Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, Применение комплексного анализа для оценки
снизу тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*,
1998, том 63, выпуск 6, 803–811

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:58:17

УДК 517.5

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ СНИЗУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

А. С. Белов

В работе доказано, что для любых различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$ и произвольных действительных чисел $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$-\min_x \sum_{j=1}^n a_j (\cos(k_j x) - \sin(k_j x)) \geq B \left(\frac{1}{1 + \ln n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где B – положительная абсолютная постоянная (например, $B = 1/8$). Приведен пример, который показывает, что в этом неравенстве порядок относительно n , т.е. множитель $(1 + \ln n)^{-1/2}$ нельзя улучшить. Получен также более изящный аналог неравенства Пихоридеса и некоторые другие оценки снизу тригонометрических сумм.

Библиография: 6 названий.

В работе [1] Пихоридес получил следующий результат.

Пусть n – натуральное число, $k_1, \dots, k_n$ – различные натуральные числа, $c_1, \dots, c_n$ – произвольные комплексные числа и

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{ik_j x}, \quad M_F = -\min_x \operatorname{Re} F(x). \quad (1)$$

Пусть $c_1^*, \dots, c_n^*$ – соответственно числа $|c_1|, \dots, |c_n|$, переставленные в невозрастающем порядке. Тогда при $M_F > 0$ верно неравенство

$$M_F \ln M_F + \|F\|_1 \geq B \sum_{j=1}^n \frac{c_j^*}{j} - A. \quad (2)$$

Здесь и далее, через $A, A_1, \dots$ (через $B, B_1, \dots$) обозначим достаточно большую (достаточно малую) положительную абсолютную постоянную, в каждом случае свою. Если $f \in L_{2\pi}^p$, $p \in (0, \infty)$, то, как обычно,

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00094.

Для любого положительного γ неравенство (2) применим к полиному γF . В результате, разделив обе части полученного неравенства на γ , имеем

$$M_F \ln(\gamma M_F) + \frac{A}{\gamma} + \|F\|_1 \geq B \sum_{j=1}^n \frac{c_j^*}{j}.$$

Минимизируя по γ , т.е., полагая $\gamma = A/M_F$, приходим к неравенству

$$(1 + \ln A)M_F + \|F\|_1 \geq B \sum_{j=1}^n \frac{c_j^*}{j}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$M_F + \|F\|_1 \geq B_1 \sum_{j=1}^n \frac{c_j^*}{j}. \quad (3)$$

Поскольку $1 + M \ln M \geq M$ при $M > 0$, из неравенства (3) сразу вытекает (2). Следовательно, неравенства (2) и (3) эквивалентны. Непосредственно из определения (1) вытекает, что всегда $M_F \geq 0$, причем $M_F = 0$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты $c_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому неравенство (3) верно и при $M_F = 0$.

Рассмотрим полином

$$F(x) = 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) e^{ikx}.$$

В силу известных свойств ядра Фейера $M_F \leq 1$, а правая часть неравенства (3) имеет порядок $1 + \ln n$, т.е. в левой части неравенства (3) второе слагаемое, которое имеет порядок $1 + \ln n$, нельзя отбросить. Следующий пример показывает, что нельзя отбросить и первое слагаемое:

$$F(x) = \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) (e^{i(m+1-k)} + e^{i(m+1+k)}),$$

где m — наибольшее натуральное число такое, что $2m \leq n$.

В этой статье мы получим неравенство (3), как следствие следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\Phi \in H^1$, $\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ — ее разложение в ряд Тейлора, c_0 — вещественное число и $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$ при $|z| < 1$. Тогда верно неравенство

$$A_1 \|\Phi\|_{H^1} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^*}{j}, \quad (4)$$

где $\{c_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ — перестановка последовательности $\{|c_j|\}_{j=1}^{\infty}$ в невозрастающем порядке.

Если $p \in (0, \infty)$, то запись $\Phi \in H^p$, как обычно, означает, что функция Φ аналитична в круге $|z| < 1$ и

$$\|\Phi\|_{H^p} = \sup_{r \in [0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Если в теореме 1 $\Phi(z) = M_F + \sum_{j=1}^n c_j z^{k_j}$, то имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$, комплексных чисел $c_1, \dots, c_n$ для полинома (1) справедливо неравенство (3) с постоянной $B_1 = 1/A_1$.

Действительно, в этом случае гармоническая функция $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$ при $|z| = 1$, а значит и при $|z| < 1$, и $\|\Phi\|_{H^1} = \|\Phi(e^{it})\|_1 \leq M_F + \|F\|_1$. Таким образом, неравенство (3) является простым следствием теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Можно считать, что функция Φ не равна тождественно 0, иначе (4) очевидно. Не уменьшая общности считаем, что $\|\Phi\|_{H^1} = 1$ (если необходимо, функцию Φ можно умножить на положительную постоянную). Поскольку $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$ при $|z| < 1$, выделим аналитическую в круге $|z| < 1$ ветвь функции $\ln(1 + \Phi(z)) = \ln|1 + \Phi(z)| + i\varphi(z)$, где $|\varphi(z)| < \pi/2$, $\varphi(0) = 0$. Пусть $r \in [0, 1)$, $f_r(t) = \operatorname{Re} \Phi(re^{it})$, $\tilde{f}_r(t) = \operatorname{Im} \Phi(re^{it})$. Повторяя рассуждения, используемые при доказательстве известной теоремы М. Рисса (см. [2, т. 1, с. 404], [3, с. 571], [4, с. 127]), по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(re^{it}) \ln(1 + \Phi(re^{it})) dt = \Phi(0) \ln(1 + \Phi(0)).$$

Приравнявая действительные части, получим равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) \ln|1 + f_r(t) + i\tilde{f}_r(t)| dt = \Phi(0) \ln(1 + \Phi(0)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_r(t) \varphi(re^{it}) dt,$$

из которого непосредственно вытекает неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) \ln|1 + f_r(t)| dt \leq \Phi(0) \ln(1 + \Phi(0)) + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}_r(t)| dt. \quad (5)$$

Поскольку $\Phi(0) \leq \|\Phi\|_{H^1} = 1$, $\|\tilde{f}_r\|_1 \leq \|\Phi\|_{H^1} = 1$, из (5) следует оценка

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) \ln(1 + f_r(t)) dt \leq \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому для неотрицательной функции

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1-0} f_r(t) \quad \text{почти всюду}$$

по лемме Фату получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \ln(1 + f(t)) dt \leq \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку коэффициенты Фурье $\hat{c}_j(f) = c_j/2$ при $j \geq 1$ и для перестановки модулей коэффициентов Фурье в невозрастающем порядке верна оценка (см. [2, т. 2, с. 236, задача 8])

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^*(f)}{j} \leq A_2 + A_3 \|f \ln^+ f\|_1,$$

то

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^*}{j} \leq A_2 + A_3 \left(\ln 2 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Неравенство (4) доказано с постоянной $A_1 = 2A_2 + (\ln 4 + \pi)A_3$. Применяя интерполяционную теорему Марцинкевича, несложно показать, что можно выбрать $A_2 = 6$, $A_3 = 8$. Поэтому в теореме 1 можно считать $A_1 = 60$.

Теорема 1, а значит, и следствие 1 доказаны.

Кроме того, из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $\Phi \in H^1$, $\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ – ее разложение в ряд Тейлора, $\{c_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ – перестановка последовательности $\{|c_j|\}_{j=1}^{\infty}$ в невозрастающем порядке и $\Phi^*(z) = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^* z^j$. Тогда если $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$ при $|z| < 1$, то $\Phi^* \in H^1$ и справедливо неравенство

$$A_4 \|\Phi\|_{H^1} \geq \|\Phi^*\|_{H^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Phi_0(z) = \operatorname{Re} c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поскольку $|\operatorname{Im} c_0| \leq |c_0| \leq \|\Phi\|_{H^1}$, то $\|\Phi_0\|_{H^1} \leq |\operatorname{Im} c_0| + \|\Phi\|_{H^1} \leq 2\|\Phi\|_{H^1}$. Применяя к функции Φ_0 теорему 1, получаем

$$2A_1 \|\Phi\|_{H^1} \geq A_1 \|\Phi_0\|_{H^1} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^*}{j}.$$

Если $r \in [0, 1)$ и $|t| \in (\pi/(n+1), \pi/n]$ при некотором натуральном n , то

$$\begin{aligned} |\Phi^*(re^{it})| &\leq |c_0| + \sum_{j=1}^n c_j^* r^j + \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j^* r^j e^{ijt} \right| \\ &\leq |c_0| + \sum_{j=1}^n c_j^* + \frac{c_{n+1}^* r^{n+1}}{|\sin(t/2)|} \leq |c_0| + \sum_{j=1}^n c_j^* + (n+1)c_{n+1}^*. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi^*(re^{it})| dt &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} \right) \left(|c_0| + \sum_{j=1}^n c_j^* + (n+1)c_{n+1}^* \right) \\ &= |c_0| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^*}{n} \leq (1 + 4A_1) \|\Phi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что функция $\Phi^* \in H^1$ и верно неравенство $\|\Phi^*\|_{H^1} \leq (1 + 4A_1) \|\Phi\|_{H^1}$.

Отметим, что согласно известному неравенству Харди (см. [2, т. 1, с. 454])

$$\pi \|\Phi^*\|_{H^1} \geq |c_0| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^*}{j}.$$

Поэтому следствие 2 эквивалентно теореме 1. Это следствие интересно сопоставить со следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Можно построить неотрицательную четную функцию $f \in L_{2\pi}$ такую, что если

$$\widehat{a}_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

– ее действительные коэффициенты Фурье, $\{a_k^*(f)\}_{k=1}^{\infty}$ – перестановка последовательности $\{|\widehat{a}_k(f)|\}_{k=1}^{\infty}$ в невозрастающем порядке и

$$f^*(x) = \frac{1}{2} \widehat{a}_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*(f) \cos(kx), \quad (6)$$

то $f^* \notin L_{2\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольные последовательности натуральных чисел $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $2^{-n} \ln N_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $K_{n+1} > \frac{1}{2}(3^{N_n} - 1)K_n$ при $n \geq 1$. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \prod_{j=0}^{N_n-1} (1 + \cos(3^j K_n x)).$$

Тогда из известных свойств произведений М. Рисса (см. [5]) сразу вытекает, что функция f неотрицательна, $f \in L_{2\pi}$, $\|f\|_1 = 1$ и функция (6) представима в виде

$$f^*(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \cos(kx) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} \cos(kx),$$

где последовательность натуральных чисел $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ такова, что $m_n - m_{n-1} \geq N_n$ при всех $n \geq 1$.

Для каждого натурального n ряд

$$\sin(m_n x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(m_n x) a_k^* \cos(kx)$$

сходится равномерно к функции $\sin(m_n x) f^*(x)$, поэтому

$$\begin{aligned} A \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x)| \cdot |\sin(m_n x)| dx &\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) 2 \sin(m_n x) \left(\sum_{j=1}^{m_n-1} \frac{\sin(jx)}{j} \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^{m_n-1} \frac{a_{m_n-j}^*}{j} - \sum_{j=1}^{m_n-1} \frac{a_{m_n+j}^*}{j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_n-1} \frac{a_{m_n-j}^*}{j} \geq 2^{-n-1} \sum_{j=1}^{m_n-1} \frac{1}{j} \\ &\geq B 2^{-n} \ln m_n \geq B 2^{-n} \ln N_n \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает, что $f^* \notin L_{2\pi}$.

Из рассуждений, приведенных в работе С. А. Пичугова [6], вытекает, что для любого положительного числа ν можно указать положительное число C_ν такое, что для любых различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$ имеет место оценка

$$-\min_x \sum_{j=1}^n (\cos(k_j x) - \sin(k_j x)) \geq C_\nu (\ln n)^\nu.$$

Далее нам потребуется следующая

ЛЕММА. Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция такая, что $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$, $\operatorname{Im} \Phi(z) \geq 0$ при $|z| < 1$, и $\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ — ее разложение в ряд Тейлора. Тогда при всех $p \in (1, 2)$ функция $\Phi \in H^p$ и справедливы неравенства

$$\|\Phi\|_{H^p} \leq \left(\frac{2}{2-p} \right)^{1/p} |\Phi(0)|, \quad (7)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^q \right)^{1/q} \leq A_5 (2-p)^{-1/2} |\Phi(0)|, \quad (8)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{p-2} (c_j^*)^p \right)^{1/p} \leq A_6 (2-p)^{-1/2} |\Phi(0)|, \quad (9)$$

где $q = p/(p-1)$, а $\{c_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ — перестановка последовательности $\{|c_j|\}_{j=0}^{\infty}$ в невозрастающем порядке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное положительное ε и положим $G(z) = \varepsilon(1+i) + \Phi(z)$ при $|z| < 1$. Выберем аналитическую в круге $|z| < 1$ ветвь функции $\ln G(z) = \ln |G(z)| + i\varphi(z)$, где $\varphi(z) \in (0, \pi/2)$. При каждом $p \in [1, 2)$ для всех $r \in [0, 1)$ по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(p \ln G(re^{it}) - \frac{i\pi p}{4}\right) dt = \exp\left(pG(0) - \frac{i\pi p}{4}\right).$$

Приравнявая действительные части, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(re^{it})|^p \cos\left(p\varphi(re^{it}) - \frac{\pi p}{4}\right) dt = |G(0)|^p \cos\left(p\varphi(0) - \frac{\pi p}{4}\right),$$

из которого, поскольку $|p\varphi(z) - \pi p/4| < \pi p/4$ при $|z| < 1$, получаем неравенство

$$\cos\left(\frac{\pi p}{4}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(re^{it})|^p dt \leq |G(0)|^p.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{it})|^p dt \leq \frac{|\Phi(0)|^p}{\cos(\pi p/4)},$$

которое выполнено при всех $r \in [0, 1)$. Следовательно, функция $\Phi \in H^p$ и справедлива оценка $\|\Phi\|_{H^p} \leq |\Phi(0)|(\cos(\pi p/4))^{-1/p}$. Поскольку $\cos(\pi p/4) = \sin(\pi(2-p)/4) > (2-p)/2$, неравенство (7) доказано при всех $p \in [1, 2)$.

Пусть далее $p \in (1, 2)$. В силу известной теоремы Хаусдорфа–Юнга (см. [2, т. 2, с. 153])

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^q\right)^{1/q} \leq \|\Phi\|_{H^p}.$$

Отсюда и из (7) получаем

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^q\right)^{1/q} \leq \left(\frac{2}{2-p}\right)^{1/p} |\Phi(0)| \leq A_5(2-p)^{-1/2} |\Phi(0)|,$$

где

$$A_5 = \sup_{p \in (1, 2)} \exp\left(\ln \frac{2}{p} - \frac{2-p}{2p} \ln(2-p)\right) < 2e^{1/(2e)} < 2\sqrt{2}.$$

Неравенство (8) доказано.

Из теоремы Пэли (см. [2, т. 2, с. 182–185]) имеем

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{p-2} (c_j^*)^p\right)^{1/p} \leq \frac{A}{p-1} \|\Phi\|_{H^p}.$$

Отсюда и из (7), выполняя приведенные оценки, получаем (9) при $p \in [3/2, 2)$. Заметим, что величина

$$\left(6\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} (j c_j^*)^p\right)^{1/p}$$

не убывает при $p \in (0, 2)$. Следовательно, для некоторой постоянной A_6 неравенство (9) верно при всех $p \in [1, 2)$.

Отметим, что неравенство (7) известно без явного указания постоянной при $|\Phi(0)|$ (см. [2, т. 1, с. 466, задача 1]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть действительная функция $f \in L_{2\pi}$, ее сопряженная $\tilde{f} \in L_{2\pi}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0, \quad -m_f = \operatorname{ess\,inf}_x f(x) > -\infty, \quad -m_{\tilde{f}} = \operatorname{ess\,inf}_x \tilde{f}(x) > -\infty. \quad (10)$$

Тогда при всех $p \in (1, 2)$ функции $f, \tilde{f} \in L_{2\pi}^p$ и справедливы неравенства

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\hat{c}_k(f)|^q \right)^{1/q} \leq A_7(2-p)^{-1/2}(m_f + m_{\tilde{f}}), \quad (11)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} (c_k^*(f))^p \right)^{1/p} \leq A_8(2-p)^{-1/2}(m_f + m_{\tilde{f}}), \quad (12)$$

где $q = p/(p-1)$,

$$\hat{c}_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

– комплексные коэффициенты Фурье функции f , а $\{c_k^*(f)\}_{k=1}^{\infty}$ – перестановка последовательности $\{|\hat{c}_k(f)|\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в невозрастающем порядке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия (10) и

$$\Phi(z) = m_f + im_{\tilde{f}} + \sum_{j=1}^{\infty} 2\hat{c}_j(f)z^j.$$

Поскольку при $r \in [0, 1)$ действительная и мнимая части функции $\Phi(re^{ix})$ являются абелевыми средними для неотрицательных функций $m_f + f(x)$ и $m_{\tilde{f}} + \tilde{f}(x)$ соответственно, то $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$ и $\operatorname{Im} \Phi(z) \geq 0$ при $|z| < 1$. Таким образом, все условия леммы выполнены и из (8) получаем

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{c}_n(f)|^q \right)^{1/q} = 2^{-1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |2\hat{c}_n(f)|^q \right)^{1/q} \leq 2^{-1/p} A_5(2-p)^{-1/2} |\Phi(0)|.$$

Так как $|\Phi(0)| = |m_f + im_{\tilde{f}}| \leq m_f + m_{\tilde{f}}$, неравенство (11) справедливо с постоянной $A_7 = 2^{-1/2} A_5 < 2$. Аналогично, из (9) выводим неравенство (12) с постоянной $A_8 = A_6$. Теорема 3 доказана.

Следствием теоремы 3 является

ТЕОРЕМА 4. Для любых различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$, произвольных действительных чисел $a_1, \dots, a_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ верно неравенство

$$A_{10}(m_f + m_{\tilde{f}}) \geq \left(\frac{1}{1 + \ln n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \cos(k_j x + \varphi_j), \quad \tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^n a_j \sin(k_j x + \varphi_j), \quad (14)$$

$$m_f = -\min_x f(x), \quad m_{\tilde{f}} = -\min_x \tilde{f}(x).$$

Если в теореме 4 положить все $\varphi_j = \pi/4$, то $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $m_{\tilde{f}} = m_f$, и из (13) сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$ и произвольных действительных чисел $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\sqrt{2}A_{10} \left(-\min_x \sum_{j=1}^n a_j (\cos(k_j x) - \sin(k_j x)) \right) \geq \left(\frac{1}{1 + \ln n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}. \quad (15)$$

В частности, если все $|a_j| \geq 1$, то

$$-\min_x \sum_{j=1}^n a_j (\cos(k_j x) - \sin(k_j x)) \geq B_2 \left(\frac{n}{1 + \ln n} \right)^{1/2},$$

где $B_2 = 1/(\sqrt{2}A_{10})$.

Отметим, что множитель $(1 + \ln n)^{-1/2}$ в (15), а значит и в (13), точен по порядку, т.е.

$$\inf \left(-\min_x \sum_{j=1}^n a_j (\cos(k_j x) - \sin(k_j x)) \right) \asymp (1 + \ln n)^{-1/2} \quad \text{при } n \geq 1, \quad (16)$$

где нижняя грань берется по всем действительным числам $a_1, \dots, a_n$, $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$, и всем наборам различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$. Соотношение (16) вытекает из неравенства (15) и следующего факта: для каждого натурального числа n можно построить не равные одновременно 0 действительные числа $a_1, \dots, a_n$ такие, что

$$-\min_x \sum_{j=1}^n a_j (\cos(jx) - \sin(jx)) \leq A_{11} \left(\frac{1}{1 + \ln n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Действительно, 2π -периодическая неотрицательная функция g такая, что $g(x) = \sin(x/4)(\sin(x/2))^{-1/2}$ при $x \in (0, 2\pi)$, разлагается (см. [3, с. 241]) в ряд Фурье

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j (\cos(jx) - \sin(jx)), \quad \text{где } b_j = 2^{-2j} \frac{(2j)!}{(j!)^2}, \quad j \geq 0.$$

Поэтому средние Фейера

$$\sigma_n(g; x) = \sum_{j=0}^n \left(1 - \frac{j}{n+1} \right) b_j (\cos(jx) - \sin(jx))$$

неотрицательны. Отсюда, полагая $a_j = (1 - j/(n+1))b_j$ при $j = 1, \dots, n$, получаем, что левая часть (17) не превышает $b_0 = 1$, а $\sum_{j=1}^n a_j^2 \geq B(1 + \ln n)$, поскольку $b_j^2 \asymp 1/j$ при $j \geq 1$ (см. [3, с. 240]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для функций (14) выполнены условия (10). По теореме 3 при всех $p \in (1, 2)$ верно неравенство (11), где $q = p/(p-1)$. Отсюда в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j^2 &\leq n^{1-2/q} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right)^{2/q} = n^{2/p-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |2\hat{c}_k(f)|^q \right)^{2/q} \\ &\leq 2^{2(q-1)/q} n^{2/p-1} A_7^2 (2-p)^{-1} (m_f + m_{\tilde{f}})^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2} \leq A_7 2^{1/p} n^{1/p-1/2} (2-p)^{-1/2} (m_f + m_{\tilde{f}})$$

при всех $p \in (1, 2)$. Пусть $1/p = 1/2 + 1/(4(1 + \ln n))$. Тогда

$$\begin{aligned} (2n)^{1/p-1/2} \left(\frac{1/p}{2/p-1} \right)^{1/2} &= \exp \left(\frac{\ln 2 + \ln n}{4(1 + \ln n)} \right) \left(\frac{2(1 + \ln n)}{p} \right)^{1/2} \\ &< e^{1/4} (2(1 + \ln n))^{1/2}. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2} \leq 2A_7 e^{1/4} (1 + \ln n)^{1/2} (m_f + m_{\tilde{f}}),$$

т.е. неравенство (13) с постоянной $A_{10} = 2A_7 e^{1/4} < 4e^{1/4} < 4\sqrt{2} < 6$. Теорема 4, а значит, и следствие 3 доказаны, причем постоянная $B_2 = 1/(\sqrt{2}A_{10}) > 1/8$.

Автор выражает благодарность С. В. Конягину за поддержку в работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pichorides S. K. A remark on exponential sums // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 283–285.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
- [3] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [4] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
- [5] Конягин С. В. Об одной задаче Литлвуда // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №2. С. 143–144.
- [6] Пичугов С. А. Оценки минимума тригонометрических сумм // Сб. научн. тр. “Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям”. Днепропетровск: ДГУ, 1982. С. 35–38.

Ивановский государственный университет

Поступило
12.04.97