так как $\varphi(g) = 0$, получаем $\alpha_{12} = 0$. Отсюда

$$\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Дж. Рид [1] показал, что если P – некоторая (равносильно любая) минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G , то $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))) = \text{rank } P$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))) \leq 2$, так как $\text{Soc } G$ имеет ранг 2.

Предположим, что $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))) = 2$. Так как $\mathcal{E}(G)$ является локальным кольцом, $\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$ – тело. Однако, тело размерности 2 над $\mathbb{Q}$ является полем.

Так как $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) = \text{Ann}(\text{Soc } G)$, легко видеть, что $G/\text{Soc } G$ является $\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$ -модулем. Поэтому $G/\text{Soc } G$ можно рассматривать как векторное пространство над полем $\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))$. При этом должно выполняться следующее условие:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(G/\text{Soc } G) = \dim_{\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))}(G/\text{Soc } G) \cdot \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))).$$

Но $\dim_{\mathbb{Q}}(G/\text{Soc } G) = 1$, а $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))) = 2$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))) = 1$. Таким образом,

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{R}_3.$$

По условию теоремы $\text{Soc } G \neq G$. Следовательно, $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \neq 0$.

Далее, через $\mathbb{Q}\text{Hom}(A, B)$ будем обозначать группу квазиэндоморфизмов из A в B для абелевых групп A и B без кручения конечного ранга.

Очевидно, что если $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \neq 0$, то $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G) \neq 0$. Предположим, что $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G)$ имеет ранг 1. Выберем элемент x_1 , входящий в максимально независимую систему группы G , такой, что $\pi_1 \varphi i_3(x_3) \neq 0$.

Вычисления показывают, что

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_2.$$

Так как $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \neq 0$, имеем $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_2$.

Если же $\pi_2 \varphi i_3(x_3) \neq 0$, то получаем, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{S}_2.$$

Легко показать, что $\mathbf{A}_2 \cong \mathbf{S}_2$, где изоморфизмом является отображение

$$\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Из ранее доказанного следует, что если $\text{Soc } G$ имеет ранг 2, то $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \leq 2$. Выше мы рассмотрели случай, когда $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) = 1$. Если же $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) = 2$, то $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G)$ имеет ранг 2. Тогда можно выбрать линейно независимые элементы x_1 и x_2 из $\text{Soc } G$ такие, что $\pi_1 \varphi i_3(x_3) \neq 0$ и $\pi_2 \varphi i_3(x_3) \neq 0$. Из вычислений следует

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{R}_3.$$

Итак, мы получили, что если $\text{Soc } G$ имеет ранг 2, то

- а) $\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G)$ имеет ранг 1;
- б) если $\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{R}_3$, то $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G)$ имеет ранг 2.

Теперь рассмотрим случай, когда $\text{Soc } G$ имеет ранг 1.

Пусть $0 \neq x_1 \in \text{Soc } G$. Тогда выберем линейно независимые элементы x_2 и x_3 из $G \setminus \text{Soc } G$. Так как подгруппа $\text{Soc } G$ сервантна в G , то x_1, x_2, x_3 линейно независимы и, следовательно, образуют максимальную линейно независимую систему группы G .

В этом случае равенства (1) леммы примут вид

$$\begin{aligned}\varphi i_1(x_1) &= \pi_1 \varphi i_1(x_1), \\ \varphi i_2(x_2) &= \pi_1 \varphi i_2(x_2) + \pi_2 \varphi i_2(x_2) + \pi_3 \varphi i_2(x_2), \\ \varphi i_3(x_3) &= \pi_1 \varphi i_3(x_3) + \pi_2 \varphi i_3(x_3) + \pi_3 \varphi i_3(x_3).\end{aligned}$$

Отсюда равенства (2) леммы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi i_1(x_1) &= \alpha_{11}(x_1), \\ \varphi i_2(x_2) &= \alpha_{12}(x_1) + \alpha_{22}(x_2) + \alpha_{32}(x_3), \\ \varphi i_3(x_3) &= \alpha_{13}(x_1) + \alpha_{23}(x_2) + \alpha_{33}(x_3).\end{aligned}$$

Тогда по лемме

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{N}.$$

Найдем максимальный нильпотентный идеал кольца $\mathbf{N}$. Вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}^n = 0,$$

где n – некоторое натуральное число, если $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$, $\alpha_{32} = 0$ или $\alpha_{23} = 0$. Аналогично, как и в случае, когда $\text{Soc } G$ имеет ранг 2, получаем следующее:

$$\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{T}_1$$

либо

$$\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{T}_2.$$

Если $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \mathbf{T}_2$, то при некоторой замене базиса можно получить $\mathcal{E}(G)$ такое, что $\mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) \subseteq \mathbf{T}_1$. Проверим, выполняется ли условие

$$\forall \varphi \in \mathbf{J}(\mathcal{E}(G)), \forall g \in \text{Soc } G \quad \varphi(g) = 0. \quad (3)$$

Элемент $g = nx_1$, где $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\varphi(x_1) = 0$, условие (3) выполняется.

Далее, $\text{Soc } G$ имеет ранг 1. Значит, в группе G имеется минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа ранга 1. Поэтому $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}(G)/\mathbf{J}(\mathcal{E}(G))) = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{C}_4.$$

Легко видеть, что $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}(\mathcal{E}(G)) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{C}_4$, где $\mathbf{C}_4$ – некоммутативное кольцо.

Предположим, что $\mathcal{E}(G)$ коммутативно. Пусть

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ 0 & x' & t' \\ 0 & 0 & x' \end{pmatrix}$$

– произвольные элементы из $\mathcal{E}(G)$. Из вычислений следует, что $\mathcal{E}(G)$ коммутативно тогда и только тогда, когда $yt' = y't$. Таким образом, если $\mathcal{E}(G)$ коммутативно, то $t = ky$, где k – некоторое рациональное число. Иными словами, в этом случае

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Q}, k = \text{const} \right\} = \mathbf{B}_3.$$

Если $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{B}_3$, где $k = 0$, то получаем алгебру

$$\mathbf{A}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Легко проверить, что $\mathbf{A}_3 \cong \mathbf{R}_3$, где изоморфизмом является отображение

$$h: \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Итак, мы доказали, что если G является сильно неразложимой группой без кручения ранга 3 и $\text{Soc } G \neq G$, то $\mathcal{E}(G)$ изоморфна одной из следующих алгебр: $\mathbf{A}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{B}_3$ ($k \neq 0$).

Нетрудно показать, что с точностью до изоморфизма не существует подалгебр алгебры $\mathbf{C}_4$, отличных от $\mathbf{A}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{B}_3$ ($k \neq 0$) и имеющих радикал Джекобсона размерности 1, 2, 3. Таким образом, теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть кольцо $\mathbb{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{Q} \right\}, & \mathbf{A}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\}, \\ \mathbf{B}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}, 0 \neq k \in \mathbb{Q}, k = \text{const} \right\}, \\ \mathbf{C}_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда существует сильно неразложимая абелева группа G без кручения ранга 3 такая, что $\text{Soc } G \neq G$ и алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3 такая, что $\text{Soc } G \neq G$ и x_1, x_2, x_3 является максимальной линейно независимой системой группы G , где $x_1, x_2 \in \text{Soc } G$, а $x_3 \notin \text{Soc } G$. В ходе доказательства теоремы 2 было получено, что $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G)$ имеет ранг 1. В свою очередь, $\mathbb{Q}\text{Hom}(\langle x_3 \rangle_*, \text{Soc } G)$ имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух следующих условий:

- а) $t(\langle x_3 \rangle_*) \leq \text{OT}(\text{Soc } G)$ и несравним с $\text{IT}(\text{Soc } G)$, и существует однозначно определенная сервантная подгруппа C ранга 1 группы $\text{Soc } G$ такая, что $t(C) \geq t(\langle x_3 \rangle_*)$;
- б) $\text{IT}(\text{Soc } G) < t(\langle x_3 \rangle_*) < \text{OT}(\text{Soc } G)$ и существует однозначно определенная сервантная подгруппа C ранга 1 группы $\text{Soc } G$ такая, что $t(C) \geq t(\langle x_3 \rangle_*)$, но не существует сервантной подгруппы D ранга 1 группы $\text{Soc } G$ такой, что $t(\text{Soc } G/D) \leq t(\langle x_3 \rangle_*)$ [11, лемма 5.1]. Здесь $t(\cdot)$ обозначает тип группы.

Таким образом, $\mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A}_2$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий а), б).

ПРИМЕР 1. Последовательность (k_p) целых неотрицательных чисел и символов ∞ называется *характеристикой*. Две характеристики *эквивалентны*, если они отличаются не более чем конечным числом конечных элементов. *Класс эквивалентности* характеристики называется *типом* и обозначается через $\sigma[(k_p)]$.

Пусть p – простое число. Обозначим через $\mathbb{Z}(p^k)$, $k = 0, 1, \dots$, кольцо вычетов по модулю p^k и через $\mathbb{Z}(p^\infty)$ кольцо целых p -адических чисел. Для данного типа $\tau = [(m_p)]$ алгебру над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_p \mathbb{Z}(p^{m_p})$ будем называть *кольцом τ -адических чисел*.

Любое τ -адическое число $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$ представляется в виде $\alpha = r \otimes (\alpha_p)$, где $0 \neq r \in \mathbb{Q}$, $\alpha_p \in \mathbb{Z}(p^{m_p})$, p пробегает множество всех простых чисел; p -*высотой* элемента $\alpha_p \in \mathbb{Z}(p^{m_p})$ называется наибольший показатель h_p степени простого числа p , для которого α_p делится на p^{h_p} в кольце $\mathbb{Z}(p^{m_p})$; если $\alpha_p = 0$, то $h_p = m_p$. Набор p -высот (h_p) элементов α_p по всем простым числам p образует характеристику, которая определяет тип $[(h_p)]$, называемый *типом τ -адического числа*.

Рассмотрим следующий тип $\tau = [(6, 6, \dots)]$. Тогда $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q} \otimes \prod_p \mathbb{Z}(p^6)$. Фиксируем τ -адические числа $\alpha = 1 \otimes (p^2)$ и $\beta = (1/k) \otimes (p^4)$, где k – некоторое ненулевое рациональное число. Таким образом, $t(\alpha) = [(2, 2, \dots)]$, $t(\beta) = [(4, 4, \dots)]$. Рассмотрим пространство $\mathcal{U} = \langle 1, \alpha, \beta \rangle$. Имеем $\alpha^2 = k\beta$, $\alpha^3 = 0$, $\beta^2 = 0$, $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$. Любой элемент из $\mathcal{U}$ записывается с рациональными коэффициентами в виде $\gamma = r_0 + r_1\alpha + r_2\beta$. Легко видеть, что τ -адические числа $1, \alpha, \beta$ образуют базис пространства $\mathcal{U}$ и $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U} = 3$. Элемент γ обратим в $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $r_0 \neq 0$. Если $r_0 = 0$, то $\gamma^3 = 0$. Поэтому всякий ненулевой элемент кольца $\mathcal{U}$ или обратим, или нильпотентен, а нетривиальные идемпотенты отсутствуют.

По основной теореме из [12] пространству $\mathcal{U}$ соответствует коредуцированная группа A без кручения ранга 3 (несодержащая циклических прямых слагаемых), которая задается одним τ -адическим соотношением $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$.

Так как $\mathcal{U}$ является подалгеброй алгебры $\mathbb{Q}(\tau)$, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(A)$ группы A совпадает с $\mathcal{U} = \mathcal{U} : \mathcal{U} = \{\varphi \in \mathbb{Q}(\tau) \mid \varphi\mathcal{U} \subset \mathcal{U}\}$. Группа A сильно неразложима, так как в $\mathcal{U}$ отсутствуют нетривиальные идемпотенты.

Найдем представление $\mathcal{E}(A)$ в виде подкольца полной матричной алгебры порядка 3

$\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$. Пусть $\gamma \in \mathcal{E}(A)$, тогда

$$\begin{aligned}\gamma 1 &= r_0 + r_1 \alpha + r_2 \beta, \\ \gamma \alpha &= r_0 \alpha + r_1 \alpha^2 + r_2 \beta \alpha = r_0 \alpha + r_1 k \beta, \\ \gamma \beta &= r_0 \beta + r_1 \alpha \beta + r_2 \beta^2 = r_0 \beta,\end{aligned}$$

где $r_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_0 & 0 \\ r_2 & kr_1 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Известно [11], что

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = T_\gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где f – соответствующий гомоморфизму γ квазиэндоморфизм группы A . Следовательно,

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_0 & 0 \\ r_2 & kr_1 & r_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T_f = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ 0 & r_0 & kr_1 \\ 0 & 0 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}, 0 \neq k \in \mathbb{Q}, k = \text{const} \right\} = \mathbf{B}_3.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим тип $t(\sigma) = [(4, 4, \dots)]$. Тогда $\mathbb{Q}(\sigma) = \mathbb{Q} \otimes \prod_p \mathbb{Z}(p^4)$. Фиксируем σ -адические числа $\alpha = 1 \otimes (p^2)$ и $\beta = 1 \otimes (p^3)$, $t(\alpha) = [(2, 2, \dots)]$, $t(\beta) = [(3, 3, \dots)]$. Рассмотрим пространство $\mathcal{U} = \langle 1, \alpha, \beta \rangle$. Имеем $\alpha^2 = 0$, $\beta^2 = 0$, $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$.

Рассуждая, как в примере 1, получаем, что пространству $\mathcal{U}$ соответствует коредуцированная сильно неразложимая группа B без кручения ранга 3, которая задается одним σ -адическим соотношением $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$.

Найдем представление $\mathcal{E}(B)$ в виде подкольца полной матричной алгебры порядка 3 $\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$. Пусть $\gamma \in \mathcal{E}(B)$. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma 1 &= r_0 + r_1 \alpha + r_2 \beta, \\ \gamma \alpha &= r_0 \alpha + r_1 \alpha^2 + r_2 \beta \alpha = r_0 \alpha, \\ \gamma \beta &= r_0 \beta + r_1 \alpha \beta + r_2 \beta^2 = r_0 \beta,\end{aligned}$$

где $r_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_0 & 0 \\ r_2 & 0 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_0 & 0 \\ r_2 & 0 & r_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где f – соответствующий гомоморфизму γ квазиэндоморфизм группы B . Отсюда

$$T_f = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ 0 & r_0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 \end{pmatrix}.$$

Получили, что

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_3.$$

Пример сильно неразложимой алгебры группы без кручения ранга 3, отличной от своего псевдокольца, с кольцом квазиэндоморфизмов, изоморфным $\mathbf{C}_4$, можно найти в [13, пример 2.5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reid J. D. On the rings of quasi-endomorphism of torsion free Abelian groups // Topics in Abelian Groups, 1963. P. 51–68.
- [2] Warfield R. Homomorphisms and duality for torsion free groups // Math. Z. 1968. V. 107. P. 189–200.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974; Т. 2. М.: Мир, 1977.
- [4] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
- [5] Крылов П. А. Абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 1979. № 11. С. 26–33.
- [6] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
- [7] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free rings // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.
- [8] Pierce R. S. Subrings of simple algebras // Michigan Math. J. 1960. V. 7. P. 241–243.
- [9] Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
- [10] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Матем. сб. 1974. Т. 95. № 10. С. 214–228.
- [11] Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ -адическим соотношением // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 1. С. 83–104.
- [12] Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиизоморфизма. Дисс. ... д. ф.-м. н. МПГУ: М., 1992.
- [13] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. Lecture Notes in Math. V. 931. Berlin: Springer, 1982.

Костромской государственной педагогический университет им. Н. А. Некрасова

Поступило
14.08.96