Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Долженко, О граничном поведении компонент полианалитической функции, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 821–834

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:49:41

УДК 517.5

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ КОМПОНЕНТ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Е. П. Долженко

Для $p \geq 0$ вводятся два класса: $CU^p(G)$ – класс функций, равномерно непрерывных порядка p в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\mathcal{M}^p(G)$ – класс функций, имеющих в G ограниченность порядка p . Доказывается критерий принадлежности n -аналитической функции каждому из этих классов.

Библиография: 10 названий.

Введение. Функция $f(z) = f(x, y)$ (вообще говоря, комплекснозначная), имеющая в области $G \subset \mathbb{C}$ непрерывные частные производные по x и y до порядка $n \geq 1$, называется *полианалитической порядка n* в G , или *n -аналитической* в G , если она удовлетворяет обобщенному уравнению Коши–Римана $\partial^n f / \partial \bar{z}^n = 0$. Класс всех таких функций обозначим через $A_n(G)$. Как обычно, класс всех непрерывных на $\bar{G}$ функций обозначим через $C(\bar{G})$. Функции $f \in A_2(G)$ называются *бианалитическими* в G . Всякую функцию $f \in A_n(G)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}\varphi_{n-1}(z), \quad (1)$$

где функции φ_k голоморфны в G . В единичном круге $D := \{z : |z| < 1\}$ представление (1) легко преобразуется к виду

$$f(z) = P(z, \bar{z}) + g_0(z) + (1 - |z|^2)g_1(z) + \cdots + (1 - |z|^2)^{n-1}g_{n-1}(z), \quad z \in D, \quad (2)$$

$$P(z, \bar{z}) = \bar{z}P_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}P_{n-1}(z),$$

где $P_k(z)$ при $k \geq 1$ – полином от z степени $\leq k - 1$, g_k голоморфны в D .

Известно [1]–[3], что если замкнутая жорданова аналитическая кривая Γ ограничивает область $G \subset \mathbb{C}$, $w = \varphi(z)$ – какое-либо однолистное конформное отображение G на круг D , ψ – обратное отображение, то уравнение кривой Γ может быть записано в виде $\bar{z} = a(z)$. Здесь функция

$$a(z) := a_\Gamma(z) = \overline{\psi(1/\overline{\varphi(z)})} \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01366.

(нередко называемая функцией Шварца) голоморфна и однолистка в некоторой окрестности кривой Γ , причем в некоторой окрестности $Q(a_\Gamma)$ этой кривой выполняется неравенство

$$K\rho(z, \Gamma) \leq |\bar{z} - a(z)| \leq L\rho(z, \Gamma), \quad z \in Q(a_\Gamma), \quad (4)$$

где $\rho(z, \Gamma)$ – расстояние от z до Γ , а положительные постоянные K и L не зависят от $z \in Q(a_\Gamma)$. Отметим, что $a_{\partial D}(z) = 1/\bar{z}$. Разложив $\bar{z}^k$ из (1) по степеням $(\bar{z} - a(z))$, видим, что если функция $f(z)$ n -аналитична в некоторой, возможно односторонней ($Q \cap \Gamma = \emptyset$), окрестности Q аналитической кривой Γ и функция $a = a_\Gamma$ голоморфна в Q , то

$$f(z) = h_0(z) + (\bar{z} - a(z))h_1(z) + \dots + (\bar{z} - a(z))^{n-1}h_{n-1}(z), \quad z \in Q, \quad (5)$$

где функции h_k голоморфны в Q . Это обобщение представления (2).

Функции φ_k , g_k и h_k называются голоморфными компонентами функции $f \in A_n(G)$ (очевидно, $h_{n-1} \equiv \varphi_{n-1}$).

Известно, что “хорошие” свойства полианалитической функции не распространяются автоматически на ее голоморфные компоненты. Например, существуют функции f , бианалитические в D и непрерывные на $\bar{D}$, голоморфные компоненты которых не только имеют разрыв в каждой точке $\zeta \in \partial D$, но и почти всюду на ∂D не имеют даже угловых пределов (см. лемму 5). Главным результатом этой работы является теорема 1 о том, что равномерные граничные свойства слагаемых в представлениях (2) и (5) функции $f \in A_n(G)$ не хуже, чем соответствующие свойства самой f .

Напомним и введем некоторые определения и обозначения.

Как обычно, $\omega(f, E, \delta) := \sup\{|f(z) - f(t)| : z, t \in E, |z - t| \leq \delta\}$, $\delta \geq 0$, – модуль непрерывности функции $f(z)$, $z \in E \subset \mathbb{C}$. Функция $\omega(r)$ называется *модулем непрерывности* (вообще), если она определена, неотрицательна и не убывает при $r \geq 0$, причем $\omega(0) = 0$, $\omega(u+v) \leq \omega(u) + \omega(v)$ при любых неотрицательных u и v . Если $f(z)$ ограничена на *выпуклом* множестве E , то $\omega(r) := \omega(f, E, r)$ обладает всеми этими свойствами. Для любого модуля непрерывности $\omega(r)$ найдется *выпуклый вверх* при $r \geq 0$ и *дважды непрерывно дифференцируемый* при $r > 0$ модуль непрерывности $\tilde{\omega}(r)$ такой, что $3^{-1}\omega(r) \leq \tilde{\omega}(r) \leq 3\omega(r)$ при $r \geq 0$ (см. [4, п. 3.3]).

1. Ореольная разность и ореольный модуль непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для числа $R > 0$ и функции $f(z)$, заданной в точке z и интегрируемой по Лебегу на окружности $\mathcal{C} = \{z : |t - z| = R\}$,

$$\Delta_R f(x, y) = \Delta_R f(z) := \frac{1}{2\pi R} \int_{\mathcal{C}} (f(t) - f(z)) |dt| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z + Re^{i\vartheta}) - f(z)) d\vartheta$$

назовем *ореольной разностью радиуса R функции f в точке z* . Очевидно,

$$\Delta_R f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (f(t) - f(z)) \frac{dt}{t - z}. \quad (6)$$

Известно, что если функция $f(x, y)$ дважды гладкая вблизи (x, y) , то

$$\lim_{R \rightarrow 0} R^{-2} \Delta_R f(x, y) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

В случае функции $f(z)$, для которой в точке z определена n -я степень оператора Δ_R , выражение $\Delta_R^n f(z)$ будем называть n -й *ореольной разностью радиуса R функции f в точке z* .

Назовем *ореольным модулем непрерывности* порядка q ($q \geq 1$) функции f , заданной в некоторой области G , функцию

$$\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta) := \sup\{|\Delta_R^q f(z)|\}, \quad 0 < \delta < \infty, \quad \omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, 0) = 0,$$

где супремум берется по всем парам (z, R) таким, что $0 < R \leq \delta$, при этом замкнутый круг радиуса qR с центром z лежит в G .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $p \geq 0$ из определений $\Delta_R^q f(z)$ и $\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta)$ видно, что если $f \in \mathfrak{M}^p(G)$ (см. ниже определение 2), то $\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta) = O(\delta^s)$ при $\delta \rightarrow 0$, где $s = \min\{p, q\}$, а если $f \in CUP(G)$, то $\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta) = o(\delta^s)$.

Далее, как обычно,

$$C_k^p := \frac{k!}{p!(k-p)!}.$$

ЛЕММА 1. Если $f \in A_n(G)$ представлена в виде (1), то

$$\Delta_R f(z) = \sum_{p=0}^{n-2} \bar{z}^p S_p(f, R; z), \quad z \in G, \quad 0 < R < \rho := \rho(z, \partial G), \quad (7)$$

$$S_p(f, R; z) := \sum_{k=p+1}^{n-1} C_k^p \frac{R^{2k-2p}}{(k-p)!} \varphi_k^{(k-p)}(z), \quad p = 0, \dots, n-2,$$

$$\Delta_R^{n-1} f(z) = (n-1)! R^{2n-2} \varphi_{n-1}^{(n-1)}(z), \quad n \geq 2, \quad z \in G, \quad 0 < R < \frac{\rho(z, \partial G)}{n-1}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{t : |t - z| \leq R\} \subset G$, то

$$\Delta_R f(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\bar{t}^k - \bar{z}^k}{t - z} \varphi_k(t) dt, \quad \mathcal{C} = \{z : |t - z| = R\} \quad (9)$$

(см. (6) и (1)). Далее,

$$\begin{aligned} \bar{t}^k - \bar{z}^k &= \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p (\bar{t} - \bar{z})^{k-p} \bar{z}^p, \\ \int_{\mathcal{C}} (\bar{t} - \bar{z})^q \varphi_k(t) (t - z)^{-1} dt &= R^{2q} \int_{\mathcal{C}} \varphi_k(t) (t - z)^{-q-1} dt = R^{2q} \frac{2\pi i}{q!} \varphi_k^{(q)}(z), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\bar{t}^k - \bar{z}^k}{t - z} \varphi_k(t) dt &= \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p \frac{1}{(k-p)!} R^{2(k-p)} \bar{z}^p \varphi_k^{(k-p)}(z), \\ \Delta_R f(z) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p \frac{1}{(k-p)!} R^{2(k-p)} \bar{z}^p \varphi_k^{(k-p)}(z) = \sum_{p=0}^{n-2} \bar{z}^p S_p(f, R; z) \end{aligned}$$

(см. (9)), и (7) доказано. Так как старший член (при $p = n-2, k = n-1$) суммы (7) имеет вид $\bar{z}^{n-2} S_{n-2}(f, R; z) = \bar{z}^{n-2} (n-1) R^2 \varphi'_{n-1}(z)$, для $(n-1)$ -й степени оператора Δ_R получаем выражение (8).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f \in A_n(G)$, $n \geq 2$, то (см. (1))

$$|\varphi_{n-1}^{(n-1)}(z)| \leq C_n \rho^{2(1-n)} \omega_{\text{ор}}^{(n-1)}\left(f, G, \frac{\rho}{n}\right), \quad z \in G, \quad \rho = \rho(z, \partial G),$$

где

$$C_n = \frac{n^{2n-2}}{(n-1)!} < e^n n^{n-1} (2\pi(n-1))^{-1/2}.$$

(Для оценки C_n нужна формула Стирлинга и неравенство $(n/(n-1))^{n-1} < e$.)

2. Равномерная ограниченность и равномерная непрерывность. Пусть p — действительное число. Обозначим через $\langle p \rangle$ наибольшее целое число строго меньше p ($p = \langle p \rangle + \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ограниченными (соответственно равномерно непрерывными) порядка 0 в области G назовем функции, ограниченные (соответственно равномерно непрерывные) в этой области. При $p > 0$ назовем функцию $f(z) = f(x, y)$ *ограниченной* порядка p в области G , если у нее в G существуют все частные производные порядков не выше $\langle p \rangle$, причем производные порядка меньшего $\langle p \rangle$ удовлетворяют условию Lip 1 (считаем $\partial^0 f / \partial x^0 \partial y^0 := f$), а все производные порядка $\langle p \rangle$ — условию Lip($p - \langle p \rangle$). Если при этом существуют все частные производные порядка $[p]$ и их модули непрерывности в G суть величины порядка $o(r^{p-[p]})$ при $r \rightarrow 0$, то назовем f *равномерно непрерывной* порядка p в области G . При $p < 0$ назовем локально ограниченную в G функцию f *ограниченной* порядка p , если $|f(z)| = O(\rho^p)$ при $\rho = \rho(z, \partial G) \rightarrow 0$; если f непрерывна в G , $|f(z)| = o(\rho^p)$ при $\rho \rightarrow 0$, то назовем f *равномерно непрерывной* порядка p в области G .

Очевидно, если две любых точки z и t ограниченной области G можно соединить в G некоторой гладкой кривой $L(z, t)$ длины $\leq C|z - t|$, где C не зависит от z и t , то ограниченность (равномерная непрерывность) целого порядка $p > 0$ полианалитической в G функции f эквивалентна ограниченности (соответственно равномерной непрерывности) в G всех ее частных производных порядка p . Класс всех функций f , имеющих в области G ограниченность порядка p , будем обозначать через $\mathfrak{M}^p(G)$, а имеющих равномерную непрерывность порядка p — через $CU^p(G)$. Обобщением классов $\mathfrak{M}^p(G)$ являются классы $M(r^p \omega(r), G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть p — целое число, $p \in (-\infty, \infty)$, $\omega(r)$ — модуль непрерывности, G — область, функция f определена и локально ограничена в G . Скажем, что f обладает *ограниченностью уточненного порядка* $r^p \omega(r)$, и будем писать $f \in M(r^p \omega(r), G)$, если для $p < 0$ $|f(z)| = O(\rho^p \omega(\rho))$ при $\rho = \rho(z, \partial G) \rightarrow 0$ или для $p \geq 0$ f имеет в G частные производные всех порядков $\leq p$, причем модули непрерывности всех производных порядка p в G суть $O(\omega(r))$, а производные меньших порядков в G удовлетворяют условию Lip 1.

Согласно сказанному выше для ограниченной области G (а именно такие области рассматриваются) мы, не уменьшая общности, можем считать, что либо $\omega(r) \equiv 1$ при $r > 0$ ($\omega(0) = 0$), либо $\omega(r)$ непрерывна и выпукла вверх при $r \geq 0$ и непрерывно дифференцируема при $r > 0$. При этом, очевидно, в определениях классов $\mathfrak{M}(\cdot)$ и $CU(\cdot)$ можно не требовать того, чтобы функция $\omega(r)$ обладала свойствами модуля непрерывности или отмеченными усиленными свойствами при всех $r \geq 0$; достаточно, чтобы эти свойства имели место на некотором отрезке $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ (в этом случае $\omega(r)$ можно продолжить на $[0, \infty)$ с сохранением указанных свойств).

ЛЕММА 2. Пусть G – область, ограниченная конечным числом замкнутых гладких жордановых кривых без общих точек, j, p ($j > p$, $j \geq 1$) – целые числа, $\omega(r)$ – модуль непрерывности, функция $f(z) = f(x, y)$ имеет в G непрерывные частные производные всех порядков $\leq j$, при этом производные порядка j принадлежат $M(r^{p-j}\omega(r))$. Тогда

$$f \in M(r^p\omega(r)), \quad p \leq -2, \quad (10)$$

$$f \in M\left(\int_r^1 \frac{\omega(s)}{s^2} ds\right), \quad p = -1, \quad (11)$$

$$f \in M\left(r^p \int_r^1 \frac{\omega(s)}{s} ds\right), \quad p \geq 0, \quad (12)$$

$$f \in M\left(r^p \int_0^r \frac{\omega(s)}{s} ds + r^{p+1} \int_r^1 \frac{\omega(s)}{s^2} ds\right), \quad p \geq 0, \quad \int_0^1 \frac{\omega(s)}{s} ds < \infty, \quad (13)$$

$$f \in M\left(r^p \int_0^r \frac{\omega(s)}{s} ds\right), \quad p \geq 0, \quad j = p + 1, \quad \int_0^1 \frac{\omega(s)}{s} ds < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\omega(r)$ – выпуклый вверх и непрерывно дифференцируемый при $r > 0$ модуль непрерывности, то соотношения (11)–(13) можно записать в “каноническом” виде $f \in M(r^q\omega_k(r))$ (см. определение 3), где q – целое число, а $\omega_k(r)$ – выпуклые вверх и непрерывно дифференцируемые при $r > 0$ модули непрерывности ($k = 1, 2, 3, 4$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Считаем функцию $\omega(r)$ выпуклой вверх при $r \geq 0$ и непрерывно дифференцируемой при $r > 0$.

Пусть $L(z)$ – какая-либо гладкая кривая, соединяющая некоторую фиксированную точку $b \in G$ с $z \in G$,

$$g_{j,q}(t) := \frac{\partial^j f(z)}{\partial x^q \partial y^{j-q}} \Big|_{z=t}, \quad 0 \leq q \leq j,$$

$dg_{j,q}(t)/ds$ – производная $g_{j,q}(t)$ по длине дуги кривой $L(z)$ в отрицательном направлении в точке $t \in L(z)$. Очевидно,

$$\left| \frac{dg_{j-1,q}(t)}{ds} \right| \leq |g_{j,q+1}(t)| + |g_{j,q}(t)|, \quad t \in L(z), \quad 0 \leq q \leq j-1.$$

Выбирая кривую $L(z)$ так, чтобы ее конец приближался к z по нормали к $\Gamma = \partial G$ (нормали из ближайшей к z точки $\zeta \in \Gamma$), проходящей через z , и интегрируя $dg_{j-1,q}(t)/ds$ по ds вдоль $L(z)$ от z до b , получим равномерное по $z \rightarrow \Gamma$ соотношение

$$\left| \frac{\partial^{j-1} f(z)}{\partial x^q \partial y^{j-1-q}} \right| = O\left(\int_\rho^1 r^{p-j}\omega(r) dr\right), \quad \rho = \rho(z, \Gamma) \rightarrow 0, \quad 0 \leq q \leq j-1. \quad (14)$$

Последовательно применяя равенство (14) и заменяя в нем j на $j-1, j-2, \dots, 1$, с помощью формулы Коши для j -кратного повторного интеграла по нижнему пределу получим

$$|f(z)| = O\left(\int_\rho^1 (r-\rho)^{j-1} r^{p-j}\omega(r) dr\right) = O\left(\int_\rho^1 r^{p-1}\omega(r) dr\right), \quad \rho = \rho(z, \Gamma) \rightarrow 0. \quad (15)$$

При $p = -1$ это дает (11). При $p \leq -2$, используя формулу интегрирования по частям и то, что при $u(r) := \int_0^r \omega(x) dx$ $\frac{1}{2}r\omega(r) \leq u(r) \leq r\omega(r)$, получаем неравенство

$$J := \int_{\rho}^1 r^{p-1} \omega(r) dr = u(1) - \rho^{p-1} u(\rho) + (1-p) \int_{\rho}^1 u(r) r^{p-2} dr > 0 - \rho^p \omega(\rho) + \frac{1}{2}(1-p)J,$$

откуда $J < 2\rho^p \omega(\rho)$. Вместе с (15) это дает (10).

Если $p \geq 0$, то, последовательно применяя равенство (14) и заменяя в нем j на $j, j-1, j-2, \dots, p+1$, получим

$$\left| \frac{\partial^p f(z)}{\partial x^q \partial y^{p-q}} \right| = O\left(\int_{\rho}^1 \frac{\omega(r)}{r} dr\right), \quad \rho = \rho(z, \Gamma) \rightarrow 0, \quad 0 \leq q \leq p,$$

что доказывает (12).

Наконец, пусть $p \geq 0$ и $\int_0^1 \frac{\omega(s)}{s} ds < \infty$. Покажем, что каждая функция

$$g_{p,q}(z) = \frac{\partial^p f(z)}{\partial x^q \partial y^{p-q}}, \quad 0 \leq q \leq p,$$

непрерывно продолжается на Γ и

$$\omega(g_{p,q}, \Gamma, \delta) = O\left(\int_0^{\delta} \frac{\omega(r)}{r} dr + \delta \int_{\delta}^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr\right), \quad \delta \rightarrow 0, \quad (16)$$

причем в случае $j = p+1$ второе слагаемое из правой части (16) отсутствует.

Заметим, что если $j = p+1$, то

$$g_{p+1,q}(z) = O\left(\frac{\omega(\rho)}{\rho}\right), \quad \rho = \rho(z, \Gamma) \rightarrow 0, \quad 0 \leq q \leq p+1, \quad (17)$$

так как $g_{j,q} \in M(r^{p-j}\omega(r))$. Если $j > p+1$, то, как выше, последовательно применяя равенство (14) и заменяя в нем j на $j, j-1, j-2, \dots, j-p-1$, получим при $0 \leq q \leq p+1$

$$|g_{p+1,q}(z)| = O\left(\int_{\rho}^1 (r-\rho)^{j-p-2} r^{p-j} \omega(r) dr\right) = O\left(\int_{\rho}^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr\right), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (18)$$

Пусть теперь $w \in \Gamma$, гладкая кривая $L(w)$ всеми своими точками, кроме w , лежит в G , начинается в точке $b \in G$ и оканчивается отрезком нормали к Γ в точке w . Тогда ввиду (17) и (18) интеграл вдоль $L(w)$ по ds от $dg_{p,q}(z)/ds$ существует и не зависит от выбора $L(w)$, так что $g_{p,q}(z)$ имеет в точке w некоторый предел $g_{p,q}(w)$ по нормали. Если $v, w \in \Gamma$ и $d := |v - w|$ мало, то внутренние нормали длины d к Γ , выходящие из v и w , с концами V и W соответственно вместе с отрезком $[V, W]$ образуют трехзвенную ломаную, соединяющую v с w . Из (18) следует, что при $j > p+1$ приращения $\Delta_v V$ и $\Delta_w W$ функции $g_{p,q}(z)$ на $[v, V]$ и $[W, w]$ суть величины порядка

$$O\left(\int_0^d \left(\int_{\rho}^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr\right) d\rho\right) = O\left(d \int_d^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr + \int_0^d \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho\right),$$

а ее приращение Δ_{VW} на $[V, W]$ – величина порядка

$$O\left(d \int_d^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr\right)$$

равномерно по парам v и w при $d \rightarrow 0$. Если $j = p + 1$, то из (17) имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{vV} &= O\left(\int_0^d \frac{\omega(r)}{r} dr\right), & \Delta_{wW} &= O\left(\int_0^d \frac{\omega(r)}{r} dr\right), \\ \Delta_{VW} &= O(\omega(d)) = O\left(\int_0^d \frac{\omega(r)}{r} dr\right).\end{aligned}$$

Последнее порядковое равенство следует (ввиду выпуклости вверх функции $\omega(r)$) из монотонного убывания $\omega(r)/r$. Таким образом, (16) доказано.

Далее, в случае односвязной области G положим $h = 1$, в случае неодносвязной – $h := \min\{1, h'\}$, где h' – минимум попарных расстояний между связными компонентами Γ . Пусть γ – одна из таких компонент, $G(\gamma) := \{z \in G : \rho(z, \gamma) < h/4\}$. Возьмем какие-либо точки $V, W \in G(\gamma)$. Пусть v и w – те точки на γ , ближайшие к V и W соответственно, расстояние между которыми минимально. Положим $\delta := |V - W|$, $R := \min\{\rho(V, \Gamma), \rho(W, \Gamma)\}$.

Если $\delta \geq R$, то $|\Delta_{VW}| \leq |\Delta_{vV}| + |\Delta_{vw}| + |\Delta_{wW}|$, так что

$$|g_{p,q}(V) - g_{p,q}(W)| \leq B\left(\int_0^\delta \frac{\omega(r)}{r} dr + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr\right), \quad \delta \geq 0, \quad 0 \leq q \leq p \quad (19)$$

(B не зависит от V и W). Если $\delta < R$, то любая точка $t \in [V, W]$ удалена от Γ не менее чем на $R/2$, и из (17) при $j = p + 1$ получаем

$$|g_{p,q}(V) - g_{p,q}(W)| \leq C_1\left(\frac{2}{R}\right)\omega\left(\frac{R}{2}\right)\delta \leq C_2 \int_0^\delta \frac{\omega(r)}{r} dr,$$

поскольку функция $\omega(r)/r$ убывает и

$$\frac{2}{R}\omega\left(\frac{\delta}{2}\right)\delta \leq 2\omega\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq 2\omega(\delta) \leq 2 \int_0^\delta \frac{\omega(r)}{r} dr.$$

При $j > p + 1$ из (18) имеем

$$|g_{p,q}(V) - g_{p,q}(W)| \leq C_3\left(\int_0^\delta \frac{\omega(r)}{r} dr + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(r)}{r^2} dr\right),$$

так что при $\delta = |V - W| \rightarrow 0$ и любом расположении точек V и W в $G(\gamma)$ имеем неравенство (19). Таким образом, соотношения (13) доказаны.

Из леммы 2 непосредственно вытекает необходимая для дальнейшего

ЛЕММА 3. Если область G ограничена конечным числом замкнутых гладких жордановых кривых без общих точек, p – отрицательное или нецелое положительное число, j – натуральное число, все частные производные порядка j функции f принадлежат классу $\mathfrak{M}^{p-j}(G)$ (или $CU^{p-j}(G)$), то $f \in \mathfrak{M}^p(G)$ (соответственно $f \in CU^p(G)$).

3. Основная теорема. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1.

ЛЕММА 4. Пусть Γ – замкнутая жорданова аналитическая кривая, функция $a(z) = a_\Gamma(z)$ голоморфна и удовлетворяет неравенствам (4) на замыкании некоторой двусвязной области Q , ограниченной кривой Γ и замкнутой жордановой аналитической кривой $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \cap \Gamma = \emptyset$, функция $h(z)$ голоморфна на $Q \cup \mathcal{L}$, p – действительное число, k – натуральное. Тогда для принадлежности $(k+1)$ -аналитической в Q функции $f(z) = (\bar{z} - a(z))^k h(z)$ к $\mathfrak{M}^{k+p}(Q)$ или $CU^{k+p}(Q)$ необходима и достаточна принадлежность h к $\mathfrak{M}^p(Q)$ или $CU^p(Q)$ соответственно. Если $h \in \mathfrak{M}^p(Q)$ и $p + k > 0$, то функция f , доопределенная на Γ нулем, и все ее частные производные порядков меньше $k + \langle p \rangle$ удовлетворяют на $\bar{Q}$ условию $\text{Lip } 1$, а производные порядка $k + \langle p \rangle$ – условию $\text{Lip}(p - \langle p \rangle)$; при этом все производные порядков $0 < q < k - p^-$ равны 0 на Γ ($p^- := \max\{-p, 0\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее $\rho := \rho(z, \Gamma) < \rho(\Gamma, \mathcal{L})/2$.

Необходимость. Пусть $f \in \mathfrak{M}^{k+p}(Q)$. Если $p \geq 0$, то голоморфная функция

$$h = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \bar{z}^k}$$

принадлежит $\mathfrak{M}^p(Q)$, что и требуется. Если $p < 0$ и $k + p \leq 0$, то $|f(z)| = O(\rho^{k+p})$, $\rho \rightarrow 0$, и (из определения f) $|h(z)| = O(\rho^p)$, $h \in \mathfrak{M}^p(Q)$. Если $p < 0$, $k + p > 0$, то в силу замечания 1 и следствия 1 имеем

$$|h^{(k)}(z)| = O(\rho^{-2k} \rho^{k+p}) = O(\rho^{p-k}), \quad h^{(k)} \in \mathfrak{M}^{p-k}(Q)$$

($h_n \equiv \varphi_n$, см. (1) и (5)). Отсюда согласно лемме 3 $h \in \mathfrak{M}^p(Q)$.

Достаточность. Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

то

$$\frac{\partial^q f(z)}{\partial x^r \partial y^{q-r}} = \sum_{\substack{0 \leq m \leq k \\ 0 \leq j \leq q \\ 1 \leq j+m \leq q}} u_{m,j}(z) (\bar{z} - a(z))^{k-m} h^{(j)}(z), \quad q \geq 1, \quad 0 \leq r \leq q, \quad (20)$$

где функции $u_{m,j}(z) = u_{m,j}(q, r; z)$ голоморфны на $Q \cup \Gamma$. Пусть $h \in \mathfrak{M}^p(Q)$.

1) Пусть $p > 0$ – нецелое, $p = v + \alpha$ ($v = [p] \geq 0$, $0 < \alpha < 1$). Если $j \leq v$, то функция $f_{m,j}(z) := (\bar{z} - a(z))^{k-m} h^{(j)}(z)$ непрерывна и удовлетворяет условию $\text{Lip } \alpha$ на $\bar{Q}$ (см. (4)), и если $q < k$, то $f_{m,j}(z) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Если $j \geq v + 1 (> p)$, представим

в Q функцию $h^{(v)} \in \text{Lip } \alpha$ в виде интеграла Коши по ∂Q . С помощью формулы Коши для производных получим соотношение

$$h^{(j)}(z) = \frac{d^{j-v} h^{(v)}(z)}{dz^{j-v}} = O(\rho^{\alpha-(j-v)}) = O(\rho^{p-j}),$$

которое вместе с (4) дает

$$f_{m,j}(z) = O(\rho^{(k+p)-(m+j)}) = O(\rho^{k+p-q}), \quad (21)$$

так что и в этом случае $f_{m,j}(z) \rightarrow 0$ при $q < k + p$ и $\rho \rightarrow 0$. Из сказанного следует, что

$$\frac{\partial^q f(z)}{\partial x^r \partial y^{q-r}} \rightarrow 0 \quad \text{при } q < k, \quad 0 \leq r \leq q, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Из (21) имеем при $0 \leq r \leq q$ и $\rho \rightarrow 0$ соотношения (см. лемму 3)

$$\frac{\partial^{k+v+1} f(z)}{\partial x^r \partial y^{k+v+1-r}} = O(\rho^{\alpha-1}), \quad f \in \mathfrak{M}^{k+p}(Q).$$

2) Пусть $p \geq 0$ – целое. Тогда $|h^{(j)}(z)| \leq M = \text{const}$ при $j \leq p, z \in Q$. Если $j > p, z \in Q$, то

$$h^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi i} (j-p)! \int_{\mathcal{C}} h^{(p)}(t) (t-z)^{-(j-p)-1} dt, \quad \mathcal{C} = \left\{ t : |t-z| = \frac{\rho}{2} \right\},$$

откуда $|h^{(j)}(z)| = O(\rho^{p-j})$. Итак, в любом случае выполняется равенство (21), из которого следует ограниченность всех $(k+p)$ -х частных производных функции f и принадлежность f к $\mathfrak{M}^{p+k}(Q)$, а также стремление к 0 (при $\rho \rightarrow 0$) всех ее частных производных порядков $q < k$.

3) Пусть $p < 0, k+p \leq 0$. Тогда $|h(z)| = O(\rho^p), |f(z)| = O(\rho^{k+p}), f \in \mathfrak{M}^{k+p}(Q)$.

4) Наконец, пусть $p < 0, k+p > 0$. Из неравенства Коши

$$|h^{(j)}(z)| \leq j! \max \left\{ |h(t)| : |t-z| = \frac{\rho}{2} \right\} \left(\frac{2}{\rho} \right)^j$$

имеем $h^{(j)}(z) = O(\rho^{p-j})$ при $\rho \rightarrow 0$. Отсюда и из (4) вытекает (21). При $q = k + \langle p \rangle + 1$ из (21) и (20) имеем

$$\frac{\partial^q f(z)}{\partial x^r \partial y^{q-r}} = O(\rho^{p-\langle p \rangle-1}), \quad 0 \leq r \leq q.$$

При целом p это дает ограниченность производных порядка $q = k + \langle p \rangle + 1 = k + p$ функции f , а при нецелом p означает, что производные порядка $q = k + [p] + 1$ функции f суть $O(\rho^{p-[p]-1})$. В обоих случаях $f \in \mathfrak{M}^{k+p}(Q)$ (см. лемму 3). Из (21) также следует, что

$$\frac{\partial^q f(z)}{\partial x^r \partial y^{q-r}} \rightarrow 0 \quad \text{при } 0 \leq q < k+p, \quad 0 \leq r \leq q, \quad z \rightarrow \Gamma.$$

Случай $h \in CU^p(Q)$ рассматривается совершенно аналогично.

Следующая теорема является основной в этой работе. Из нее следует, что слагаемые представлений (2) и (5) почти не интерферируют, т.е. они как бы “ортогональны”. Вероятно, этот факт играет важную роль в граничном поведении полианалитических функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – область, в состав границы которой входит замкнутая жорданова аналитическая кривая Γ , $\rho(\Gamma, \partial G \setminus \Gamma) > 0$, полианалитическая в G функция f представлена вблизи Γ в виде (5), $f_k(z) := (\bar{z} - a(z))^k h_k(z)$, $0 \leq k \leq n-1$. Тогда в некоторой односторонней окрестности $Q \subset G$ кривой Γ имеем при любом $p \in \mathbb{R}$ эквиваленции:

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{M}^p(Q) &\iff f_k \in \mathfrak{M}^p(Q) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1 \\ &\iff h_k \in \mathfrak{M}^{p-k}(Q) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} f \in CU^p(Q) &\iff f_k \in CU^p(Q) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1 \\ &\iff h_k \in CU^{p-k}(Q) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q , $Q \subset G$, – какая-либо односторонняя окрестность кривой Γ , в которой определена $a_\Gamma(z)$ и выполняются неравенства (4), $\rho := \rho(z, \Gamma)$.

Докажем (22). Пусть $f \in \mathfrak{M}^p(Q)$. Если $p \geq n-1$, то

$$(n-1)!h_{n-1} = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \bar{z}^{n-1}} \in \mathfrak{M}^{p-(n-1)},$$

и $f_{n-1} \in \mathfrak{M}^p(Q)$ в силу леммы 4. Если $p < n-1$, то

$$|h_{n-1}^{(n-1)}(z)| = O(\rho^{p-2(n-1)})$$

согласно следствию 1. Так как $p < n-1$, то, интегрируя $h_{n-1}^{(n-1)}(z)$ $(n-1)$ -кратно, получим $h_{n-1} \in \mathfrak{M}^{p-(n-1)}(Q)$, откуда $f_{n-1} \in \mathfrak{M}^p(Q)$ ввиду леммы 4. Таким образом,

$$f \in \mathfrak{M}^p(Q) \implies f_{n-1} \in \mathfrak{M}^p(Q).$$

Поэтому и $(n-1)$ -аналитическая функция $f(z) - (\bar{z} - a(z))^{n-1} h_{n-1}(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}^p(Q)$. По доказанному функция $(\bar{z} - a(z))^{n-2} h_{n-2}(z)$ принадлежит $\mathfrak{M}^p(Q)$ и т.д., пока не установим, что $h_0 \in \mathfrak{M}^p(Q)$. Итак,

$$f \in \mathfrak{M}^p(Q) \implies f_k \in \mathfrak{M}^p(Q) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1.$$

Обратное очевидно. Эквиваленция $f_k \in \mathfrak{M}^p(Q) \iff h_k \in \mathfrak{M}^{p-k}(Q)$ следует из леммы 4. Аналогично доказывается (23).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если область $G \subset \mathbb{C}$ ограничена конечным числом простых аналитических контуров без общих точек, $f \in A_n(G) \cap \mathfrak{M}^p(G)$ (или $f \in A_n(G) \cap CU^p(G)$), $p \in \mathbb{R}$, то (см. (1)) $\varphi_k \in \mathfrak{M}^{p-n+1}(G)$, $0 \leq k \leq n-1$ (соответственно $\varphi_k \in CU^{p-n+1}(G)$, $0 \leq k \leq n-1$). Это утверждение нельзя усилить ни при каком наборе чисел $n \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Действительно, первая часть утверждения следует из теоремы 1. Для доказательства второй части возьмем $f(z) = (1 - z\bar{z})^{n-1} g(z)$, где $g(z)$ голоморфна в D , $g \in \mathfrak{M}^q(D)$ при $q = p - n + 1$, но $g \notin \mathfrak{M}^q(D)$ при $q > p - n + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если область $G \subset \mathbb{C}$ ограничена простым аналитическим контуром Γ , $f \in A_n(G) \cap C(\overline{G})$, то в представлении (5) функции f имеет место равенство $h_0(t) \equiv f(t)$ на Γ . Если при этом $h_0(z)$ голоморфна всюду в G , то $\omega(h_0, \overline{G}, \delta) \leq 108\omega(f, \Gamma, \delta)$, $\delta \geq 0$.

Действительно, $f \in CU^0(G)$, значит $h_k \in CU^{-k}(G)$, $h_k(z) = o(\rho^{-k})$ при $1 \leq k \leq n-1$ ($\rho = \rho(z, \Gamma) \rightarrow 0$), $f_k(z) := (\overline{z} - a(z))^k h_k(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \Gamma$, так что $f_k(t) \equiv 0$ при $k \geq 1$, $h_0(t) \equiv f(t)$ ($t \in \Gamma$). Неравенство $\omega(g, \overline{G}, \delta) \leq 108\omega(g, \Gamma, \delta)$ доказано в [5] для произвольных голоморфных в G функций $g \in C(\overline{G})$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть функция $f \in A_n(D)$ представлена в виде (2), $f_k(z) := (1 - |z|^2)^k g_k(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{M}^p(D) &\iff f_k \in \mathfrak{M}^p(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1 \\ &\iff g_k \in \mathfrak{M}^{p-k}(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \\ f \in CU^p(D) &\iff f_k \in CU^p(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1 \\ &\iff g_k \in CU^{p-k}(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Если бианалитическая в круге D функция $f(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f, D, \delta) = O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0 \quad (24)$$

(т.е. $f \in \text{Lip } 1$ в D), то ее голоморфные компоненты $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ имеют почти всюду на ∂D конечные угловые пределы. Условие (24) нельзя ослабить до $\omega(f, G, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow 0$, каков бы ни был нелипшицев (т.е. $\omega(\delta)/\delta \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$) модуль непрерывности $\omega(\delta)$.

Последнее вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 5. Для любого нелипшицева модуля непрерывности $\omega(\delta)$ в $A_2(D) \cap C(\overline{D})$ имеется функция $f(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z)$, равная 0 на ∂D , для которой $\omega(f, \overline{D}, \delta) \leq \omega(\delta)$, $\delta \geq 0$, в то время как голоморфные функции $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ почти ни в одной точке $\zeta \in \partial D$ не имеют угловых пределов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Барта и Шнейдера [6] для любой функции $p(r) > 0$, $0 \leq r < 1$, монотонно возрастающей к $+\infty$ с ростом r от 0 до 1, существует голоморфная в D функция $\varphi(z) \neq 0$, имеющая почти в каждой точке $\zeta \in \partial D$ радиальный предел 0, причем $|\varphi(z)| < p(|z|)$, $z \in D$. По теореме единственности Лузина–Привалова [7] $\varphi(z)$ не имеет угловых пределов почти нигде на ∂D . Голоморфные компоненты функции $f(z) := (1 - z\overline{z})\varphi(z)$ также почти нигде на ∂D не имеют угловых пределов. Пусть при $0 < r < 1$ функция $p(r)$ такова, что

$$24(1-r)p(r) < \omega(1-r) \quad \text{и} \quad p\left(1 - \frac{1}{2}(1-r)\right) < 2p(r).$$

Тогда при $z \in D$ имеем

$$|f(z)| < 2(1-|z|)p(1-(1-|z|)) < \frac{1}{12}\omega(1-|z|),$$

$f(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow 1$. Положим $f(z) = 0$ на ∂D . Если $z \in \overline{D}$ и $t \in \partial D$, то для $\Delta := f(t) - f(z)$ получаем

$$|\Delta| \leq \frac{1}{12} \omega(1 - |z|) \leq \omega(|z - t|).$$

Если $z, t \in D$ и, например $1 - |t| < |t - z|$, то $1 - |z| \leq (1 - |t|) + |t - z|$ и

$$|\Delta| \leq |f(t)| + |f(z)| \leq \frac{1}{12} (\omega(1 - |t|) + \omega(1 - |t|) + \omega(|t - z|)) < \omega(|t - z|).$$

Пусть теперь $z, t \in D$, $|t - z| \leq 1 - |z| \leq 1 - |t|$. Если функция $g(z)$ голоморфна в некоторой области G , то при $2d = \rho =: \rho(z, \partial G)$ и $\mathcal{C} := \{t : |t - z| = d\}$ имеем

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} g(t)(t - z)^{-2} dt \right| \leq \frac{2}{\rho} \max \left\{ |g(t)| : t \in G, \rho(t, \partial G) = \frac{\rho}{2} \right\}. \quad (25)$$

Отсюда $|\varphi'(z)| < p(1 - d)/d$, и для приращения df функции f вдоль бесконечно малого вектора dz получаем неравенство

$$|df| \leq \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \right) |dz| < 2 \left(2p(1 - 2d) + \frac{2 \cdot 2d \cdot p(1 - d)}{d} \right) |dz| \leq 12p(1 - d)|dz|.$$

Интегрирование $df(z)$ вдоль отрезка $[z, t]$ дает неравенство

$$|\Delta| \leq 12p(1 - d)|t - z| \leq 24|t - z|p(1 - |t - z|) \leq \omega(|t - z|).$$

Итак, $|f(t) - f(z)| \leq \omega(|t - z|)$ для любых $z, t \in \overline{D}$, что и требовалось.

4. О теоремах типа Харди–Литтлвуда. Хорошо известны следующие две теоремы Харди и Литтлвуда (см., например, [8, гл. IX]).

ТЕОРЕМА I. *Голоморфная в единичном круге D функция f удовлетворяет в D условию $\text{Lip } p$, $0 < p \leq 1$, тогда и только тогда, когда $|f'(z)| = O((1 - |z|)^{p-1})$, $|z| \rightarrow 1$.*

ТЕОРЕМА II. *Пусть f голоморфна в D и непрерывна на $\overline{D}$. Тогда если $f \in \text{Lip } p$ на ∂D , $0 < p \leq 1$, то $f \in \text{Lip } p$ и на $\overline{D}$.*

Обобщающее теорему II неравенство Тамразова из [5] упоминалось выше. Следующая теорема непосредственно обобщает теорему I на полианалитические функции и произвольные $p \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2. *В области G , ограниченной простым или составным жордановым аналитическим контуром, имеем импликацию*

$$f \in \mathfrak{M}^p(G) \iff \frac{\partial f}{\partial z} \in \mathfrak{M}^{p-1}(G) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in \mathfrak{M}^{p-1}(G), \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (26)$$

$$f \in \mathfrak{M}^p(G) \implies \frac{\partial f}{\partial z} \in \mathfrak{M}^{p-1}(G) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in \mathfrak{M}^{p-1}(G), \quad p \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

а также импликации, получающиеся из них заменой либо $\mathfrak{M}$ на CU , либо $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \bar{z}$ на $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$, либо обеими этими заменами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала f голоморфна в G , $f \in \mathfrak{M}^p(G)$. Если $p \leq 0$, то $|f'(z)| = O(\rho^{p-1})$ (см. (25)), $f' \in \mathfrak{M}^{p-1}(G)$. Если $0 < p < 1$, то по теореме I $f' \in \mathfrak{M}^{p-1}(G)$. Отсюда $f \in \mathfrak{M}^p(G) \implies f' \in \mathfrak{M}^{p-1}(G)$ и для любого нецелого $p > 0$. Для целых $p > 0$ эта импликация следует из ограниченности $f^{(p)}(z)$.

Пусть теперь $f \in A_n(G) \cap \mathfrak{M}^p(G)$, Γ – один из связных контуров, составляющих ∂G . Тогда $f_k(z) := (\bar{z} - a(z))^k h_k(z)$ (см. (5)) также принадлежат классу $\mathfrak{M}^p$ вблизи Γ (теорема 1). Так как $h_k \in \mathfrak{M}^{p-k}$ вблизи Γ , то $h'_k \in \mathfrak{M}^{p-k-1}$, и $\partial f_k / \partial z, \partial f_k / \partial \bar{z} \in \mathfrak{M}^{p-1}$ вблизи Γ (см. (4)). Импликация (27) доказана. Если $\partial f_k / \partial z, \partial f_k / \partial \bar{z} \in \mathfrak{M}^{p-1}(G)$ и $p \neq 0$, то в силу леммы 3 $f \in \mathfrak{M}^p(G)$, так что импликация (26) также доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для того чтобы полианалитическая в единичном круге D функция f удовлетворяла на $\bar{D}$ условию $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| = O((1 - |z|)^{\alpha-1}).$$

Что касается теоремы II, то уже для бианалитических функций в общем случае дело обстоит совсем иначе: нетрудно построить функцию $f \in A_2(D) \cap C(\bar{D})$, равную 0 всюду на ∂D и имеющую на $\bar{D}$ сколь угодно плохой модуль непрерывности. По-видимому, в случае аналитичности ∂G порядковое равенство $\omega(f, \bar{G}, r) \asymp \omega(f, \Gamma, r)$ выполняется для любой функции $f \in A_n(G) \cap C(\bar{G})$, $n \geq 2$, тогда и только тогда, когда справедлива следующая теорема единственности:

$$f \in A_n(G) \cap C(\bar{G}) \text{ и } f(z) = 0 \quad \forall z \in \partial G \implies f(z) \equiv 0.$$

Области G , в которых справедлива эта теорема, полностью описаны в [9] (при $n = 2$) и в [10] (при $n \geq 3$).

5. Возможные обобщения. В приложениях возникает необходимость в *локальных формах теорем 1 и 2* и их следствий, т.е. в формулировках для случая, когда Γ – некоторая достижимая простая открытая аналитическая дуга границы области G . Такие обобщения получить нетрудно. Необходимые для этого естественные обобщения определения 2 сделать легко. Например, ограниченность (равномерная непрерывность) порядка $p \in (-\infty, +\infty)$ функции f вблизи дуги $\Gamma \subset \partial G$ будет означать наличие для *каждой* замкнутой дуги $s \subset \Gamma$ односвязной жордановой области $G(s) \subset G$ такой, что $s \subset \partial G(s)$, $f \in \mathfrak{M}^p(G(s))$ (соответственно $f \in CU^p(G(s))$). Справедливость локальных форм лемм 2–4, теорем 1, 2 и их следствий означает, что эти предложения выполняются в некоторой области $G(s)$ указанного типа для *каждой* замкнутой дуги $s \subset \Gamma$.

Определение функции Шварца $a_\Gamma(z)$ для простой открытой аналитической дуги Γ строится так:

- а) возьмем какую-либо открытую дугу $S \subset G$ так, чтобы ее концы совпадали с концами J, K дуги Γ и дуга S вместе с Γ , J и K ограничивала односвязную подобласть g области G ;
- б) возьмем какое-либо конформное отображение $w = \varphi(z)$ области g на единичный круг D , переводящее точки J и K в некоторые точки $j = \varphi(J)$ и $k = \varphi(K)$ окружности ∂D , симметричные относительно оси Ox ($k = \bar{j}$);
- в) функцию $a_\Gamma(z)$ для дуги Γ определим по φ равенством (3).

Из этого определения следует, что $a_\Gamma(z)$ голоморфна и однолистка в некоторой окрестности дуги Γ , а уравнение этой дуги записывается в виде $\bar{z} = a_\Gamma(z)$. Имея функцию Шварца $a = a_\Gamma$, представляем вблизи Γ функцию f , n -аналитическую в G , в виде (5) (или в виде (2), если $G \subset D$, $\Gamma \subset \partial D$), после чего доказательства локальных форм указанных лемм, теорем и следствий практически полностью сводятся к доказательствам, приведенным выше.

Оценки модулей непрерывности компонент и их производных нетрудно получить, используя леммы 1, 2 и соответствующее обобщение леммы 4 (см. доказательство теоремы 1).

С помощью методов, примененных в работе, наши результаты обобщаются на функции, *полигармонические* в круге D (как известно, такие функции f можно представить в виде (2), где g_k – гармонические функции в D , а $P(z, \bar{z}) = Q(x, y)$ – полином от x, y). Такие обобщения можно получить и из самих теорем 1 и 2, принимая во внимание, что f n -аналитична тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} f$ n -гармонична (см. (2)), и что $\operatorname{Re} g_k \in \mathfrak{M}^p \iff g_k \in \mathfrak{M}^p$, $\operatorname{Re} g_k \in CUP \iff g_k \in CUP$ (g_k голоморфна в D , $p \neq 0$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Balk M. B. Polyanalytic Functions. Math. Res. V. 63. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
- [2] Davis P. J. The Schwarz Function and Its Applications. Carus Math. Monographs. V. 17. Washington (D.C.): Math. Assoc. America, 1974.
- [3] Mathurin C. Fonction caracteristique d'un contour algebrique simple. Application a l'equation $\Delta(\Delta\varphi) = 0$ de l'elastostatique plane. Notes techniques du Ministere de l'Air. V. 105. Paris: Service de Documentation et d'Information technique de l'Aeronautique, 1962.
- [4] Долженко Е. П. Об особых точках непрерывных гармонических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 6. С. 1251–1270.
- [5] Тамразов П. М. Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // УМН. 1973. Т. 28. № 1. С. 131–161.
- [6] Barth K. F., Schneider W. J. On the impossibility for extending the Riesz uniqueness theorem to functions of slow growth // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I Math. 1968. V. 432. P. 1–9.
- [7] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [8] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [9] Хоп Н. Т. О нормальной разрешимости задачи Дирихле для одной эллиптической системы // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 2. С. 214–225.
- [10] Расулов К. М. О решении краевых задач типа задачи Дирихле для полианалитических функций // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 6. С. 1309–1313.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
28.10.96