Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Шейпак, Нетривиальные фракталы на плоскости и линейные операторы с совместным спектральным радиусом 1, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:58:06

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ФРАКТАЛЫ НА ПЛОСКОСТИ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С СОВМЕСТНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ РАДИУСОМ 1

И. А. Шейпак

Введение. Нетривиальным фракталом в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы будем называть компактное множество в $\mathbb{R}^n$, у которого хаусдорфова размерность $D_H \in (n-1, n]$ [1].

Совместным спектральным радиусом операторов $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$ согласно работе [2] называется число

$$\widehat{r}(A_1, \dots, A_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(m)}\|^{1/m},$$

где максимум берется по всевозможным функциям $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $L(X)$ обозначает пространство линейных непрерывных операторов в линейном метрическом пространстве X .

Отметим, что понятие совместного спектрального радиуса впервые появилось в работе [3]. В [2] были изучены свойства инвариантных тел операторов $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$ и был дан алгоритм поиска совместного спектрального радиуса этих операторов. Рассмотренные примеры инвариантных множеств на плоскости имеют размерность (как топологическую, так и хаусдорфову) или 0 или 1. Целью настоящей заметки является построение класса операторов, инвариантные множества которых имеют дробную хаусдорфову размерность.

1. Инвариантные множества сжимающих отображений. Рассмотрим линейное полное метрическое пространство X с метрикой d . Для отображения $F: X \rightarrow X$ определим его липшицеву константу

$$\text{Lip } F = \sup_{x \neq y} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)}.$$

Отображение F липшицево, если $\text{Lip } F < \infty$, и сжимающее, если $\text{Lip } F < 1$.

Введем в X конечный набор сжимающих отображений $W = \{S_1, \dots, S_N\}$. Для произвольного $A \in X$ положим $\mathcal{S}(A) = \bigcup_{i=1}^N S_i(A)$. Под $S_i(A)$ понимается множество $S_i(A) = \{S_i(x) \mid x \in A\}$. Положим $W^0(A) = A$, $W^1(A) = W(A)$, $W^p(A) = W(W^{p-1})$ при $p \geq 2$. Согласно [4] дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. A инвариантно по отношению к W , если $A = W(A)$.

В работе [4] доказано следующее свойство сжимающих отображений в полном метрическом пространстве.

ТЕОРЕМА 1. 1) Существует единственное замкнутое ограниченное множество K , инвариантное по отношению к W . (Это множество K называют аттрактором системы сжимающих отображений W .) При этом $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$.

2) Если A – непустое ограниченное множество, то $W^p(A) \rightarrow K$ в метрике Хаусдорфа.

Метрика Хаусдорфа вводится на классе $\mathcal{B}$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства X следующим образом:

$$d(A, B) = \sup\{d(a, B), d(b, A) : a \in A, b \in B\},$$

где $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01292 и № 96-15-96091.

Эта теорема позволяет находить сжимающие отображения для уже данных фрактальных объектов в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Например, легко видеть, что канторово множество на отрезке $[0, 1]$ является инвариантным относительно следующей системы аффинных преобразований $W = \{S_1, S_2\}$, где $S_1(x) = x/3$, $S_2(x) = x/3 + 2/3$. Треугольник Серпинского, вершины которого имеют координаты $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, является аттрактором системы из трех аффинных преобразований $W = \{S_1, S_2, S_3\}$, где

$$S_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad S_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Основываясь на принципах, изложенных в [4], в серии работ [5]–[7] построен алгоритм, позволяющий или легко конструировать фракталы, или по заданному фракталу найти аффинные преобразования, относительно которых данный фрактал инвариантен. Дальнейшее развитие этих алгоритмов нашло широкое применение в теории сжатия компьютерных изображений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как отображения сжимающие, в качестве начальной точки можно брать произвольную точку.

Легко видеть, что рассмотренные преобразования являются преобразованиями подобия, которые разлагаются в композицию растяжения (сжатия), поворота и сдвига. Рассмотрим только комбинацию гомотетии и поворота. Каждое аффинное отображение представимо в виде $S = \hat{S} + a$, где S — линейная часть, а a — вектор сдвига. Очевидно, что в каждом из предложенных примеров семейство операторов $\{\hat{S}_i\}_{i=1}^N$ имеет совместный спектральный радиус, строго меньший 1. Для множества Кантора $\hat{r} = 1/3$, для треугольника Серпинского $\hat{r} = 0.5$. В дальнейшем мы будем рассматривать только аффинные преобразования.

2. Инвариантные множества семейства операторов с совместным спектральным радиусом, равным 1. Для полноты изложения нам понадобятся понятия и результаты работы [2]. Пусть дан набор линейных операторов $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Через $\mu(x)$ обозначим орбиту точки x под действием всевозможных композиций операторов $A_1, \dots, A_k$, т.е.

$$\mu(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : y = A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_m}(x), \alpha_i \in \{1, \dots, k\}, i = 1, \dots, m\}.$$

Обозначим через $\mu'(x)$ множество предельных точек $\mu(x)$:

$$\mu'(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots : \|A_{\alpha_{m_1}} \cdots A_{\alpha_{m_i}}(x) - y\| \rightarrow 0, i \rightarrow \infty, \\ \alpha_{m_j} \in \{1, \dots, k\}, j = 1, \dots, i\}.$$

Рассмотрим $\overline{M(x)}$ — замыкание выпуклой оболочки множества $\mu'(x)$, т.е. $\overline{M(x)} = \overline{\text{Conv}(\mu'(x))}$, и оператор $\overline{A}$ на множестве выпуклых тел (т.е. выпуклых компактов с непустой внутренностью), действующий по правилу

$$\overline{A}M = \text{Conv}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i M\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Инвариантным множеством или инвариантным телом операторов $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$ называется выпуклое тело M такое, что $\overline{A}M = \lambda M$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [2]. *Если операторы $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$ не имеют общего инвариантного подпространства (в работе [2] такие операторы называются операторами общего положения) и таковы, что $\hat{r}(A_1, \dots, A_k) = 1$ и $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то*

- 1) $\mu(x)$ — ограниченное множество;
- 2) $\mu'(x)$ содержит хотя бы один ненулевой элемент;
- 3) $\dim M(x) = n$;
- 4) $\overline{A}M(x) = M(x)$;
- 5) $\mu'(x) = \bigcup_{i=1}^k A_i(\mu'(x))$.

3. Примеры. В [2] приведено много примеров инвариантных выпуклых тел $M(x)$. В силу 5) теоремы 2 (ср. с 1) теоремы 1) множество $\mu'(x)$ тоже можно считать инвариантным множеством семейства операторов $A_1, \dots, A_k \in L(\mathbb{R}^n)$ с совместным спектральным радиусом, равным 1, но только в смысле определения 1, а не определения 2.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим поворот в $\mathbb{R}^2$ на угол α . Если $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$, то $\mu'(x)$ будет окружностью независимо от начальной точки (x_0, y_0) . Хаусдорфова размерность в этом случае равна 1. Если брать два оператора, осуществляющих повороты в $\mathbb{R}^2$, и один из поворотов не сравним рационально с π , то множество $\mu'(x)$ будет тем же самым.

ПРИМЕР 2. Если $\alpha/\pi = p/q$, где p/q – несократимая дробь, то $\mu'(x)$ представляет собой вершины правильного n -угольника, $n = 2q$ при нечетных p и $n = q$ при четных p . Хаусдорфова размерность этого множества равна 0.

4. Инвариантные множества с дробной размерностью. Займемся теперь конструкцией совокупности линейных операторов, имеющих совместный единичный спектральный радиус, но инвариантное множество которых может иметь любую хаусдорфову размерность из промежутка $[0, 2]$.

При проективном преобразовании вектору (x, y) в $\mathbb{R}^2$ соответствует вектор $(x, y, 1)$. Соответственно аффинному преобразованию в $\mathbb{R}^2$

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

отвечает линейное преобразование в $\mathbb{R}^3$:

$$A(x, y, 1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, набору аффинных сжимающих отображений $A_1, \dots, A_k$ в $\mathbb{R}^2$, где

$$A_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix},$$

соответствует набор линейных операторов в $\mathbb{R}^3$ с совместным спектральным радиусом, равным 1. Очевидно, что эту схему легко продолжить на пару сжимающих аффинных преобразований в $\mathbb{R}^n$ – линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$ с совместным спектральным радиусом $\hat{r} = 1$. Но в этом случае все операторы имеют общее инвариантное одномерное подпространство; поэтому инвариантное множество $\mu'(x)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$. На основании вышесказанного справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Если линейные операторы с матрицами

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & e_i \\ c_i & d_i & d_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

таковы, что

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$$

порождают сжимающее отображение в $\mathbb{R}^2$, то

- 1) существует единственное множество μ' , являющееся инвариантным множеством семейства операторов A_i , $i = 1, \dots, n$, а именно, $\mu' = \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i(\mu')$; это множество не зависит от начальной точки x и принадлежит плоскости, определяемой условием $z = 1$;
- 2) для любого ограниченного непустого множества $M \subset W^P(M) \rightarrow \mu'$ в метрике Хаусдорфа.

Приведем пример набора двух операторов, позволяющий конструировать инвариантные множества с любой дробной размерностью:

$$A_1(x, y, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi & 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(x, y, 1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Хаусдорфова размерность множества μ' определяется по формуле

$$\dim_H \mu' = \frac{\ln 2}{\ln 2 \cos \varphi}.$$

При $\varphi = 0$ инвариантное множество представляет собой отрезок $[0, 1]$ (размерность равна 1). При $\varphi \geq \pi/4$ имеем $\dim_H \mu'(x) = 2$. Примеры множеств при $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 2\pi/9$ и $\varphi = \pi/4$ приведены на рис. 1, 2 и 3 соответственно.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Обобщая теорему 3 на случай операторов, действующих в $\mathbb{R}^{n+1}$ и имеющих вид

$$A_i = \begin{pmatrix} S_i & E_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где E_i есть n -мерный вектор, а S_i является $(n \times n)$ -матрицей, надо потребовать, чтобы S_i задавала сжимающее отображение в $\mathbb{R}^n$. Множество μ' в этом случае будет принадлежать n -мерной гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$. Также можно сконструировать множество с любой хаусдорфовой размерностью из промежутка $[0, n+1]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B. Fractals, Form, Chance, and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977.
2. Протасов В. Ю. // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 1. С. 205–231.
3. Rota G. C., Strang G. // Indag. Math. 1960. V. 63. P. 379–381.
4. Hutchinson J. E. // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. P. 713–747.
5. Barnsley M. F., Demko S. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 399. P. 243–275.
6. Barnsley M. F., Sloan A. D. // Byte Mag. 1988. P. 215–223.
7. Barnsley M. F. Fractals Everywhere. London: Acad. Press, 1988.