Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Кобаненко, О продолжении обобщенно-липшицевых отображений, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 789–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:49:36

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОБОБЩЕННО-ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

К. Н. Кобаненко

Пусть X – локально выпуклое топологическое пространство с гауссовой мерой μ , E – воспроизводящее ядро меры μ , Y – банахово пространство с нормой $|\cdot|$, а $f: X \rightarrow Y$ – измеримое отображение.

Согласно полученному в [1] результату (являющемуся, в частности, обобщением известной теоремы Ферника [2]) включение $\exp(c|f|) \in L^1(\mu)$ для достаточно малых $c > 0$ вытекает из следующего свойства f :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \lambda \|h\|_E \quad \forall h \in E. \quad (1)$$

В связи с этим появилось несколько интересных задач, одной из которых является задача о продолжении измеримого отображения, заданного на измеримом подмножестве в X и обладающего на нем свойством (1), на все пространство X с сохранением измеримости и этого свойства с той же константой. Следует отметить, что большое количество работ было посвящено изучению более специальной задачи продолжения липшицева (или гёльдерова) отображения f , заданного на подмножестве A нормированного (или даже метрического) пространства X и принимающего значения в нормированном пространстве Y . Один из первых результатов в этом направлении получен Макшейном в [3], где доказано, что всякая числовая липшицева функция f на произвольном подмножестве метрического пространства X продолжается с сохранением константы Липшица на все пространство (соответствующее продолжение задается простой явной формулой). Для многомерных отображений положение более сложное. Например, возможны ситуации (см. [4]–[6]), когда X и Y – банаховы пространства, но некоторое отображение $f: A \rightarrow Y$ вообще не имеет липшицевых продолжений (даже и без ограничений на константу Липшица). Для некоторых пар пространств X и Y продолжение существует всегда, причем без увеличения константы Липшица, а для некоторых пар пространств продолжение хотя и всегда возможно, но не всегда существует с прежней константой Липшица (см. [4], [5]). Один из наиболее известных положительных результатов – теорема из [7], согласно которой всякое липшицево отображение f , заданное на подмножестве гильбертова пространства X и принимающее значения также в гильбертовом пространстве Y , имеет липшицево с той же константой продолжение на все X . Однако, в отличие от скалярных функций такое продолжение не описывается явной формулой, а лишь выводится из одного свойства пересечений выпуклых тел. Приводимый ниже результат представляет собой обобщение упомянутой теоремы Макшейна для описанной выше ситуации. По-видимому, справедлив и соответствующий аналог теоремы [7] для бесконечномерных отображений, хотя автору не удалось это показать даже для отображений в $\mathbb{R}^2$ (для рассмотрения бесконечномерного случая достаточно было бы доказать возможность осуществлять E -липшицевы продолжения без увеличения константы Липшица для отображений в $\mathbb{R}^n$).

Напомним, что образы полных сепарабельных метрических пространств при непрерывных отображениях в хаусдорфовы пространства называются *суслинскими пространствами* (см. [8]). Известно, что таковы и непрерывные образы борелевских множеств в полных сепарабельных метрических пространствах. Большинство локально выпуклых пространств, встречающихся в приложениях, являются суслинскими (хотя при этом они могут и не быть метризуемыми, как, например, пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и сепарабельные банаховы пространства со слабой топологией).

Через $\mathcal{E}(T)$ обозначим σ -алгебру, порожденную суслинскими подмножествами топологического пространства T .

ТЕОРЕМА. Пусть X – суслинское топологическое векторное пространство (например, сепарабельное пространство Фреше), $E \subset X$ – линейное подпространство, наделенное нормой $\|\cdot\|_E$ такой, что шар $U = \{h \in E : \|h\|_E \leq 1\}$ – суслинское множество в X , $A \subset X$ – некоторое суслинское множество, а $f: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция, которая обладает следующими свойствами:

- а) множества $\{x \in A : f(x) > c\}$ – суслинские,
- б) для всех $h \in E$ и $x \in A$ таких, что $x + h \in A$, справедливо неравенство

$$|f(x + h) - f(x)| \leq \lambda \|h\|_E.$$

Тогда функцию f можно продолжить до функции $F: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, обладающей свойством а) (в частности, универсально измеримой) и удовлетворяющей неравенству (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция, задаваемая формулой

$$F(x) = \begin{cases} \sup_{y \in A_x} f(y) - \lambda \|x - y\|_E, & \text{если } A_x \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } A_x = \emptyset, \end{cases}$$

где $A_x = (x + E) \cap A$, обладает свойством (1) и при $x \in A$ совпадает с $f(x)$. Необходимо доказать только, что множества $\{x : F(x) > c\}$ – суслинские (откуда вытекает, что функция F измерима

относительно $\mathcal{E}(X)$. Отметим, что приведенная формула является непосредственным обобщением формулы Макшейна [3]. Ясно, что в определении F при взятии супремума можно заменить A_x на A . Таким образом, $F(x) = 0$, если x не входит в множество $X_0 = A + E$, являющееся суслинским, как образ суслинского множества $A \times E$ в $X \times X$ при непрерывном отображении $(x, y) \mapsto x + y$ (отметим, что из того, что единичный шар из E – суслинское множество в X , вытекает, что таковы же и все шары из E , а также и само E).

Пусть $Z = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ – двухточечная компактификация $\mathbb{R}^1$. Продолжим $\|\cdot\|_E$ на X , положив $\|x\|_E = +\infty$ при $x \notin E$. Определим отображение $\|x - y\| : X \times X \rightarrow Z$ следующей формулой:

$$\|x - y\| = \begin{cases} \|x - y\|_E, & \text{если } x - y \in E, \\ +\infty, & \text{если } x - y \notin E. \end{cases}$$

Для всякого числа r множество $\{x \in X : \|x\|_E \leq r\}$ – суслинское, поскольку оно совпадает с шаром радиуса r в E . В силу непрерывности отображения $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x - y$, множество $\{(x, y) \in X \times Y : \|x - y\|_E \leq r\}$ суслинское для всякого числа r . Значит, для всех $c \in \mathbb{R}^1$ суслинским является и множество $\{(x, y) \in X_0 \times A : f(y) - c\|x - y\|_E > 0\}$, являющееся объединением по всем рациональным r суслинских множеств

$$\{(x, y) \in X_0 \times A : f(y) > r\} \cap \{(x, y) \in X_0 \times A : r > c\|x - y\|_E\}.$$

Положим $G(x, y) = f(y) - \lambda\|x - y\|_E$. Очевидно, что

$$\{x \in X_0 : F(x) > c\} = p(\{(x, y) \in X_0 \times A : G(x, y) > c\}),$$

где $p : X \times X \rightarrow X$ – естественная проекция на первый сомножитель. Таким образом, множество $\{x \in X_0 : F(x) > c\}$ суслинское. Теорема доказана.

Ситуация в случае, когда Y – гильбертово пространство, оказывается более сложной, так как не удается конструктивно построить искомое отображение, как это получилось в доказанной теореме. Например, естественная идея брать в качестве $F(x)$ точку из $\bigcap_{x \in A} B(f(y), c\|x - y\|_E)$, ближайшую к 0, как легко показать, не приводит к цели.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как явствует из доказательства теоремы, аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда X – суслинское пространство (не обязательно линейное), $A \subset X$ – суслинское подмножество X , причем на X задана такая квази-метрика $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, что множества $\{(x, y) \in X \times Y : \rho(x, y) \leq r\}$ суслинские, а функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ ρ -липшицева, т.е. $|f(x) - f(y)| \leq \lambda\rho(x, y)$ для всех $x, y \in A$ (при этом неравенство считается верным, если $\rho(x, y) = +\infty$).

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, если вместо классических суслинских множеств рассматривать абстрактные классы, полученные с помощью A -операции из каких-либо заранее заданных классов множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показано в [9], для всякой меры Радона μ на X , квазиинвариантной по направлениям из E , и всякого борелевского отображения F из X в E , которое липшицево вдоль E , μ -почти всюду существует производная Гато вдоль E . Это, с одной стороны, означает, что исходное отображение в теореме выше в определенном смысле обладает свойством дифференцируемости, а, с другой стороны, естественно приводит к вопросу о возможном распространении этой теоремы на бесконечномерные отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В недавней статье [10] получено близкое (но более слабое утверждение): если f – функция, измеримая относительно гауссовской меры μ на сепарабельном банаховом пространстве X , заданная на μ -измеримом множестве A и удовлетворяющая на нем условию Липшица вдоль пространства Камерона–Мартина E , то существует μ -измеримая функция на всем X , удовлетворяющая тому же условию и совпадающая с f μ -почти всюду. Это утверждение вытекает из доказанной выше теоремы, поскольку f имеет борелевскую модификацию, удовлетворяющую тому же условию на борелевском множестве $B \subset A$ с $\mu(B) = \mu(A)$. Из доказанной теоремы вытекает, что то же самое верно и в случае, когда X – локально выпуклое пространство с радоновской гауссовской мерой μ (в этом случае согласно [11] мера μ сосредоточена на суслинском линейном подпространстве).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cirel'son B. S., Ibragimov I. A., Sudakov V. N. // *Lecture Notes in Math.* 1976. V. 550. P. 20–41. 2. Fernique X. // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.* 1970. V. 270. P. 1698–1699. 3. McShane E. J. // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1934. V. 40. P. 837–842. 4. Wells J. H., Williams L. R. *Embeddings and Extensions in Analysis*. Berlin: Springer, 1975. 5. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли. М.: Мир, 1968. 6. Царьков И. Г. // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54. № 3. С. 123–140. 7. Valentine F. // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943. V. 49. P. 100–108. 8. Федерер Г. *Геометрическая теория меры*. М.: Наука, 1987. 9. Bogachev V., Mayer-Wolf E. // *Potential Anal.* 1973. V. 5. № 1. P. 23–30. 10. Ustunel A. S., Zakai M. *Extension of Lipschitz Functions on Wiener Space*. Preprint, 1995. 11. Цирельсон Б. С. // *Записки научн. семин. ЛОМИ.* 1977. V. 55. P. 35–63; Дополнение // *Записки научн. семин. ЛОМИ.* 1977. V. 72. P. 202–211.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

21.11.96

Исправленный вариант

20.01.98