Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Айрапетян, О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 643–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:53:21

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ГРАНИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С ВЕСОМ

Г. М. Айрапетян

Исследуется задача Дирихле в полуплоскости в весовых пространствах, когда весовая функция имеет единственную особенность в бесконечно удаленной точке.

Библиография: 13 названий.

1. Пусть B_1 – класс гармонических функций $u(z)$ в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$ неравенству

$$|u(z)| < C \exp |z|^\gamma, \quad \gamma < 1, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0, \quad (1)$$

где C – постоянная, не зависящая от $x = \operatorname{Re} z$, но зависящая, вообще говоря, от y_0 . В работе рассматривается задача Дирихле в классе B_1 в следующей постановке: определить действительную гармоническую функцию $u(x, y) \in B_1$ так, чтобы имело место граничное условие

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad (2)$$

где $\rho(x)$ – измеримая неотрицательная функция на действительной оси такая, что $\rho(x) \in L^\infty(-A, A)$, $\rho^{-1}(x) \in L^\infty(-A, A)$ для любого $A > 0$.

Число

$$\alpha = \sup \{ \beta : \rho(x)(1 + |x|)^\beta \in L^\infty(-\infty, +\infty) \} < \infty \quad (3)$$

будем называть *порядком особенности* $\rho(x)$ в бесконечно удаленной точке. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 \leq \alpha < \infty$.

Граничные задачи в классах аналитических функций и тесно связанная с ними теория сингулярных интегралов в весовых пространствах $L^p(d\mu)$ ($d\mu = \rho(x) dx + d\mu_s$, где $d\mu_s$ – сингулярная часть) исследованы в многочисленных работах (см. [1]–[8]). Было установлено, что для ограниченности сингулярного оператора в пространствах $L^p(d\mu)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера $d\mu$ была абсолютно непрерывной и $\rho(x)$ удовлетворяла условию Макенхаупта (см. [6]). Отметим, что если мера удовлетворяет этому условию, то функция f из класса $L^p(d\mu)$ является также абсолютно интегрируемой по мере Лебега, т.е. принадлежит классу L^1 . Однако граничные задачи в классах аналитических функций и, в частности, задача Дирихле, когда граничные условия понимаются в смысле средней сходимости $L^p(d\mu)$ (см. [9]–[12]), допускают такое же полное исследование в весовых пространствах при нарушении условия Макенхаупта. Задача Дирихле в единичном круге, когда весовая функция имеет конечное число особенностей

конечного порядка, исследована в [9]. Там же описаны весовые функции, обеспечивающие разрешимость этой задачи для любой функции $f \in L^p(\rho(x) dx)$. Задача Дирихле для RO -меняющейся (определение см. ниже) в особых точках весовой функции исследована в [10]. Задача (2) в полуплоскости в случае степенной весовой функции (вида $O(|x - x_0|^\alpha)$, где α – неотрицательное целое число) была исследована в [11].

В настоящей работе задача (2) исследуется в предположении, что $\rho(x)$ RO -меняющаяся в бесконечно удаленной точке.

Функцию $g(x)$, определенную в (A_0, ∞) , будем называть RO -меняющейся в бесконечно удаленной точке слева [13], если ее можно представить в виде

$$g(x) = \exp\left(g_1(x) + \int_{A_1}^x \frac{g_2(t)}{t} dt\right), \quad x \in (A_0, \infty), \quad (4)$$

где $A_1 > A_0$, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – измеримые и ограниченные функции на (A_0, ∞) . Аналогично определяется класс функций RO -меняющихся в бесконечно удаленной точке справа. Если функция в бесконечно удаленной точке является RO -меняющейся слева и RO -меняющейся справа, то скажем, что функция RO -меняющаяся в бесконечно удаленной точке. Функцию $\rho(x)$ отнесем к классу R , если функция

$$\rho_1(x) = (1 + |x|)^\alpha \rho(x) \quad (5)$$

RO -меняющаяся в бесконечно удаленной точке, причем функция $g_2(x)$ из представления (4) удовлетворяет соотношениям

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} g_2(x) < 1 - \{\alpha\}, \quad \underline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} g_2(x) > -\{\alpha\}, \quad (6)$$

если α – нецелое число, и

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} g_2(x) \leq 0, \quad \underline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} g_2(x) > -1, \quad (7)$$

если α – целое число.

2. ЛЕММА 1. Пусть $k > 0$ – целое число. Тогда

$$|(x + iy)^k - (x - iy)^k| < Cy(y^{k-1} + |x|^{k-1}). \quad (8)$$

Если $|x| > 2ky$, то

$$|(x + iy)^k - (x - iy)^k| > C_1 y |x|^{k-1}, \quad (9)$$

где $C, C_1 > 0$ – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|x| > y$. Тогда $|x + iy| < 2|x|$, $|x - iy| < 2|x|$ и

$$|(x + iy)^k - (x - iy)^k| < 2y \sum_{j=0}^{k-1} |x + iy|^j |x - iy|^{k-j-1} < Cy|x|^{k-1}.$$

Если $|x| < y$, то $|x + iy| < 2|y|$, $|x - iy| < 2|y|$ и $|(x + iy)^k - (x - iy)^k| < Cy^k$, и (8) доказано. Предположим $|x| > 2ky$; тогда

$$\begin{aligned} |(x + iy)^k - (x - iy)^k| &= |x + iy|^k \left| 1 - \left(\frac{x - iy}{x + iy} \right)^k \right| \\ &= y|x + iy|^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left| \frac{x - iy}{x + iy} \right|^j (\cos j\varphi + i \sin j\varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = 2 \arg(x - iy)$. Из условия $|x| > 2ky$ следует, что $\cos j\varphi > 0$, $j = 0, 1, \dots, k-1$; следовательно, (9) доказано.

Функцию $g(x)$ на промежутке (a, b) будем называть *почти монотонно возрастающей*, если существует $A > 0$ такое, что для любых $x' < x''$ из этого промежутка $g(x') < Ag(x'')$. Аналогично определяется *почти монотонно убывающая функция*. В следующей лемме собраны свойства функции $\rho(x) \in R$.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho(x) \in R$. Справедливы следующие утверждения.

а) Пусть α — нецелое число. Тогда существуют $\delta_0 \in (0, 1 - \{\alpha_0\})$, $\delta_1 \in (-\{\alpha_0\}, 0)$ такие, что для любого $\delta > \delta_0$ и для любого числа A функция $|x + i|^\delta \rho_1(x)$ почти монотонно возрастает в промежутке (A, ∞) и почти монотонно убывает в промежутке $(-\infty, A)$. Соответственно $|x + i|^{-\delta} \rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (A, ∞) и почти монотонно возрастает на $(-\infty, A)$ для любого $\delta < \delta_1$.

б) Если α — целое число, то для любого числа A функция $|x + i| \rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на (A, ∞) и почти монотонно убывает на $(-\infty, A)$; $|x + i|^\delta \rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (A, ∞) и почти монотонно возрастает на $(-\infty, A)$ для любого $\delta < 0$.

с) Для любого $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x) dx}{(1 + |x|)^{1+\delta}} < \infty. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть согласно (6) δ_0 выбрано так, чтобы имело место

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} g_2(x) < \delta_0 < 1 - \{\alpha_k\}.$$

Тогда если $A < x' < x''$, то при $\delta > \delta_0$ из (4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{|x' + i|^\delta \rho_1(x')}{|x'' + i|^\delta \rho_1(x'')} &= e^{g(x') - g(x'')} \exp \left(\int_{x'}^{x''} \frac{\delta - g_2(t)}{t} dt \right) \\ &< A \exp \left(\int_{x'}^{x''} \frac{\delta - g_2(t)}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Поэтому $|x' + i|^\delta \rho_1(x') (|x'' + i|^\delta \rho_1(x''))^{-1} < C$.

Аналогично доказываются остальные утверждения а), б) леммы. Утверждение с) непосредственно следует из определения класса R .

ЛЕММА 3. Пусть

$$g(x) = \exp\left(\int_A^x \frac{g_2(t) dt}{t}\right),$$

где $g_2(x)$ – ограниченная функция на (A, ∞) . Тогда если $y \in (2^{-1}x, 2x)$, то

$$\left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| < C \left|\frac{g(x)}{x}\right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $g(x)$ имеем

$$\left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{g(x)}{x - y}\right| \left(1 - \exp\left(\int_x^y \frac{g_2(t) dt}{t}\right)\right).$$

Так как $2^{-1} < yx^{-1} < 2$, то

$$\int_x^y \frac{g_2(t) dt}{t} < A \ln 2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| &< C \left|\frac{g(x)}{x - y}\right| \left|\int_x^y \frac{g_2(t) dt}{t}\right| \\ &< C \left|\frac{g(x)}{x - y}\right| \left|\ln \frac{y}{x}\right| = C \left|\frac{g(x)}{x - y}\right| \left|\ln \left(1 - \frac{y - x}{x}\right)\right|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|y - x| |x|^{-1} < 1$, завершаем доказательство леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \rho_1(x) dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}} < \infty, \quad (11)$$

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \rho_1(x) dx}{|t - x - iy| |x + i|^{1 + \{\alpha_0\}}} < \infty. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in (0, \infty)$. В силу леммы 2 существует $\delta \in (0, 1 - \{\alpha_0\})$ такое, что функция $|x + i|^\delta \rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на $(0, \infty)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{2^{-1}t} \frac{y \rho_1(x) dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}} \\ &< C \left(1 + \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_0^{2^{-1}t} \frac{y |x + i|^\delta \rho_1(x) dx}{|t + i|^2 |x + i|^{\delta + \{\alpha_0\}}}\right) < C_1. \end{aligned}$$

Так как $\rho(x) \in R$, то $\rho_1(x)$ представима в виде (4). Не нарушая общности, можно предположить, что $g_1(x) \equiv 0$. Применяя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} &\frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y \rho_1(x) dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}} \\ &= \left| \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y(\rho_1(x) - \rho_1(t)) dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}} + \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y |t + i|^{\{\alpha_0\}} dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}} \right| \\ &< A \left(1 + \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y |t + i|^{\{\alpha_0\}} |x - t| dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}}\right) < A_1 \left(1 + \frac{y}{t} \ln \frac{t^2 + y^2}{y^2}\right) < A_2. \end{aligned}$$

В силу леммы 2 $\delta \in (-\{\alpha\}, 0)$ можем подобрать так, чтобы функция $|x + i|^\delta \rho_1(x)$ была почти монотонно убывающей на $(0, \infty)$, и поэтому

$$\frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2t}^{\infty} \frac{y \rho_1(x) dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\}}} < C \int_{2t}^{\infty} \frac{y |t + i|^{\{\alpha\} + \delta} dx}{((x - t)^2 + y^2) |x + i|^{\{\alpha_0\} + \delta}} < C_1.$$

Утверждение (11) леммы при $t \in (0, \infty)$ доказано. Аналогично устанавливаются другие утверждения.

3. Пусть $\rho'(x) = (1 + |x|)^{-n_0}$, $x \in (-\infty, \infty)$, где $n_0 = [\alpha] + 1$. Если $u(x, y)$ удовлетворяет условию (2), то из леммы 2 следует, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho')} = 0; \quad (13)$$

поэтому $u(x, y)$ можно представить в виде (см. [12])

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y), \quad (14)$$

где

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{n_0} i a_p z^p, \quad (15)$$

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{(z + i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t + i)^{n_0-1}(t - z)} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{(z - i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t - i)^{n_0-1}(t - z)} \right), \quad (16)$$

причем $a_p, p = 0, 1, \dots, n_0$, — произвольные действительные числа.

Скажем, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию R_0 , если α — нецелое число, либо α — целое число и выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x) dx}{1 + |x|} < \infty. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Если $\rho(x)$ удовлетворяет условию R_0 , то общее решение однородной задачи (2) можно представить в виде (15).

б) Пусть $\rho(x)$ не удовлетворяет условию R_0 . Тогда общее решение однородной задачи (2) можно представить в виде (15) при $a_{n_0} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, y)$ — произвольное решение однородной задачи (2). Так как $\rho'(x)(\rho(x))^{-1} \in L^\infty(-\infty, \infty)$, из (2) при $f \equiv 0$ имеем

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u(x, y)\|_{L^1(\rho')} = 0, \quad (18)$$

поэтому $u(x, y)$ представима в виде (15), где a_p — некоторые действительные числа. Для доказательства утверждения а) теоремы нам предстоит доказать, что функция (15)

удовлетворяет однородному условию (2) для любого действительного числа a_p . Сначала предположим, что число α нецелое. Достаточно рассмотреть функцию $u(x, y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$. Так как в окрестности бесконечно удаленной точки $\rho_1(x) < C|x|^\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, в силу леммы 1 с некоторой постоянной C_1

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L^1(\rho)} &< \int_{-\infty}^{\infty} |(x+iy)^{n_0-1} - (x-iy)^{n_0-1}| \rho(x) dx \\ &< C_1 y \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha_0\}-\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Взяв $\varepsilon < \{\alpha_0\}$, получим

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|\operatorname{Re} iz^{n_0-1}\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Если α_0 – целое число, $u(x, y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ и имеет место условие (17), то

$$\|u(x, y)\|_{L^1(\rho)} < Cy \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x) dx}{1+|x|} \right) \quad (20)$$

и $\|u(x, y)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +0$.

Рассмотрим случай, когда нарушено условие (17). Тогда функция $u(x, y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ в силу леммы 1 при $|x| > 2n_0y$ удовлетворяет неравенству $u(x, y) > ay|x|^{n_0-2}$ и поэтому не принадлежит классу $L^1(\rho)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда задача (2) разрешима для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y), \quad (21)$$

где $u_0(x, y)$ – общее решение однородной задачи, а $u_1(x, y)$ определяется формулой (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет условию (2). Тогда выполняется (13) и $u(x, y)$ представима в виде (19). Нам следует установить, что для любой функции $f \in L^1(\rho)$ функция $u(x, y)$ из (19) удовлетворяет условию (2). Учитывая теорему 1, достаточно установить, что функция $u_1(x, y)$ из (16) удовлетворяет условию (2) при любой $f \in L^1(\rho)$. Для этого предварительно докажем оценку

$$\|u_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f\|_{L^1(\rho)}. \quad (22)$$

Заметим, что $u_1(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y)$, где

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= \frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)} - \frac{(\bar{z}+i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-\bar{z})}, \\ I_2(x, y) &= \frac{(\bar{z}-i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)} - \frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-\bar{z})}. \end{aligned}$$

Далее, имеем $I_1(x, y) = I_1^{(1)}(x, y) + I_2^{(2)}(x, y)$, где

$$I_1^{(1)}(x, y) = \frac{(z+i)^{n_0-1} - (\bar{z}+i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)},$$

$$I_1^{(2)}(x, y) = \frac{(\bar{z}+i)^{n_0-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-x)^2 + y^2}.$$

Учитывая лемму 1, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |I_1^{(1)}(x, y)| \rho(x) dx \\ &= \sup_{g \in B_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} ((z+i)^{n_0-1} - (\bar{z}+i)^{n_0-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-x-iy)} g(x) dx \right| \\ &< C \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \rho(t) \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^{n_0-2} + |x|^{n_0-2}) |x|^{1-\{\alpha\}} \rho_1(x)}{|x+i|^{n_0} |t-x-iy|} dx dt \\ &< C_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \rho(t) \frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \rho_1(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha_0\}} |t-x-iy|} dx dt, \end{aligned}$$

где $B_0 = \{g : \|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})} \leq 1\}$. Отсюда, учитывая (12), получаем оценку

$$\|I_1^{(1)}(x, y)\|_{L^1(\rho)} < C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Повторяя те же выкладки и применяя (11), получим

$$\|I_1^{(2)}(x, y)\|_{L^1(\rho)} < C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Следовательно,

$$\|I_1(x, y)\|_{L^1(\rho)} < C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|I_2(x, y)\|_{L^1(\rho)} < C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым, оценка (20) доказана. Докажем, что из (20) следует, что функция (16) удовлетворяет условию (2). Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > n, \\ f(x), & |x| < n. \end{cases}$$

Получим последовательность функций $f_n(x)$ такую, что

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0.$$

Обозначив функцию (16) при $f(x) = f_n(x)$ через $u_n(x, y)$, будем иметь (см. [8])

$$\lim_{y \rightarrow +0} \|u_n(x, y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Далее, используя оценку (20), получим

$$\begin{aligned} \|u(x, y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} &< \|u(x, y) - u_n(x, y)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x, y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} \\ &\quad + \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \\ &< C \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x, y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Из (21) и (22) теперь следует, что $u(x, y)$ удовлетворяет условию (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хведелидзе Б. В. О разрывной задаче Римана–Привалова для нескольких функций // Сообщение АН Груз. ССР. 1956. Т. 17. № 10. С. 865–872.
- [2] Rosenblum M. Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 165. P. 326–342.
- [3] Товмасян Н. Е. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе // Сиб. матем. ж. 1961. Т. 2. № 2. С. 25–57.
- [4] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинёв, 1973.
- [5] Hunt R. A., Muckenhoupt B., Wheeden R. L. Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 176. P. 227–251.
- [6] Хведелидзе Б. В. Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Современные проблемы математики. Т. 7. М., 1975.
- [7] Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.
- [8] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [9] Kazarian K. S. Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals // Studia Math. 1987. V. 86. P. 97–130.
- [10] Айрапетян Г. М. Задача Дирихле в пространствах с весом // Изв. НАН Армении. Матем. 2001. Т. 36. № 3. С. 12–35.
- [11] Айрапетян Г. М. О задаче Дирихле в полуплоскости в пространствах с весом // Изв. НАН Армении. Матем. 2001. Т. 36. № 6. С. 7–15.
- [12] Айрапетян Г. М. О задаче Гильберта в смысле L^p -сходимости, $p > 1$ // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 421–423.
- [13] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Государственный инженерный университет Армении
E-mail: hhairapet@seua.am

Поступило
24.01.2003