Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C , *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 812–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:13:46

УДК 517.982.256

О ЛИНЕЙНОСТИ ОПЕРАТОРА МЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ L_1 И C

П. А. Бородин

Для чебышевского подпространства Y в банаховом пространстве X определен однозначный оператор метрического проектирования $P_Y: X \rightarrow Y$, сопоставляющий каждому $x \in X$ ближайший к нему элемент $y \in Y$. Пусть M – произвольное множество, μ – σ -конечная мера на некоторой σ -алгебре Σ подмножеств M . В работе полностью описаны чебышевские подпространства $Y \subset L_1(M, \Sigma, \mu)$ с линейным оператором P_Y (в случае пространства $L_1[0, 1]$ это было сделано П. Моррисом в 1980 году). Указан широкий класс чебышевских подпространств в $L_1(M, \Sigma, \mu)$ с, вообще говоря, нелинейным оператором P_Y . Доказано, что оператор P_Y для нетривиального собственного чебышевского подпространства $Y \subset C[K]$ (K – компакт) линеен тогда и только тогда, когда Y имеет коразмерность 1 в $C[K]$.

Библиография: 9 названий.

0. Введение. Пусть X – банахово пространство, Y – его (замкнутое линейное) подпространство, $\rho(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$ – расстояние от элемента $x \in X$ до Y , $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = \rho(x, Y)\}$ – множество ближайших к x элементов из Y .

Подпространство Y называется *чебышевским*, если для каждого $x \in X$ множество $P_Y(x)$ состоит ровно из одного элемента. Другими словами, для каждого $x \in X$ имеет место существование и единственность элемента наилучшего приближения при аппроксимации элементами подпространства Y . Возникающий при этом *оператор метрического проектирования* $P_Y: X \rightarrow Y$, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ его элемент наилучшего приближения $P_Y(x) \in Y$, не является, вообще говоря, ни линейным, ни даже непрерывным [1], [2].

Цель настоящей работы состоит в описании тех чебышевских подпространств Y в пространствах L_1 и C , для которых оператор P_Y линеен (теоремы 1 и 3). Кроме того, в пространстве L_1 мы укажем достаточно широкий класс чебышевских подпространств Y с, вообще говоря, нелинейным оператором P_Y (теорема 2).

Отметим, что теорема 1 аналогична теореме П. Морриса [3], описавшего чебышевские подпространства с линейным оператором метрического проектирования в пространстве $L_1[0, 1]$.

Основным инструментом нашего исследования будут так называемые квазиортонормальные множества.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01366.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квазиортогональным множеством* $Q(Y) = Q(Y, X)$ к подпространству Y в пространстве X назовем совокупность всех элементов $n \in X$, для которых $P_Y(n) \ni 0$.

Этот объект впервые появляется в работах Э. Чини и Д. Вульберта [2] и И. Зингера [1] (термин *квазиортогональное множество* предложил Е. П. Долженко). В случае гильбертова пространства X каждый элемент $n \in Q(Y)$ ортогонален подпространству Y в обычном смысле, а само множество $Q(Y)$ является ортогональным дополнением к Y .

Приведем основные свойства квазиортогональных множеств.

Множество, квазиортогональное к подпространству, всегда замкнуто и является двусторонним конусом: если $n \in Q(Y)$, то $\lambda n \in Q(Y)$ для всякого числа λ . Очевидно, в простейшем случае $Y = X$ множество $Q(Y)$ совпадает с нулевым подпространством, и обратно, $Q(\{0\}) = X$.

ЛЕММА 1 [2]. *Подпространство Y является чебышевским тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

- 1) $Q(Y) + Y = X$;
- 2) для любого $n \in Q(Y)$ $P_Y(n) = \{0\}$.

При этом 1) эквивалентно существованию, а 2) – единственности элемента наилучшего приближения.

Из леммы 1 непосредственно вытекает

ЛЕММА 2 [1]. *Оператор P_Y метрического проектирования на чебышевское подпространство Y линеен тогда и только тогда, когда $Q(Y)$ – линейное подпространство.*

Отметим следующий частный случай линейности P_Y .

ЛЕММА 3. *Если чебышевское подпространство Y имеет линейную коразмерность 1 в X , то P_Y – линейный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $Q(Y) \neq \{0\}$ согласно лемме 1. С другой стороны, если $Q(Y)$ содержит два линейно независимых элемента p и q , то для некоторого скаляра λ имеем $y := p - \lambda q \in Y$, $y \neq 0$. Отсюда $p - y = \lambda q \in Q(Y)$, и y элемента p в подпространстве Y оказывается по крайней мере два элемента наилучшего приближения -0 и y . Это невозможно, поскольку Y – чебышевское подпространство. Итак, $Q(Y)$ – одномерное подпространство, и по лемме 2 оператор P_Y линеен.

В то же время условие 2) в лемме 1 можно заменить условием линейности множества, квазиортогонального к подпространству Y .

ЛЕММА 4. *Если $Q(Y)$ – подпространство и $Q(Y) + Y = X$, то Y – чебышевское подпространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, предположим, что у какого-то $x \in X$ элемент наилучшего приближения не единственный. Тогда $x = n_1 + y_1 = n_2 + y_2$, где $n_1, n_2 \in Q(Y)$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$. Отсюда $n_1 - n_2 = y_2 - y_1 \neq 0$. Так как $Q(Y)$ – подпространство, то $Q(Y) \ni n_1 - n_2 = y_2 - y_1 \in Y$, так что множество $Y \cap Q(Y)$ содержит ненулевой элемент, что невозможно. Лемма 4 доказана.

В конце этого пункта докажем утверждение, позволяющее непосредственно определять множество $Q(Y)$.

Пусть $Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \quad \forall y \in Y\}$ – аннулятор подпространства Y в сопряженном пространстве X^* .

ЛЕММА 5. $Q(Y) = \{n \in X : \text{существует ненулевой функционал } f \in Y^\perp, \text{ для которого } f(n) = \|f\| \cdot \|n\|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для всякого элемента n и всякого $y \in Y$ имеем

$$\|n - y\| \geq \frac{|f(n - y)|}{\|f\|} = \frac{|f(n)|}{\|f\|} = \|n\|,$$

так что $0 \in P_Y(n)$. Обратно, пусть $n \in Q(Y)$. Обозначим через $\langle n \rangle$ одномерное подпространство, порожденное вектором n , и рассмотрим функционал f_0 на пространстве $Y \oplus \langle n \rangle$, определяемый равенством $f_0(y + \lambda n) = \lambda$. Поскольку

$$|\lambda| = \frac{\|\lambda n\|}{\|n\|} \leq \frac{\|y + \lambda n\|}{\|n\|},$$

норма функционала f_0 равна $1/\|n\|$. По теореме Хана–Банаха f_0 можно, не увеличивая нормы, линейно продолжить на все пространство X , в результате получится функционал $f \in Y^\perp$, для которого $f(n) = 1 = \|n\| \cdot \|f\|$.

Лемму 5 можно интерпретировать следующим образом: для того чтобы получить $Q(Y)$, необходимо взять все функционалы из $Y^\perp$, достигающие своей нормы, а затем все элементы из X , на которых эта норма достигается. Совокупность всех таких элементов и есть $Q(Y)$.

1. Пространство L_1 . Далее через $L_1(M) = L_1(M, \Sigma, \mu)$ обозначим пространство вещественнозначных функций, определенных на множестве M произвольной природы и суммируемых на M по мере μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств этого множества. Для каждой функции $x \in L_1(M)$ определим ее *носитель* $\text{supp } x := \{t \in M : x(t) \neq 0\}$. Разумеется, $\text{supp } x$ определен с точностью до множества меры 0.

Мера μ предполагается σ -конечной. В этом случае сопряженным к $L_1(M)$ является пространство $L_\infty(M)$ функций, существенно ограниченных на M (см., например, [4]). Именно, функция $f \in L_\infty(M)$ определяет функционал $f : x \mapsto \int f x d\mu$ ($x \in L_1(M)$). Этот функционал достигает своей нормы в том и только том случае, когда функция f сама достигает своей нормы $\|f\| = \text{ess sup}\{|f(t)| : t \in M\}$ на множестве положительной меры, которое обозначим через $m(f)$. При этом норма достигается на любой функции $n(t) \in L_1(M)$, носитель которой $\text{supp } n \subseteq m(f)$ и которая удовлетворяет равенству $\text{sign } n(t) = f(t)/\|f\|$ при почти всех $t \in \text{supp } n$. Такие функции n назовем *подчиненными* функционалу f . Все эти функции n , подчиненные каждой своему функционалу $f \in Y^\perp$, и составляют квазиортогональное множество $Q(Y)$ к подпространству Y (см. лемму 5). О чебышевских подпространствах в $L_1(M)$ см. [1], [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что чебышевские подпространства конечной размерности или коразмерности в $L_1(M)$ полностью описаны Р. Фелпсом [6] и А. Л. Гаркави [7]. В утверждениях, доказываемых ниже, фигурируют чебышевские подпространства, вообще говоря, бесконечной размерности и коразмерности.

Следующая теорема характеризует чебышевские подпространства $Y \subset L_1(M)$, у которых оператор метрического проектирования P_Y линеен.

ТЕОРЕМА 1. *Подпространство $Y \subset L_1(M)$ является чебышевским подпространством с линейным оператором метрического проектирования тогда и только тогда, когда существуют разбиение множества M на два непересекающихся μ -измеримых множества M_1 и M_2 и линейный оператор $A: L_1(M_1) \rightarrow L_1(M_2)$, строго уменьшающий норму каждого элемента ($\|A(y)\| < \|y\|$), такие, что $Y = \{y \in L_1(M) : y|_{M_2} = A(y|_{M_1})\}$, где $y|_N$ – сужение функции y на множество $N \subseteq M$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях этой теоремы $Q(Y)$ состоит из всех функций $x \in L_1(M)$, равных 0 почти всюду на множестве M_1 , а оператор метрического проектирования действует так: $P_Y(x) = x|_{M_1} + A(x|_{M_1})$.

Для пространства $L_1[0, 1]$ эта теорема доказана в [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты записи обозначим через $L_1(N)$ подпространство всех функций из $L_1(M)$, равных 0 почти всюду (по мере μ) вне множества $N \subset M$.

Необходимость. Пусть $n \in Q(Y)$. Возьмем произвольную функцию $x \in L_1(\text{supp } n)$. Очевидно, найдутся функции $n_1, n_2 \in L_1(M)$ такие, что $\text{sign } n_1 \equiv \text{sign } n_2 \equiv \text{sign } n$ и $x \equiv n_1 - n_2$. Поскольку $n_1, n_2 \in Q(Y)$ (они подчинены тому же функционалу, что и n) и $Q(Y)$ – линейное подпространство (по лемме 2), то $x \in Q(Y)$. Таким образом, $L_1(\text{supp } n) \subseteq Q(Y)$.

Положим

$$M_2 = \bigcup_{n \in Q(Y)} \text{supp } n.$$

Пусть $M_2 = \bigcup M_{2k}$, где $\mu(M_{2k}) < \infty$, $k = 1, 2, \dots$ (мера μ σ -конечна). Для каждого k найдется не более чем счетное число функций $n_{kl} \in Q(Y)$ таких, что

$$\mu\left(M_{2k} \setminus \bigcup_l \text{supp } n_{kl}\right) = 0.$$

В этом случае всякую функцию $x_k \in L_1(M_{2k})$ можно с любой точностью приблизить (в норме L_1) функцией y_k с носителем на конечном объединении $\bigcup \text{supp } n_{kl}$. Из сказанного выше следует, что $y_k \in Q(Y)$. Всякую функцию $x \in L_1(M_2)$ можно с любой точностью приблизить конечной суммой функций x_k , а значит, и конечной суммой функций y_k , т.е. просто функцией из $Q(Y)$. Пользуясь замкнутостью $Q(Y)$, получаем $L_1(M_2) \subseteq Q(Y)$. Обратное включение вытекает из определения множества M_2 . Итак, $Q(Y) = L_1(M_2)$.

Положим $M_1 = M \setminus M_2$. Если $\mu(M_1) = 0$, то $Q(Y) = L_1(M)$, $Y = \{0\}$ и искомым оператор A нулевой.

Пусть теперь $\mu(M_1) > 0$. Всякий элемент $y \in Y$ однозначно представим в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_k \in L_1(M_k)$, $k = 1, 2$. При этом функции y_1 пробегает все подпространство $L_1(M_1)$, иначе $Y + Q(Y) = Y + L_1(M_2) \neq L_1(M)$ и Y – не чебышевское подпространство согласно лемме 1. Кроме того, $y_1 \neq 0$ при $y \neq 0$ (иначе $Y \cap Q(Y) \neq \{0\}$), и y_2 линейно зависит от y_1 . С другой стороны, $y_2 \in Q(Y)$, следовательно, при $y \neq 0$ выполняется строгое неравенство $\|y_1\| = \|y_2 - y\| > \|y_2\|$ (строгость объясняется тем, что 0 – единственный элемент наилучшего приближения для y_2 в подпространстве Y). Таким образом, $y_2 = A(y_1)$, где $A: L_1(M_1) \rightarrow L_1(M_2)$ – линейный оператор, строго уменьшающий норму: $\|Ay_1\| < \|y_1\|$.

Достаточность. Пусть подпространство Y задано множествами M_1, M_2 и оператором A . Докажем, что $Q(Y) = L_1(M_2)$. Действительно, для любых $n \in L_1(M_2)$ и $y = y_1 + y_2 \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} \|n - y\| &= \int_M |n - y_1 - y_2| d\mu = \int_{M_1} |y_1| d\mu + \int_{M_2} |n - y_2| d\mu \\ &\geq \int_{M_1} |y_1| d\mu + \int_{M_2} |n| d\mu - \int_{M_2} |y_2| d\mu = \|y_1\| + \|n\| - \|y_2\| > \|n\|, \end{aligned}$$

поскольку $\|y_2\| = \|A(y_1)\| < \|y_1\|$. Мы показали, что $L_1(M_2) \subseteq Q(Y)$. Если для некоторого $n \in Q(Y)$ выполняется неравенство $\mu(\text{supp } n \cap M_1) > 0$, то, положив $n_1 = n|_M$, получим $n_1 \in Q(Y)$ (n_1 подчинен тому же функционалу из $Y^\perp$, что и n). Но элемент $y = n_1 + A(n_1)$ ближе к n_1 , чем нулевой элемент: $\rho(n_1, 0) = \|n_1\| > \|A(n_1)\| = \rho(n_1, y)$. Это противоречие показывает, что для всякого $n \in Q(Y)$ равенство $\mu(\text{supp } n \cap M_1) = 0$ имеет место, а значит, $Q(Y)$ совпадает с подпространством $L_1(M_2)$.

Итак, $Q(Y)$ – подпространство и $Y + Q(Y) = L_1(M_1) + L_1(M_2) = L_1(M)$. Таким образом, оба условия леммы 4 выполнены, и Y – чебышевское подпространство с линейным оператором P_Y . Теорема доказана.

Разумеется, чебышевские подпространства в $L_1(M)$ не исчерпываются указанными в теореме 1. Приведем простейший пример.

Пусть M – множество из k точек, σ -алгебра Σ состоит из всех подмножеств M , а мера μ множества $E \in \Sigma$ равна количеству точек в E . Соответствующее пространство функций $L_1(M, \Sigma, \mu)$ обозначим через ℓ_1^k . При $k = 3$ пространство ℓ_1^3 изоморфно трехмерному пространству $\mathbb{R}^3$, в котором норма задается единичным “шаром” – правильным октаэдром с вершинами на осях координат. Вектор $(1, 1, 1)$ не параллелен ни одной из граней октаэдра, поэтому порожденное этим вектором одномерное подпространство является чебышевским. Очевидно, что это подпространство никак не представимо в виде, указанном в теореме 1.

Этот пример можно распространить на пространство функций, суммируемых на отрезке по мере Лебега. Следуя Моррису [3], положим

$$Y = \{g \in L_1[0, 3] : g(x) = g(x+1) = g(x+2) \text{ для почти всех } x \in [0, 1]\}.$$

Подпространство Y , очевидно, не принадлежит к классу подпространств из теоремы 1. Тот факт, что оно является чебышевским, непосредственно доказан в [3]. В то же время этот факт вытекает из следующей общей теоремы о “перенесении” чебышевских подпространств пространства ℓ_1^k в произвольное пространство $L_1(M) = L_1(M, \Sigma, \mu)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, $\mu(M_i \cap M_j) = 0$ при $i \neq j$ и при этом множества M_j одинаковы в том смысле, что для всякого $j \geq 2$ существует взаимно однозначное отображение $f_j: M_1 \rightarrow M_j$, сохраняющее меру μ . Пусть Y_0 – чебышевское подпространство в ℓ_1^k . Тогда подпространство $Y = \{y \in L_1(M) : (y(t), y(f_2(t)), \dots, y(f_k(t))) \in Y_0 \text{ для почти всех } t \in M_1\}$ чебышевское в $L_1(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому элементу $x \in L_1(M)$ и каждому $t \in M_1$ соответствует k -мерный вектор $x_t = (x(t), x(f_2(t)), \dots, x(f_k(t)))$. Покажем, что

$$Q(Y) = \{n \in L_1(M) : n_t \in Q(Y_0, \ell_1^k) \text{ для почти всех } t \in M_1\}. \quad (1)$$

Пусть для некоторого $n \in Q(Y)$ множество A тех точек $t \in M_1$, для которых $n_t \notin Q(Y_0)$, имеет положительную меру. Положим $y_t = P_{Y_0}(n_t)$, $t \in M_1$. Зададим функцию $y: M \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$(y(t), y(f_2(t)), \dots, y(f_k(t))) = y_t, \quad t \in M_1.$$

Поскольку P_{Y_0} — непрерывное отображение, функция y измерима. С другой стороны, $\|n_t - y_t\| < \|n_t\|$ при $t \in A$ (здесь и далее норма берется в ℓ_1^k), и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется множество $A_\varepsilon \subset A$ положительной меры μ такое, что $\|n_t - y_t\| < (1 - \varepsilon)\|n_t\|$ при $t \in A_\varepsilon$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_M |n - y| d\mu &= \int_{M_1} \left(\sum_{j=1}^k |n(f_j(t)) - y(f_j(t))| \right) d\mu(t) = \int_{M_1} \|n_t - y_t\| d\mu(t) \\ &= \int_{M_1 \setminus A_\varepsilon} \|n_t - y_t\| d\mu(t) + \int_{A_\varepsilon} \|n_t - y_t\| d\mu(t) \\ &\leq \int_{M_1 \setminus A_\varepsilon} \|n_t\| d\mu(t) + (1 - \varepsilon) \int_{A_\varepsilon} \|n_t\| d\mu(t) < \int_{M_1} \|n_t\| d\mu(t) = \int_M |n| d\mu. \end{aligned}$$

Мы получили, что, во-первых, функция y суммируема (значит, $y \in Y$), во-вторых, y ближе к n , чем нулевой элемент. Отсюда следует, что $n \notin Q(Y)$, это противоречит предположению.

Пусть теперь не тождественная нулю функция $n \in L_1(M)$ такова, что $n_t \in Q(Y_0)$ для почти всех $t \in M_1$. Тогда для любого $y \in Y$, $y \neq 0$, имеем

$$\int_M |n - y| d\mu = \int_{M_1} \|n_t - y_t\| d\mu(t) > \int_{M_1} \|n_t\| d\mu(t) = \int_M |n| d\mu,$$

где строгость неравенства обосновывается так же, как выше.

Итак, (1) доказано. При этом мы установили, что для всякого $n \in Q(Y)$ справедливо равенство $P_Y(n) = \{0\}$. Осталось доказать, что $Y + Q(Y) = L_1(M)$ (см. лемму 1). С этой целью для всякой функции $x \in L_1(M)$ возьмем функцию $y: M \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $y_t = P_{Y_0}(x_t)$ при всех $t \in M_1$. Поскольку оператор P_{Y_0} непрерывен и $\|y_t\| \leq \|x_t - y_t\| + \|x_t\| \leq 2\|x_t\|$, функция y измерима и суммируема, т.е. $y \in Y$. При этом $x - y \in Q(Y)$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 дают достаточно большой запас чебышевских подпространств в $L_1(M)$, имеющих бесконечную размерность и бесконечную коразмерность. Общая задача описания таких подпространств представляется весьма сложной, если вообще разрешимой (по поводу чебышевских подпространств конечной размерности или коразмерности см. замечание 1).

В пространстве $L_1[0, 1]$ чебышевских подпространств конечной ненулевой размерности или коразмерности вообще нет [8]. В связи с этим возникает вопрос: существует ли в $L_1[0, 1]$ чебышевское подпространство, отличное от описанных в теоремах 1 и 2?

2. Пространство C . Далее через $C[K]$ будем обозначать пространство вещественнозначных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве K (в современной терминологии K – компакт, в терминологии [9] K – бикомпакт) с обычной равномерной нормой $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in K\}$.

Каждая функция $f \in C[K]$ достигает своей нормы на непустом замкнутом подмножестве $m(f) := \{t \in K : |f(t)| = \|f\|\}$. О чебышевских подпространствах в $C[K]$ см. [1], [2], [5]. Здесь мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор метрического проектирования P_Y на нетривиальное собственное чебышевское подпространство $Y \subset C[K]$ линейен тогда и только тогда, когда Y имеет в $C[K]$ коразмерность 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из леммы 3.

Необходимость. Далее мы будем неоднократно пользоваться следующим легко проверяемым фактом:

(*) если элемент $n \in C[K]$ квазиортогонален к подпространству $Y \subseteq C[K]$, то и любой элемент $n' \in C[K]$ с $m(n') \supseteq m(n)$, $\text{sign } n'(t) = \text{sign } n(t)$ при $t \in m(n)$, также квазиортогонален к Y .

Предположим, вопреки утверждению теоремы, что для некоторого нетривиального собственного чебышевского подпространства $Y \subset C[K]$ коразмерности > 1 оператор P_Y линейен. Тогда по лемме 2 квазиортогональное множество $Q(Y)$ является линейным подпространством.

Поскольку $\text{codim } Y > 1$ и $Y + Q(Y) = C[K]$ (см. лемму 1), в $Q(Y)$ найдутся два линейно независимых элемента n_1 и n_2 с $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$.

Мы можем считать, что $m(n_1) \cap m(n_2) = \emptyset$ (иначе вместо n_1 и n_2 можно взять $(n_1 + n_2)/\|n_1 + n_2\|$ и $(n_1 - n_2)/\|n_1 - n_2\|$, так как при $m(n_1) \cap m(n_2) \neq \emptyset$, очевидно, $m(n_1 + n_2) \cap m(n_1 - n_2) = \emptyset$, в то же время в силу линейности $Q(Y)$ $n_1 \pm n_2 \in Q(Y)$).

Можем считать также, что $K \neq m(n_1) \cup m(n_2)$. В противном случае элементы n_1 и n_2 можно изменить так, чтобы они этому свойству удовлетворяли. Действительно, если $m(n_1) \cap m(n_2) = \emptyset$ и $K = m(n_1) \cup m(n_2)$ ($m(n_1)$ и $m(n_2)$ – компакты), то пространство $C[K]$ изометрически изоморфно прямому произведению $C[m(n_1)] \times C[m(n_2)]$ с нормой $\|(f_1, f_2)\| = \max\{\|f_1\|, \|f_2\|\}$; здесь $f_i \in C[m(n_i)]$, $i = 1, 2$; $(f_1, f_2) \in C[m(n_1)] \times C[m(n_2)]$. Обозначим через n_{ii} сужение функции n_i на компакт $m(n_i)$, $i = 1, 2$. Обе функции $(n_{11}, 0)$ и $(0, n_{22})$ лежат в $Q(Y)$ согласно (*). Ввиду нетривиальности подпространства Y существует не тождественная нулю функция $y = (y_1, y_2) \in Y$. Тогда одна из двух компонент, например y_1 , не тождественна нулю. Будем считать $\|y_1\| = 1$. При этом $m(y_1 + n_{11}) \neq m(n_{11})$, иначе $y_1 = \pm n_{11}$, и при достаточно малых положительных λ имеем $\|(n_{11}, 0) \mp \lambda(y_1, y_2)\| < \|(n_{11}, 0)\|$, что невозможно, так как $(n_{11}, 0) \in Q(Y)$. С другой стороны, $(y_1 + n_{11}, 0) \in Q(Y)$, поскольку $(y_1 + n_{11}, 0) = (y_1, -n_{22}) + (n_{11}, n_{22})$ и обе функции $(y_1, -n_{22})$ и (n_{11}, n_{22}) лежат в $Q(Y)$ (первая – ввиду того что $\|y_1\| = \|n_{22}\| = 1$ и $(0, n_{22}) \in Q(Y)$, вторая – ввиду линейности $Q(Y)$). Таким образом, функции $\bar{n}_1 = (y_1 + n_{11}, 0)$ и $\bar{n}_2 = (0, n_{22})$ обладают следующими свойствами: $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in Q(Y)$, $m(\bar{n}_2) = m(n_2)$, $m(\bar{n}_1) \subset m(n_1)$ (причем последнее включение строгое). Следовательно, $K \neq m(\bar{n}_1) \cup m(\bar{n}_2)$.

Итак, с самого начала можно выбрать $n_1, n_2 \in Q(Y)$ с $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$ такие, что множества $m(n_1)$ и $m(n_2)$ не пересекаются и их объединение не совпадает со всем ком-

пактом K . Покажем, что эти элементы всегда можно изменить так, чтобы они удовлетворяли, помимо всех перечисленных условий, еще и следующему: $m(n_1 + n_2) \cap (m(n_1) \cup m(n_2)) = \emptyset$.

Поскольку K является нормальным топологическим пространством [9, с. 244], по лемме П. С. Урысона [9, с. 172] существует функция $f \in C[K]$ со свойствами: $f(t) \equiv 0$ на $m(n_1)$, $f(t) \equiv 1$ на $m(n_2)$ и $0 \leq f(t) \leq 1$ при всех $t \in K$. Положим $n'_2 = fn_2$, $n'_1 = (1 - f)n_1$. Очевидно, $n'_i \in Q(Y)$ согласно (*), $m(n'_i) = m(n_i)$ при $i = 1, 2$ и, кроме того, $n'_i(t) = 0$ при $t \in m(n'_j)$ для $j \neq i$.

Возьмем какую-нибудь точку $t_0 \in K \setminus (m(n'_1) \cup m(n'_2))$ и содержащее ее открытое множество $U = \{t \in K : n'_i(t_0) - \varepsilon < n'_i(t) < n'_i(t_0) + \varepsilon, i = 1, 2\}$, где $\varepsilon \in (0, 1/4)$ выбрано так, чтобы выполнялось $U \cap (m(n'_1) \cup m(n'_2)) = \emptyset$. По лемме Урысона существует функция $g \in C[K]$, равная 1 в t_0 , равная 0 на $K \setminus U$ и при всех $t \in K$ удовлетворяющая неравенствам $0 \leq g(t) \leq 1$.

Положим $n''_i = n'_i + (3/4 - n'_i(t_0))g$, $i = 1, 2$. Нетрудно показать, что $\|n''_i\| = 1$. Действительно, $n''_i(t) = n'_i(t)$ при $t \in K \setminus U$, а при $t \in U$ $n''_i(t) \subseteq [\min\{3/4, n'_i(t_0)\} - \varepsilon, \max\{3/4, n'_i(t_0)\} + \varepsilon] \subset (-1, 1)$ в силу выбора числа ε . Легко проверить, что $m(n''_i) = m(n'_i) = m(n_i)$, $n''_i \in Q(Y)$, $n''_i(t_0) = 3/4$ и, кроме того, $n''_i(t) = 0$ при $t \in m(n''_j)$ для $j \neq i$.

В точке t_0 выполнено $n''_1 + n''_2 = 3/2$, поэтому $\|n''_1 + n''_2\| \geq 3/2$. С другой стороны, $|n''_1(t) + n''_2(t)| = 1$ при $t \in m(n''_1) \cup m(n''_2)$. Отсюда следует, что $m(n''_1 + n''_2) \cap (m(n''_1) \cup m(n''_2)) = \emptyset$.

Итак, с самого начала можно выбрать элементы $n_1, n_2 \in Q(Y)$ со свойствами: $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$, $m(n_1 + n_2) \cap (m(n_1) \cup m(n_2)) = \emptyset$.

Нам понадобится

ЛЕММА 6 [2]. Если Y – чебышевское подпространство в $C[K]$ и $n \in Q(Y)$, то всякая не тождественная нулю функция $y \in Y$ не обращается в нуль тождественно на множестве $m(n)$.

Мы предположили, что $Q(Y)$ – линейное подпространство. Следовательно, $n_1 + n_2 \in Q(Y)$. Согласно лемме 6 найдутся точка $\tau \in m(n_1 + n_2)$ и функция $y \in Y$ такие, что $y(\tau) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что и $(n_1 + n_2)(\tau) > 0$.

Для точки τ выберем окрестность V так, чтобы при $t \in V$ выполнялись неравенства $y(t) > y(\tau)/2$, $(n_1 + n_2)(t) > 0$ и чтобы замыкание $\bar{V}$ не пересекалось с множествами $m(n_1)$ и $m(n_2)$. Вновь, пользуясь леммой Урысона, возьмем функцию $h \in C[K]$ со свойствами: $h(\tau) = 1$, $h(t) \equiv 1 - \varepsilon$ при $t \in K \setminus V$ и $1 - \varepsilon \leq h(t) \leq 1$ при всех $t \in K$. При этом $\varepsilon \in (0, 1)$ выберем столь малым, чтобы выполнялись равенства $\|h \cdot n_i\| = 1 - \varepsilon$ и $m(h \cdot n_i) = m(n_i)$, $i = 1, 2$.

Тогда $h \cdot n_i \in Q(Y)$ согласно (*), откуда $n := h \cdot (n_1 + n_2) \in Q(Y)$ в силу линейности $Q(Y)$. С другой стороны, поскольку $m(n) \subset (V \cap m(n_1 + n_2))$, то $n(t) > 0$ и $y(t) > y(\tau)/2 > 0$ при $t \in m(n)$. Отсюда $\|n - \lambda y\| < \|n\|$ при достаточно малых положительных λ , так что функция n не может быть квазиортогональной к подпространству Y . Полученное противоречие приводит к тому, что предположение о линейности $Q(Y)$ неверно. Теорема доказана.

В качестве примера подпространства из теоремы 3 возьмем подпространство $Y := \{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$. Очевидно, Y имеет коразмерность 1 в $C[0, 1]$. Нетрудно

проверить, что $Q(Y)$ состоит из постоянных функций, так что по лемме 4 Y – чебышевское подпространство. Оператор метрического проектирования на это подпространство действует так: $P_Y(f)(t) = f(t) - \int_0^1 f(\tau) d\tau$, т.е. является линейным оператором.

Автор благодарен Е. П. Долженко и С. В. Конягину за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Singer I. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Bucharest: Publ. House Acad. R. S. România, 1970; Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1970.
- [2] Cheney E. W., Wulbert D. E. The existence and unicity of best approximations // Math. Scand. 1969. V. 24. № 1. P. 113–140.
- [3] Morris P. D. Chebyshev subspaces of L^1 with linear metric projection // J. Approx. Theory. 1980. V. 29. № 3. P. 231–234.
- [4] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
- [5] Гаркави А. Л. Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1969. С. 75–132.
- [6] Phelps R. R. Chebyshev subspaces of finite dimension in L_1 // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. № 3. P. 646–652.
- [7] Гаркави А. Л. Характеристика чебышевских подпространств конечной коразмерности в L_1 // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 2. С. 155–163.
- [8] Phelps R. R. Uniqueness of Hahn–Banach extensions and unique best approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. № 2. P. 238–255.
- [9] Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

13.05.96

Исправленный вариант

05.03.97