Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Викторов, О таблице умножения Ито для квантовых стохастических процессов второго порядка, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 785–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:05:03

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ТАБЛИЦЕ УМНОЖЕНИЯ ИТО ДЛЯ КВАНТОВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д. В. Викторов

1. Введение. Рассмотрим открытую квантовую систему, гамильтониан которой зависит от параметра α :

$$H^\alpha = H_0 \otimes I + I \otimes E + H_{\text{int}}^\alpha. \quad (1)$$

В статье изучается предельное поведение системы при $\alpha \rightarrow +0$. Гамильтониан (1) является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \otimes \Gamma^s$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство состояний квантовой системы, Γ^s – симметричное фоковское пространство над $L_2(\mathbb{R})$, I – тождественный оператор, H_0 – гамильтониан изолированной системы, E – гамильтониан окружения:

$$E = \int dx F(x) a^*(x) a(x), \quad F(x) = \overline{F(x)}.$$

Физическими примерами функции $F(x)$ являются $F(x) = |x|$, $F(x) = \sqrt{m^2 + x^2}$. В дальнейшем изложении предполагается, что гамильтониан взаимодействия H_{int}^α имеет вид самосопряженной квадратичной нормальной формы в смысле [1, гл. III, § 6]:

$$H_{\text{int}}^\alpha = \frac{M^*}{2} \otimes a \bar{A}^\alpha a + \frac{M}{2} \otimes a^* A^\alpha a^* + K \otimes a^* C^\alpha a + R^* \otimes \bar{f}^\alpha a + R \otimes a^* f^\alpha. \quad (2)$$

Здесь M, R – замкнутые операторы в $\mathcal{H}$, $K = K^*$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$,

$$a^* A^\alpha a^* \equiv \int dx dy a^*(x) A^\alpha(x, y) a^*(y),$$

$a(x), a^*(x)$ – бозевские операторные обобщенные функции,

$$\begin{aligned} A^\alpha(x, y) &= A(x, \alpha y) + A(\alpha x, y), & A(x, y) &= A(y, x) \in L_2(\mathbb{R}^2), & f^\alpha(x) &= f(\alpha x) \in L_2(\mathbb{R}), \\ C^\alpha(x, y) &= C(\alpha x, \alpha y), & C(x, y) &= \overline{C(y, x)}. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что интеграл

$$\int dx' \overline{C(x', x)} C(x', y)$$

определяет суммируемую с квадратом функцию как по переменной x , так и по y . В дальнейшем знаки “ $\otimes$ ” опускаются там, где это не вызывает путаницы.

Определим (правую) *хронологическую экспоненту* для сильно измеримого семейства ограниченных операторов $K(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, с помощью ряда

$$e_s^{\int_s^t d\tau K(\tau)} \equiv I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t d\tau_0 \cdots \int_s^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} K(\tau_{n-1}) \cdots K(\tau_0), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим семейство унитарных операторов

$$\Upsilon_t^\alpha = e^{i \int_0^t d\tau J_\tau K^\alpha J_\tau^*} = e^{it \mathbf{H}^\alpha} J_t^*, \quad (3)$$

где $K^\alpha = H_0 \otimes I + H_{\text{int}}^\alpha$, $J_t = e^{itE}$. Оператор (3) обладает свойством правой коцикличности:

$$\Upsilon_{0,t}^\alpha \Upsilon_{t,t+s}^\alpha = \Upsilon_{0,t+s}^\alpha \quad (\Upsilon_t^\alpha \equiv \Upsilon_{0,t}^\alpha)$$

и удовлетворяет уравнению

$$d\Upsilon_t^\alpha = \Upsilon_t^\alpha \cdot dM^\alpha(t), \quad \text{где } M^\alpha(T) \equiv i \int_T d\tau J_\tau K^\alpha J_\tau^*, \quad T \equiv [0, t].$$

Из канонических коммутационных соотношений следует, что

$$J_\tau a(x) J_\tau^* = e^{-i\tau F(x)} a(x), \quad J_\tau a^*(x) J_\tau^* = e^{i\tau F(x)} a^*(x).$$

Поэтому мы можем переписать функцию $M^\alpha(T)$ в виде

$$M^\alpha(T) = i \sum_j l_j A_j^\alpha(T),$$

где l_j – операторы в $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} A_0^\alpha(T) &= \text{const} \cdot t, \quad A_1^\alpha(T) = \int dx a(x) \bar{f}^\alpha(x) \int_T d\tau e^{-i\tau F(x)}, \\ A_2^\alpha(T) &= (A_1^\alpha(T))^*, \quad A_3^\alpha(T) = \int dx dy a^*(x) a(y) C^\alpha(x, y) \int_T d\tau e^{i\tau(F(x)-F(y))}, \\ A_4^\alpha(T) &= \frac{1}{2} \int dx dy a(x) a(y) \bar{A}^\alpha(x, y) \int_T d\tau e^{-i\tau(F(x)+F(y))}, \quad A_5^\alpha(T) = (A_4^\alpha(T))^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим $A_k^\alpha(t) = A_k^\alpha(0, t)$. Рассмотрим всюду плотное в Γ^s множество $\mathcal{F}$ финитных векторов, компоненты которых являются конечными линейными комбинациями произведений суммируемых с квадратом функций одной переменной, и обозначим через $T_+(\mathcal{F})$ множество соответствующих состояний. Нетрудно видеть, что операторы (4) образуют алгебру на $\mathcal{F}$, причем среднее

$$\langle A_{i_1}^\alpha(t) \cdots A_{i_n}^\alpha(t) \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho A_{i_1}^\alpha(t) \cdots A_{i_n}^\alpha(t)), \quad \rho \in T_+(\mathcal{F}),$$

есть дифференцируемая функция t порядка $O(t^n)$ при $t \rightarrow +0$. Предельные функции

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f^\alpha(x), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} C^\alpha(x, y), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} A^\alpha(x, y)$$

будут выбраны так, чтобы в упомянутых средних появились δ -функции по времени, в результате чего предельные средние имеют более низкий порядок малости при $t \rightarrow +0$. Предельные семейства операторов

$$A_i(t) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_i^\alpha(t)$$

называются *квантовыми стохастическими процессами* [2]. Как показано в работе, главный член асимптотики средних значений произведений $\langle A_i(t) A_j(t) \rangle_\rho$ при $t \rightarrow +0$ является линейной

комбинацией средних значений самих процессов $\langle A_k(t) \rangle_\rho$. В этом смысле дифференциалы квантовых стохастических процессов удовлетворяют “таблице умножения”

$$d\langle A_i A_j \rangle_\rho \Big|_{+0} = \sum_k c_k \langle dA_k \rangle_\rho \Big|_{+0}. \quad (5)$$

Предельный переход $\alpha \rightarrow 0$ накладывает ограничения на множество, на котором корректно определена алгебра предельных операторов.

Заметим, что приращение функции $\langle A_i(t) A_j(t) \rangle_\rho$ в точке t можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta \langle A_i(t) A_j(t) \rangle_\rho = & \langle (A_i(t + \tau) - A_i(t)) A_j(t) \rangle_\rho + \langle A_i(t) (A_j(t + \tau) - A_j(t)) \rangle_\rho \\ & + \langle (A_i(t + \tau) - A_i(t)) (A_j(t + \tau) - A_j(t)) \rangle_\rho. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу сказанного последнее слагаемое в (6) имеет, вообще говоря, порядок $O(\tau)$ и, таким образом, вносит вклад в соответствующие дифференциальные уравнения.

2. Построение таблицы Ито.

ЛЕММА 1. Пусть функция $F(|x|)$ удовлетворяет на $[0, +\infty)$ следующим условиям:

- 1) $F(x)$ дифференцируема и при $x \rightarrow \infty$ имеет асимптотику $F(x) = c_1 x + c_2 + f(x)$, $f(x) = o(1)$, $c_1 > 0$;
- 2) $F'(x)$ интегрируема на любом конечном интервале, содержащемся в $[R, +\infty)$, где $R \geq 0$ таково, что $F'(x) > 0$ и ограничена на $[R, +\infty)$,

$$\int_R^\infty dx |f'(x)| < \infty.$$

Пусть функция $h(x)$ абсолютно непрерывна на любом конечном интервале в $\mathbb{R}$, $h(x)$, $h'(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $h(0) = 1$.

Тогда имеет место тождество

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int dx e^{i\tau F(|x|)} h(\alpha x) \equiv \frac{2\pi}{c_1} \delta(\tau) + \frac{2i}{c_1} P\left(\frac{1}{\tau}\right) + 2I_1(\tau) - \frac{2}{c_1} I_2(\tau) + \frac{2}{c_1} I_2(\tau), \quad (7)$$

где

$$I_1(\tau) = \int_0^R dx e^{i\tau F(x)}, \quad I_2(\tau) = \int_0^{F(R)} dy e^{i\tau y}, \quad I_2(\tau) = \int_R^\infty dx e^{i\tau F(x)} (c_1 - F'(x))$$

– непрерывные функции на $\mathbb{R}$.

Мы предполагаем далее, что функции A, C, f в (2) по каждому аргументу вместе со своими производными суммируемы с квадратом и абсолютно непрерывны на любом конечном интервале в $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f^\alpha(x) = \frac{c_1}{2\pi}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} C^\alpha(x, y) = \frac{c_1}{2\pi}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} A^\alpha(x, y) = \frac{c_1}{2\pi} (g(x) + g(y)),$$

где $g(x) \in L_1 \cap L_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathcal{F}_1$ есть всюду плотное в Γ^s множество, для которого функции $v(x)$ одной переменной, составляющие мультипликативные компоненты финитных векторов, удовлетворяют условию $xv(x) \in L_1 \cap L_2$.

Главный член асимптотики $\langle A_i(t) A_j(t) \rangle_\rho$, $\rho \in T_+(\mathcal{F}_1)$, при $t \rightarrow +0$ нетрудно найти с помощью тождества (7) и очевидных соотношений

$$\int_0^t d\tau \int_0^t d\tau_1 f(\tau - \tau_1) = \int_0^t d\tau \int_{\tau-t}^\tau d\tau' f(\tau'), \quad P \int_{\tau-t}^\tau \frac{d\tau'}{\tau'} = \ln \frac{\tau}{t-\tau}, \quad (8)$$

где $0 < \tau < t$, а символ “P” означает интегрирование в смысле главного значения. Воспользуемся также следующим фактом: для непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, t]$ функции f

$$\int_0^t d\tau f(\tau) \ln \frac{\tau}{t-\tau} = o(t). \quad (9)$$

При помощи леммы 1 и формул (8), (9) доказывается, что в асимптотику $O(t)$ средних $\langle A_i(t) A_j(t) \rangle_\rho$ вносит вклад только первое слагаемое в тождестве (7). Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Множество $\mathcal{F}_1$ принадлежит области определения алгебры квантовых стохастических процессов

$$A_0(t) = \frac{c_1}{2\pi}t, \quad A_1(t) = \frac{c_1}{2\pi} \int dx a(x) \int_0^t d\tau e^{-i\tau F(|x|)}, \quad A_2(t) = (A_1(t))^*,$$

$$A_{11}(t) = \frac{c_1}{2\pi} \int dx a(x) \overline{g(x)} \int_0^t d\tau e^{-i\tau F(|x|)}, \quad A_{21}(t) = (A_{11}(t))^*,$$

$$A_3(t) = \frac{c_1}{2\pi} \int dx dy a^*(x) a(y) \int_0^t d\tau e^{i\tau(F(|x|) - F(|y|))},$$

$$A_{31}(t) = \frac{c_1}{2\pi} \int dx dy a^*(x) a(y) g(x) \overline{g(y)} \int_0^t d\tau e^{i\tau(F(|x|) - F(|y|))},$$

$$A_4(t) = \frac{c_1}{4\pi} \int dx dy a(x) a(y) (\overline{g(x)} + \overline{g(y)}) \int_0^t d\tau e^{-i\tau(F(|x|) + F(|y|))}, \quad A_5(t) = (A_4(t))^*,$$

где $xg(x) \in L_1 \cap L_2$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $F(|x|)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Стохастические дифференциалы $dA_i(t)$ образуют ассоциативную алгебру в смысле предельных соотношений (5), описываемую таблицей умножения Ито:

	dA_1^*	dA_3	dA_4^*
dA_1	dA_0	dA_1	dA_{11}^*
dA_3	dA_1^*	dA_3	dA_4^*
dA_4	dA_{11}	dA_4	$dA_{31} + \overline{g}g \cdot dA_0$

(10)

Здесь левым сомножителем является процесс в левом столбце, правым – в верхней строке. Все остальные возможные средние $\langle A_i(t)A_j(t) \rangle_\rho$ равны $o(t)$.

Данная теорема, очевидно, справедлива и в случае $F(x) = x$, что соответствует наличию только первого члена в (7).

3. Квантовое стохастическое дифференциальное уравнение. Вернемся к коциклу Υ_t^α (3). Из теоремы 1 [1, гл. III, § 6] и равенства (3) следует, что при $\alpha > 0$ коцикл Υ_t^α определен и унитарен на множестве $\mathcal{F}_1$. Рассмотрим предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Upsilon_t^\alpha$. Пусть $F(x) = x$, а внедиагональный член в H_{int}^α отсутствует: $M = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $h(x), h'(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $h(x)$ абсолютно непрерывна на любом конечном интервале на $\mathbb{R}$, $h(0) = c/(2\pi)$; функция f непрерывна на отрезке $[-t, t]$. Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^t d\tau f(\tau) \int dx e^{i\tau x} h(\alpha x) = \frac{f(0)}{2}.$$

Лемма 2 полезна при вычислении предела при $\alpha \rightarrow 0$ собственного линейного канонического преобразования $\alpha_t^{\alpha'} = \Phi_t^\alpha a + \Psi_t^\alpha a^* + g_t^\alpha$ (см. [1]), соответствующего унитарной группе $e^{it\mathbf{H}^\alpha}$. Этот предел равен

$$\Phi_t = e^{-i\delta\pi t} \cdot e^{-itx}, \quad \Psi_t = 0, \quad g_t(x) = \text{const} \cdot \int_0^t d\tau e^{-i\tau x}, \quad (11)$$

где

$$\pi t(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau e^{-i\tau(x-y)}, \quad \sin \delta = \frac{4K}{4 + K^2}.$$

Согласно теореме 1 [1, гл. II, § 4] это есть собственное линейное каноническое преобразование. Поэтому существуют унитарная группа $\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{it\mathbf{H}^\alpha}$ и предельный унитарный коцикл $\Upsilon_t = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Upsilon_t^\alpha$. Повидимому, аналогичный факт имеет место и в случае $M \neq 0$.

Выделим асимптотику $O(t)$ в операторе Υ_t . В членах соответствующего хронологического ряда присутствуют всевозможные парные средние, аналогичные рассмотренным ранее, с той разницей, что интегрирование по τ -переменным должно теперь проводиться по треугольнику $0 < \tau_1 < \tau_0$, $0 < \tau_0 < \tau$, который заменой $\tau_0 \mapsto \tau'_0 = \tau_0$, $\tau_1 \mapsto \tau'_1 = \tau_0 - \tau_1$ переводится сам в себя (ср. с (8)). Поэтому при использовании таблицы (10) результат нужно на каждом шаге умножать на $1/2$ (с учетом леммы 2).

ТЕОРЕМА 2. *Предельный коцикл Υ_t удовлетворяет квантовому стохастическому дифференциальному уравнению*

$$d\Upsilon_t = \Upsilon_t dM(t), \quad dM(t) = i \sum_j L_j dA_j(t), \quad (12)$$

где $dA_j(t)$ – квантовые стохастические процессы теоремы 1, а L_j – функции операторов K, R, M, H_0 , имеющие вид

$$\begin{aligned} L_0 &= 2\pi H_0 \otimes I + iR^* \frac{1}{2 - iK} R + i\bar{g}g \cdot M^* \frac{1}{2 - iK} M, \\ L_1 &= R^* \frac{2}{2 - iK}, \quad L_2 = \frac{2}{2 - iK} R, \quad L_{11} = iM^* \frac{1}{2 - iK} R, \quad L_{21} = iR^* \frac{1}{2 - iK} M, \\ L_3 &= \frac{2K}{2 - iK}, \quad L_{31} = iM^* \frac{1}{2 - iK} M, \quad L_4 = M^* \frac{2}{2 - iK}, \quad L_5 = \frac{2}{2 - iK} M. \end{aligned} \quad (13)$$

Суммы геометрических прогрессий в (11), (13) взяты в предположении $\|K\| < 2$. Это ограничение можно снять (см., например, [3]).

Из необходимых условий унитарности решения КСДУ (12): $d(\Upsilon_t \Upsilon_t^*) \equiv 0$, $d(\Upsilon_t^* \Upsilon_t) \equiv 0$, по правилам умножения Ито получаем уравнения на коэффициенты L_j :

$$\begin{aligned} L_0 - L_0^* - iL_1 L_1^* - i\bar{g}g \cdot L_4 L_4^* &= 0, & L_3 - L_3^* - iL_3 L_3^* &= 0, \\ L_0 - L_0^* - iL_2^* L_2 - i\bar{g}g \cdot L_5^* L_5 &= 0, & L_3 - L_3^* - iL_3^* L_3 &= 0, \\ L_1 - L_2^* - iL_1 L_3^* &= 0, & L_{31} - L_{31}^* - iL_4 L_4^* &= 0, \\ L_1 - L_2^* - iL_2^* L_3 &= 0, & L_{31} - L_{31}^* - iL_5^* L_5 &= 0, \\ L_{11} - L_{21}^* - iL_4 L_1^* &= 0, & L_4 - L_5^* - iL_4 L_3^* &= 0, \\ L_{11} - L_{21}^* - iL_5^* L_2 &= 0, & L_4 - L_5^* - iL_5^* L_3 &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты (13) удовлетворяют данным условиям. Коэффициенты L_0 (при $M = 0$), L_1, L_2, L_3 были вычислены в [3] (см. также [4], [5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
2. Hudson R. L., Parthasarathy K. R. // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. №3. P. 301–323.
3. Чеботарев А. М. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №5. С. 726–750.
4. Чеботарев А. М. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №4. С. 612–622.
5. Chebotarev A. M., Victorov D. V. Quantum stochastic processes arising from the strong resolvent limits of the Schrödinger evolution in Fock space // Banach Center Publ. Warsaw.: Polish Acad. Sci., 1998 (to appear).