Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, А. А. Амосов, Устойчивость обобщенных решений уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 835–846

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:44:55

УДК 517.958+533.7

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

А. А. Злотник, А. А. Амосов

Рассмотрены неоднородные начально-краевые задачи для квазилинейной системы уравнений составного типа, описывающей одномерное движение вязкого совершенного политропного газа. Начальные данные принадлежат пространствам $L_\infty(\Omega)$ или $L_2(\Omega)$, и задачи обладают только обобщенными решениями. Доказана теорема о сильной устойчивости таких решений, т.е. получены оценки нормы разности двух решений через суммы норм разностей соответствующих данных. Ее простым следствием является единственность обобщенных решений.

Библиография: 10 названий.

Системы уравнений движения вязкого газа представляют собой интересный и важный класс квазилинейных систем уравнений составного типа [1], [2]. В [2, гл. 2] изложены результаты о существовании “в целом” и единственности регулярных обобщенных решений начально-краевых задач для уравнений движения вязкого теплопроводного газа при начальных данных из $W_2^1(\Omega)$. Теорема об устойчивости таких решений в сильной норме содержится в [3]. Устойчивость регулярных обобщенных решений подробно изучена в [4], [5] (в разностном варианте, но та же техника работает и в дифференциальном случае).

В [6], [7] получено существование “в целом” (слабых) обобщенных решений указанных задач при начальных данных из $L_q(\Omega)$ с некоторыми q . При несколько более жестких условиях на начальные данные в [6] установлена также единственность и устойчивость обобщенных решений. Более ранний результат об устойчивости имеется в [8]. Уместно напомнить, что чем слабее класс обобщенных решений, тем сложнее доказывать в нем единственность и устойчивость.

Ранее в [9] авторами была доказана сильная устойчивость обобщенных решений системы уравнений движения вязкого баротропного газа. (Под сильной устойчивостью мы понимаем наличие оценки нормы разности двух решений через суммы норм разностей соответствующих данных.) Настоящую работу можно рассматривать как естественное продолжение и развитие этих исследований. В ней установлена сильная устойчивость обобщенных решений из [6] для системы уравнений движения вязкого теплопроводного газа без дополнительных условий на данные. Изучены три начально-краевых задачи с неоднородными краевыми условиями. Простым следствием устойчивости является

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00621 и № 97-01-00214, и фонда INTAS, грант № 93-27-16.

единственность обобщенных решений из [6]. Кроме того, приведено доказательство одного из двух результатов об (сильной) устойчивости, анонсированных в [6]. Доказательства существенно используют технику и вспомогательные результаты, изложенные в [9], а также один результат из [7]. Нами изложены только новые моменты доказательств, отражающие специфику рассматриваемой задачи. Отметим, что вопрос о единственности обобщенных решений из [7] (это более широкий класс, чем в [6]) остается открытым.

1. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкого теплопроводного газа. Обозначения. Рассмотрим систему квазилинейных уравнений

$$D_t \eta = Du, \quad \eta = \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

$$D_t u = D\sigma + g[x_e], \quad \sigma = \nu \rho Du - p, \quad p = k\rho\theta, \quad (2)$$

$$c_V D_t \theta = D(\lambda \rho D\theta) + \sigma Du + f[x_e], \quad D_t x_e = u \quad (3)$$

в области $Q = Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega = (0, X)$. Искомой является вектор-функция $z(x, t) = (\eta(x, t), u(x, t), \theta(x, t), x_e(x, t))$. Мы используем следующие обозначения для производных: $D = \partial/\partial x$, $D_t = \partial/\partial t$, а также обозначения $g[x_e](x, t) = g(x_e(x, t), x, t)$, $f[x_e](x, t) = f(x_e(x, t), x, t)$. Величины $\nu > 0$, $k \geq 0$, $c_V > 0$, $\lambda > 0$ – постоянные. Физический смысл уравнений и фигурирующих в них величин можно найти в [1], [2], [7].

Поставим начальные условия

$$\eta|_{t=0} = \eta^0(x), \quad u|_{t=0} = u^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad x_e|_{t=0} = \int_0^x \eta^0(x') dx' \quad (4)$$

на Ω , и одну из пар краевых условий ($0 < t < T$)

$$\begin{aligned} 1) \quad u|_{x=0} = u_0(t), \quad u|_{x=X} = u_X(t), \quad 2) \quad \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t), \quad u|_{x=X} = u_X(t), \\ 3) \quad \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t), \quad \sigma|_{x=X} = \sigma_X(t), \end{aligned} \quad (5)$$

а также пару краевых условий ($0 < t < T$)

$$(\lambda \rho D\theta)|_{x=0} = \pi_0(t), \quad (\lambda \rho D\theta)|_{x=X} = \pi_X(t). \quad (6)$$

Начально-краевую задачу (1)–(6) обозначим через $\mathcal{P}_m$, где $m = 1, 2, 3$ соответствует номеру пары в (5). Для простоты будем считать, что функции $u_0, u_X, \sigma_0, \sigma_X$ определены при всех $m = 1, 2, 3$ (те из них, которые не фигурируют в краевых условиях конкретной задачи $\mathcal{P}_m$, считаем равными 0).

Пусть, как обычно, $L_q(G)$ – пространства Лебега, $L_{q,r}(Q)$ – анизотропные пространства Лебега (с нормой $\|\cdot\|_{L_{q,r}(Q)} = \|\|\cdot\|_{L_q(\Omega)}\|_{L_r(0,T)}$); здесь $q, r \in [1, \infty]$. Будем использовать также пространство $V_2(Q)$ и более общее пространство $W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q)$ с нормами

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{V_2(Q)} &= \|\varphi\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|D\varphi\|_{L_2(Q)}, \\ \|\varphi\|_{W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q)} &= \|\varphi\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|D\varphi\|_{L_{q_1,r_1}(Q)} \end{aligned}$$

соответственно, где $\mathbf{q} = (q_0, q_1)$, $\mathbf{r} = (r_0, r_1)$.

Через $\mathcal{F}^m(Q)$, $m = 1, 2, 3, 4$, обозначим [9] пространство функций $f \in L_1(Q)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\mathcal{F}^m(Q)} = \sup \left| \int_Q f \varphi dx dt \right|,$$

где супремум берется по множеству функций $\varphi \in V_2(Q)$ таких, что $\|\varphi\|_{V_2(Q)} = 1$ и дополнительно $\varphi|_{x \in \Gamma_m} = 0$. Предполагается, что

$$\int_Q |f\varphi| dx dt < \infty$$

для всех указанных φ ; $\Gamma_1 = \{0, X\}$, $\Gamma_2 = \{X\}$, $\Gamma_3 = \emptyset$, $\Gamma_4 = \{0\}$. Для $f \in L_1(Q)$ положим $\|f\|_{\mathcal{F}^m(Q) + L_1(Q)} = \inf(\|f'\|_{\mathcal{F}^m(Q)} + \|f''\|_{L_1(Q)})$, где инфимум берется по всем $f' \in \mathcal{F}^m(Q)$ и $f'' \in L_1(Q)$ таким, что $f' + f'' = f$. Пусть $V[0, T]$ – пространство функций ограниченной вариации на $[0, T]$.

Введем среднее значение и операторы интегрирования

$$\langle v \rangle_\Omega = \frac{1}{X} \int_\Omega v(x) dx, \quad (Iv)(x) = \int_0^x v(x') dx', \quad (I_t w)(t) = \int_0^t w(t') dt', \\ v \in L_1(\Omega), \quad w \in L_1(0, T).$$

Положим

$$I^{(1)}v = Iv - \langle Iv \rangle_\Omega, \quad I^{(2)}v = Iv, \quad I^{(3)}v = I(v - \langle v \rangle_\Omega).$$

Пусть $\eta^0 \in L_\infty(\Omega)$, $u^0 \in L_2(\Omega)$, $\theta^0 \in L_2(\Omega)$, причем $\eta^0(x) > 0$ и $\theta^0(x) > 0$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть $u_0, u_X \in V[0, T]$, $\sigma_0, \sigma_X, \pi_0, \pi_X \in L_{4/3}(0, T)$. Пусть функции $g(\xi, x, t)$ и $f(\xi, x, t)$ измеримы на $\mathbb{R} \times Q$, непрерывны по $\xi \in \mathbb{R}$ для почти всех $(x, t) \in Q$, а также удовлетворяют оценкам $|g(\xi, x, t)| \leq \bar{g}(x, t)$ и $|f(\xi, x, t)| \leq \bar{f}(x, t)$, где $\bar{g}, \bar{f} \in L_{2,1}(Q)$.

Под обобщенным решением задачи $\mathcal{P}_m$ будем понимать вектор-функцию

$$z = (\eta, u, \theta, x_e) \in L_\infty(Q) \times V_2(Q) \times V_2(Q) \times C(\bar{Q}),$$

удовлетворяющую

- 1) свойствам $\eta(x, t) > 0$ и $\theta(x, t) > 0$ для почти всех $(x, t) \in Q$, а также свойствам $D_t \eta \in L_2(Q)$, $\rho = 1/\eta \in L_\infty(Q)$ и $D_t x_e \in L_2(Q)$;
- 2) уравнениям $D_t \eta = Du$ и $D_t x_e = u$ в $L_2(Q)$;
- 3) интегральным тождествам

$$\begin{aligned} & \int_Q (-u D_t \varphi + \sigma D \varphi - g[x_e] \varphi) dx dt \\ &= \int_\Omega u^0 \varphi|_{t=0} dx + \int_0^T (\sigma_X \varphi|_{x=X} - \sigma_0 \varphi|_{x=0}) dt, \\ & \int_Q (-c_V \theta D_t \psi + \lambda \rho D \theta D \psi - \sigma (Du) \psi - f[x_e] \psi) dx dt \\ &= \int_\Omega c_V \theta^0 \psi|_{t=0} dx + \int_0^T (\pi_X \psi|_{x=X} - \pi_0 \psi|_{x=0}) dt \end{aligned}$$

(величина σ определена в (2)) для любых $\varphi, \psi \in C^1(\bar{Q})$ таких, что $\varphi|_{t=T} = \psi|_{t=T} = 0$ и дополнительно $\varphi|_{x \in \Gamma_m} = 0$;

- 4) начальным условиям $\eta|_{t=0} = \eta^0$, $x_e|_{t=0} = I\eta^0$ и краевым условиям 1) в (5) (следы понимаются в смысле пространств $C([0, T]; L_2(\Omega))$, $C(\bar{Q})$ и $V_2(Q)$ соответственно).

Существование такого обобщенного решения получено в [6] при некоторых дополнительных условиях на данные; в настоящей статье эти условия не играют роли и поэтому опускаются. (Отметим, что в [6] функции g и f зависели лишь от x и t , но, как ясно из [7], [10], это не является существенным.)

Далее потребуются следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 1. Для обобщенного решения задачи $\mathcal{P}_1$ верно равенство

$$\eta \langle \exp\{\nu^{-1} B^{(1)}[z]\} \rangle_{\Omega} = \exp\{\nu^{-1} B^{(1)}[z]\} \langle \eta \rangle_{\Omega} \quad \text{почти всюду в } Q,$$

в котором $B^{(1)}[z] = \nu \ln \eta^0 + I_t p + I^{(1)}(u - u^0 - I_t g[x_e])$.

Лемма 1 по сути является частным случаем леммы 3.3 из [9] (несущественно, что в [9] лемма 3.3 и связанные с ней леммы 3.1 и 3.2 относятся к баротропному случаю).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фигурирующая в [9, лемма 3.2] функция u_{Γ} должна быть заменена на следующую:

$$u_{\Gamma} = (1 - V^{-1}(I\eta))u_0 + V^{-1}(I\eta)u_X, \quad \text{где } V(t) = \int_{\Omega} \eta(x, t) dx.$$

2. Теорема устойчивости. Рассмотрим два экземпляра задачи $\mathcal{P}_m$, которые обозначим через $\mathcal{P}_m^{(1)}$ и $\mathcal{P}_m^{(2)}$. Используемые в задаче $\mathcal{P}_m^{(l)}$ данные – функции g, f , постоянные ν, k, c_V, λ , начальные данные η^0, u^0, θ^0 и краевые данные $u_0, u_X, \sigma_0, \sigma_X, \pi_0, \pi_X$ – снабдим верхним индексом (l) , $l = 1, 2$. Аналогично следует понимать величины $\rho^{(l)}$, $p^{(l)}$, $\sigma^{(l)}$ и $\bar{g}^{(l)}$. Предположим, что данные задач $\mathcal{P}_m^{(l)}$ удовлетворяют всем перечисленным в п. 1 условиям, а сами задачи $\mathcal{P}_m^{(l)}$ имеют обобщенные решения $z^{(l)} = (\eta^{(l)}, u^{(l)}, \theta^{(l)}, x_e^{(l)})$ в смысле определения из п. 1. (Отметим, что ниже условие $\theta^{0,(l)} > 0$ и свойство $\theta^{(l)} > 0$ роли не играют.) Пусть дополнительно $g^{(1)}$ и $f^{(1)}$ удовлетворяют следующему условию: для всех $a > 1$ неравенства

$$|g^{(1)}(\xi_1, x, t) - g^{(1)}(\xi_2, x, t)| \leq b_{1,a}(x, t)|\xi_1 - \xi_2|, \quad (7)$$

$$|f^{(1)}(\xi_1, x, t) - f^{(1)}(\xi_2, x, t)| \leq b_{2,a}(x, t)|\xi_1 - \xi_2| \quad (8)$$

выполнены при $\xi_1, \xi_2 \in [a^{-1}, a]$ и $(x, t) \in Q$, где $\|b_{1,a}\|_{L_{2,1}(Q)} \leq C(a)$, $\|b_{2,a}\|_{L_1(Q)} \leq C(a)$.

Введем операцию взятия разности Δ с помощью равенства $\Delta\varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}$, так что $\Delta z = z^{(1)} - z^{(2)} = (\Delta\eta, \Delta u, \Delta\theta, \Delta x_e)$, $\Delta g = g^{(1)} - g^{(2)}$, $\Delta\nu = \nu^{(1)} - \nu^{(2)}$, $\Delta\eta^0 = \eta^{0,(1)} - \eta^{0,(2)}$, $\Delta u_0 = u_0^{(1)} - u_0^{(2)}$, и т.д. Будем использовать элементарную формулу $\Delta g[x_e] = \Delta g^{(1)}[x_e] + \Delta g[x_e^{(2)}]$, имеющую в развернутой записи вид

$$g^{(1)}[x_e^{(1)}] - g^{(2)}[x_e^{(2)}] = g^{(1)}[x_e^{(1)}] - g^{(1)}[x_e^{(2)}] + g^{(1)}[x_e^{(2)}] - g^{(2)}[x_e^{(2)}],$$

и аналогичную формулу для $\Delta f[x_e]$.

Пусть N и $\bar{N}$ – параметры, $\bar{N} \geq N > 1$. Через $K(\bar{N})$, $K_i(\bar{N})$ ($i = 0, 1, \dots$), $\tilde{K}_0(\bar{N})$ обозначим положительные неубывающие функции параметра $\bar{N}$; они могут зависеть также от X и T , но не от данных задач $\mathcal{P}_m^{(l)}$. В доказательствах аргумент $\bar{N}$ будем опускать. Через c обозначим положительные постоянные, которые могут зависеть только от X и T .

ТЕОРЕМА. 1) Пусть $\nu^{(l)}, c_V^{(l)}, \lambda^{(l)} \in [N^{-1}, N]$, $k^{(l)} \in [0, N]$ и $N^{-1} \leq \eta^{0,(l)}(x) \leq N$ на Ω , $\|u^{0,(l)}\|_{L_1(\Omega)} + \|\bar{g}^{(l)}\|_{L_1(Q)} \leq N$ ($l = 1, 2$). Пусть также $\bar{N}^{-1} \leq \eta^{(l)}(x, t) \leq \bar{N}$

в Q , $\|u^{(l)}\|_{V_2(Q)} \leq \bar{N}$ ($l = 1, 2$) и $\|\theta^{(1)}\|_{L_{\infty,1}(Q)} + \|\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} + \|D\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} \leq \bar{N}$. Тогда верна оценка

$$\begin{aligned} \|\Delta z\|_{\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q} &\equiv \|\Delta \eta\|_{L_{\infty}(Q)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q)} + \|\Delta \theta\|_{W_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}^{1,0}(Q)} + \|\Delta x_e\|_{C(\bar{Q})} \\ &\leq K(\bar{N}) (\|\Delta \eta^0\|_{L_{\infty}(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta \theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\Delta u_0\|_{V[0,T]} \\ &\quad + \|\Delta u_X\|_{V[0,T]} + \|\Delta \sigma_0\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta \sigma_X\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta \pi_0\|_{L_1(0,T)} \\ &\quad + \|\Delta \pi_X\|_{L_1(0,T)} + \|\Delta g[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^m(Q)} + \|I^{(m)} I_t \Delta g[x_e^{(2)}]\|_{L_{\infty}(Q)} \\ &\quad + \|\Delta f[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^3(Q) + L_1(Q)} + |\Delta \nu| + |\Delta k| + |\Delta c_V| + |\Delta \lambda|) \end{aligned} \quad (9)$$

с произвольными $\mathbf{q} = (q_0, q_1)$, $\mathbf{r} = (r_0, r_1)$ такими, что $q_0, r_0 \in [1, \infty]$, $(2q_0)^{-1} + r_0^{-1} > 1/2$ либо $(q_0, r_0) = (1, \infty)$, а также $q_1, r_1 \in [1, 2]$, $(2q_1)^{-1} + r_1^{-1} > 1$. В (9) величина $K(\bar{N})$ зависит от $\mathbf{q}, \mathbf{r}$.

2) Если дополнительно выполнены условия

$$\sup_{\|\varphi\|_{V_2(Q)}=1} \|(Du^{(l)})\varphi\|_{L_2(Q)} \leq \bar{N}, \quad l = 1, 2, \quad (10)$$

и $\|b_{2,a}\|_{L_{2,1}(Q)} \leq C(a)$ для всех $a > 1$ (см. (8)), то верна оценка

$$\begin{aligned} &\|\Delta \eta\|_{L_{\infty}(Q)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q)} + \|\Delta \theta\|_{V_2(Q)} + \|\Delta x_e\|_{C(\bar{Q})} \\ &\leq K_1(\bar{N}) (\|\Delta \eta^0\|_{L_{\infty}(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta \theta^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_0\|_{V[0,T]} \\ &\quad + \|\Delta u_X\|_{V[0,T]} + \|\Delta \sigma_0\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta \sigma_X\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta \pi_0\|_{L_{4/3}(0,T)} \\ &\quad + \|\Delta \pi_X\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta g[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^m(Q)} + \|I^{(m)} I_t \Delta g[x_e^{(2)}]\|_{L_{\infty}(Q)} \\ &\quad + \|\Delta f[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^3(Q)} + |\Delta \nu| + |\Delta k| + |\Delta c_V| + |\Delta \lambda|), \end{aligned} \quad (11)$$

т.е. модификация оценки (9) с более сильными нормами функций $\Delta \theta$ и $\Delta \theta^0, \Delta \pi_0, \Delta \pi_X, \Delta f[x_e^{(2)}]$.

СЛЕДСТВИЕ. Обобщенное решение задачи $\mathcal{P}_m$ единственно, если функции g и f удовлетворяют условиям (7), (8) в роли $g^{(1)}$ и $f^{(1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обратим внимание на то, что в условиях 1) данной теоремы справедливо вложение $V_2(Q)$ в $W_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}^{1,0}(Q)$ и значит по отношению к $\Delta \theta$ устойчивость доказана в более слабой, чем $\|\Delta \theta\|_{V_2(Q)}$, норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если, например, $\|Du^{(l)}\|_{L_{q^{(l)}, r^{(l)}}(Q)} \leq \bar{N}$ при каких-либо $q^{(l)}, r^{(l)} \in [1, \infty]$ с $(2q^{(l)})^{-1} + (r^{(l)})^{-1} \leq 1/2$ ($l = 1, 2$), то условие (10) (с заменой $\bar{N}$ на $c\bar{N}$) выполнено. В частности, достаточным условием справедливости неравенства $\|Du\|_{L_{2,4}(Q)} \leq \bar{N}$ служит условие (11) из [6].

Доказательство теоремы представим в виде серии лемм. Предположим, что выполнены условия 1) теоремы.

ЛЕММА 2. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Delta \eta\|_{L_{\infty}(Q_t)} &\leq K(\bar{N}) (\|\Delta u\|_{L_{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta \theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \|\Delta g^{(1)}[x_e]\|_{L_1(Q_t)} \\ &\quad + \|\Delta \eta^0\|_{L_{\infty}(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|I_t \Delta u_0\|_{L_{\infty}(0,t)} + \|I_t \Delta u_X\|_{L_{\infty}(0,t)} \\ &\quad + \|I_t \Delta \sigma_0\|_{L_{\infty}(0,t)} + \|I_t \Delta \sigma_X\|_{L_{\infty}(0,t)} + \|I^{(m)} I_t \Delta g[x_e^{(2)}]\|_{L_{\infty}(Q_t)} \\ &\quad + |\Delta \nu| + |\Delta k|), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод оценки (12) повторяет вывод аналогичной оценки из [9, лемма 3.5] с небольшими изменениями. Для задачи $\mathcal{P}_1$ рассуждения можно несколько упростить благодаря применению вытекающей из леммы 1 формулы

$$\langle E^{(2)} \rangle_{\Omega} \Delta \eta = -\eta^{(1)} \langle \Delta E \rangle_{\Omega} + \langle \eta^{(1)} \rangle_{\Omega} \Delta E + E^{(2)} \langle \Delta \eta \rangle_{\Omega},$$

где $E^{(l)} = \exp\{(\nu^{(l)})^{-1} B^{(1),(l)}[z^{(l)}]\}$, а $B^{(1),(l)}[z^{(l)}] = \nu^{(l)} \ln \eta^{0,(l)} + I_t p^{(l)} + I^{(1)}(u^{(l)} - u^{0,(l)} - I_t g^{(l)}[x_e^{(l)}])$ ($l = 1, 2$).

Кроме того, в силу элементарной формулы

$$\Delta p = k^{(2)}(\Delta \rho) \theta^{(2)} + k^{(1)} \rho^{(1)} \Delta \theta + (\Delta k) \rho^{(1)} \theta^{(2)}, \quad (13)$$

а также неравенств $\bar{N}^{-1} \leq \eta^{(l)} \leq \bar{N}$ и $\|\theta^{(2)}\|_{L_{\infty,1}(Q)} \leq c\bar{N}$ (выполненных в силу условий теоремы), верна оценка

$$I_t \|\Delta p\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq K_1 (I_t (d_1 \|\Delta \eta\|_{L_{\infty}(\Omega)}) + \|\Delta \theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + |\Delta k|)$$

с $d_1(t) = \|\theta^{(2)}(\cdot, t)\|_{L_{\infty}(\Omega)}$. Эта оценка приводит к несколько более сложному, чем в [9, лемма 3.5], промежуточному неравенству

$$\|\Delta \eta\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq K_2 (I_t (d_1 \|\Delta \eta\|_{L_{\infty}(\Omega)}) + \varepsilon^{(m)}),$$

в котором через $\varepsilon^{(m)}$ обозначена сумма норм в правой части оценки (12). Поскольку $\|d_1\|_{L_1(0,T)} = \|\theta^{(2)}\|_{L_{\infty,1}(Q)} \leq c\bar{N}$, из этого неравенства согласно лемме Гронуолла следует оценка (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Фактически из [9] вытекает более сильная, чем (12), оценка с негативными нормами $\|\Delta u\|_{\infty,\infty,Q_t}^{(-1,0);m}$ и $\|\Delta u^0\|_{\infty,\Omega}^{(-1);m}$ вместо $\|\Delta u\|_{L_{2,\infty}(Q_t)}$ и $\|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)}$. Кроме того, справедлива оценка для $\|\Delta \eta\|_{L_{q,\infty}(Q_t)}$ типа оценки из [9] с заменой указанных там норм $\Delta \nu$ и Δp на $\|\Delta \theta\|_{L_{q,1}(Q_t)} + |\Delta \nu| + |\Delta k|$.

ЛЕММА 3. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} &\leq K(\bar{N}) (\|d_2 \Delta \eta\|_{L_{\infty,2}(Q_t)} + \|\Delta \theta\|_{L_2(Q_t)} + \|\Delta g^{(1)}[x_e]\|_{L_{2,1}(Q_t)} \\ &\quad + \|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_0\|_{V[0,T]} + \|\Delta u_X\|_{V[0,T]} + \|\Delta \sigma_0\|_{L_{4/3}(0,T)} \\ &\quad + \|\Delta \sigma_X\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta g[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^m(Q)} + |\Delta \nu| + |\Delta k|), \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (14)$$

где $d_2 = d_2(t)$, $\|d_2\|_{L_2(0,T)} \leq K_1(\bar{N})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод оценки (14) повторяет вывод аналогичной оценки из [9, лемма 3.7] с той лишь разницей, что надо применить вытекающую из формулы (13) и условий $\bar{N}^{-1} \leq \eta^{(l)} \leq \bar{N}$ и $\|\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} \leq \bar{N}$ оценку

$$\|\Delta p\|_{L_2(Q_t)} \leq K (\|\theta^{(2)} \Delta \eta\|_{L_2(Q_t)} + \|\Delta \theta\|_{L_2(Q_t)} + |\Delta k|). \quad (15)$$

При этом $d_2(t) = \|Du^{(2)}(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\theta^{(2)}(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}$.

ЛЕММА 4. *Справедлива оценка*

$$\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} \leq K(\overline{N})(\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + \Lambda_1), \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \|\Delta\eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_0\|_{V[0,T]} + \|\Delta u_X\|_{V[0,T]} + \|\Delta\sigma_0\|_{L_{4/3}(0,T)} \\ & + \|\Delta\sigma_X\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|I^{(m)}I_t\Delta g[x_e^{(2)}]\|_{L_\infty(Q)} + \|\Delta g[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^m(Q)} + |\Delta\nu| + |\Delta k|. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать [9, леммы 3.6 и 3.8]. Согласно условию (7), неравенству

$$\|\Delta x_e\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|\Delta\eta^0\|_{L_1(\Omega)} + X^{-1}I_t\|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \|\Delta\eta\|_{L_1(\Omega)} \quad (17)$$

(см. [9, неравенство (3.21)]) и неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} & \|\Delta g^{(1)}[x_e]\|_{L_{2,1}(Q_t)} \\ & \leq \|b_{1,a}\|_{L_{2,1}(Q)}(\|\Delta\eta^0\|_{L_1(\Omega)} + X^{-1}I_t\|\Delta u\|_{L_1(\Omega)}) + I_t(\bar{b}_1\|\Delta\eta\|_{L_1(\Omega)}) \\ & \leq K_1(\|\Delta\eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L_2(Q_t)} + \|\bar{b}_1^{1/2}\Delta\eta\|_{L_{1,2}(Q_t)}), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\bar{b}_1(t) = \|b_{1,a}(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}$, $a = K_2$.

Сильно ослабив оценку (12) для $\Delta\eta$, получим

$$\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} \leq K_3(\|\Delta u\|_{L_{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \|\Delta g^{(1)}[x_e]\|_{L_{2,1}(Q_t)} + \Lambda_1).$$

Умножим эту оценку на $(2K_3)^{-1}$ и прибавим к оценке (14) для Δu . Применим оценку (18) для $\Delta g^{(1)}[x_e]$ и возведем обе части полученного неравенства в квадрат, получим

$$\begin{aligned} Y(t) \equiv & (\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)})^2 \\ & \leq K_4(I_t(d_3Y) + (\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + \Lambda_1)^2), \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (19)$$

где $d_3 = d_2^2 + \bar{b}_1 + 1$. Поскольку $\|d_3\|_{L_1(0,T)} \leq K_5$, по лемме Гронвулла выводим оценку (16).

ЛЕММА 5. Пусть $\kappa \in L_\infty(Q)$, $N^{-1} \leq \kappa$ в Q , $\|D_t\kappa\|_{L_{2,4/3}(Q)} \leq N$, $F \in L_1(Q)$, $v^0 \in L_1(\Omega)$. Пусть функция $v \in W_{q,r}^{1,0}(Q)$ (с некоторыми q, r из теоремы) является обобщенным решением линейной параболической начально-краевой задачи

$$D_tv = D(\kappa Dv) + F, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad (\kappa Dv)|_{x=0} = s_0, \quad (\kappa Dv)|_{x=X} = s_X,$$

т.е. удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q (-vD_t\psi + \kappa DvD\psi - F\psi) dx dt = \int_\Omega v^0\psi|_{t=0} dx + \int_0^T (s_X\psi|_{x=X} - s_0\psi|_{x=0}) dt$$

для всякой функции $\psi \in C^1(\overline{Q})$ такой, что $\psi|_{t=T} = 0$.

Тогда справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q)} \leq K(N)(\|v^0\|_{L_1(\Omega)} + \|F\|_{L_1(Q)} + \|s_0\|_{L_1(0,T)} + \|s_X\|_{L_1(0,T)}), \quad (20)$$

в которой величина $K(N)$ зависит от q, r .

Обоснование леммы 5 по существу повторяет доказательство леммы 8 из [7] (см. также [7, замечание 4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если в лемме 5 заменить краевое условие $(\kappa Dv)|_{x=0} = s_0$ на $v|_{x=0} = 0$ и (или) условие $(\kappa Dv)|_{x=X} = s_0$ на $v|_{x=X} = 0$, то оценка (20) функции v сохраняет силу, причем следует опустить слагаемое $\|s_0\|_{L_1(0,T)}$ и (или) $\|s_X\|_{L_1(0,T)}$.

ЛЕММА 6. 1) *Справедлива оценка*

$$\|\Delta\theta\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q_t)} \leq K_0(\bar{N}) (\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + \Lambda_2), \quad 0 < t \leq T, \quad (21)$$

где q, r те же, что и в теореме, а

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = & \|\Delta\eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\Delta\pi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\Delta\pi_X\|_{L_1(0,T)} \\ & + \|\Delta f[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^3(Q) + L_1(Q)} + |\Delta\nu| + |\Delta k| + |\Delta c_V| + |\Delta\lambda|. \end{aligned}$$

Величина $K_0(\bar{N})$ зависит от q, r .

2) *Если выполнены условия 2) теоремы, то справедлива оценка*

$$\|\Delta\theta\|_{V_2(Q_t)} \leq \tilde{K}_0(\bar{N}) (\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + \tilde{\Lambda}_2), \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_2 = & \|\Delta\eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta\theta^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\pi_0\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta\pi_X\|_{L_{4/3}(0,T)} \\ & + \|\Delta f[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^3(Q)} + |\Delta\nu| + |\Delta k| + |\Delta c_V| + |\Delta\lambda|. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Нетрудно видеть, что функция $\Delta\theta$ является обобщенным решением начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} D_t \Delta\theta &= D(\kappa D\Delta\theta + \Psi) + F \quad \text{в } Q, \quad \Delta\theta|_{t=0} = \Delta\theta^0, \\ (\kappa D\Delta\theta + \Psi)|_{x=0} &= \Delta\left(\frac{1}{c_V}\pi_0\right), \quad (\kappa D\Delta\theta + \Psi)|_{x=X} = \Delta\left(\frac{1}{c_V}\pi_X\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{\lambda^{(1)}}{c_V^{(1)}}\rho^{(1)}, \quad \Psi = \left(\Delta\left(\frac{\lambda}{c_V}\rho\right)\right)D\theta^{(2)}, \quad F = \Delta\left(\frac{1}{c_V}\sigma Du\right) + \Delta\left(\frac{1}{c_V}f[x_e]\right).$$

Ясно, что

$$\Delta\left(\frac{1}{c_V}f[x_e]\right) = \frac{1}{c_V^{(1)}}\Delta f^{(1)}[x_e] + \frac{1}{c_V^{(1)}}\Delta f[x_e^{(2)}] + \left(\Delta\frac{1}{c_V}\right)f^{(2)}[x_e^{(2)}].$$

Запишем разложение $\Delta f[x_e^{(2)}] = f' + f''$, где $f' \in \mathcal{F}^3(Q)$ и $f'' \in L_1(Q)$. Представим функцию $\Delta\theta$ в виде $\Delta\theta = \theta' + \theta''$, где θ' – обобщенное решение задачи (23) с функцией $(c_V^{(1)})^{-1}f'$ в роли F и нулевыми начальными и краевыми данными, а θ'' – обобщенное решение такой же задачи с $\Psi = 0$ и $F = (c_V^{(1)})^{-1}f'$ в роли F . Из [9, теорема 2.1] следуют существование решения θ' и его оценка

$$\|\theta'\|_{V_2(Q_t)} \leq K_1 \left(\|\Psi\|_{L_2(Q_t)} + \left\| \frac{1}{c_V^{(1)}} f' \right\|_{\mathcal{F}^3(Q_t)} \right),$$

а из леммы 5 – оценка для функции θ'' (ясно, что $\theta'' = \Delta\theta - \theta' \in V_2(Q)$)

$$\begin{aligned} \|\theta''\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q_t)} &\leq K_2 \left(\|\Delta\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \left\| \Delta \left(\frac{1}{c_V} \pi_0 \right) \right\|_{L_1(0,T)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \Delta \left(\frac{1}{c_V} \pi_X \right) \right\|_{L_1(0,T)} + \left\| F - \frac{1}{c_V^{(1)}} f' \right\|_{L_1(Q_t)} \right). \end{aligned}$$

Тем самым, верна оценка

$$\begin{aligned} \|\Delta\theta\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q_t)} &\leq c\|\theta'\|_{V_2(Q_t)} + \|\theta''\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q_t)} \\ &\leq K_3 \left(\left\| \left(\Delta \left(\frac{\lambda}{c_V} \rho \right) \right) D\theta^{(2)} \right\|_{L_2(Q_t)} + \left\| \Delta \left(\frac{1}{c_V} \sigma Du \right) \right\|_{L_1(Q_t)} \right. \\ &\quad + \|\Delta f^{(1)}[x_e]\|_{L_1(Q_t)} + \|\Delta\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\Delta\pi_0\|_{L_1(0,T)} + \|\Delta\pi_X\|_{L_1(0,T)} \\ &\quad \left. + \|f'\|_{\mathcal{F}^3(Q)} + \|f''\|_{L_1(Q)} + |\Delta c_V| \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\lambda}{c_V} \rho \right) &= \frac{\lambda^{(1)}}{c_V^{(1)}} \Delta\rho + \left(\Delta \frac{\lambda}{c_V} \right) \rho^{(2)}, \quad \Delta \left(\frac{1}{c_V} \sigma Du \right) = \left(\Delta \frac{\sigma}{c_V} \right) Du^{(1)} + \frac{\sigma^{(2)}}{c_V^{(2)}} \Delta Du, \\ \Delta \frac{\sigma}{c_V} &= \frac{\nu^{(2)}}{c_V^{(2)}} (\Delta\rho) Du^{(2)} + \frac{\nu^{(1)}}{c_V^{(1)}} \rho^{(1)} \Delta Du + \left(\Delta \frac{\nu}{c_V} \right) \rho^{(1)} Du^{(2)} - \Delta \frac{p}{c_V}. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом условий

$$\overline{N}^{-1} \leq \eta^{(l)} \leq \overline{N}, \quad \|Du^{(l)}\|_{L_2(Q)} \leq \overline{N}, \quad \|\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} + \|D\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} \leq \overline{N}$$

и неравенства Гёльдера имеем

$$\left\| \left(\Delta \left(\frac{\lambda}{c_V} \rho \right) \right) D\theta^{(2)} \right\|_{L_2(Q_t)} \leq K_4 (\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + |\Delta\lambda| + |\Delta c_V|), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left\| \Delta \left(\frac{1}{c_V} \sigma Du \right) \right\|_{L_1(Q_t)} &\leq \left\| \Delta \frac{\sigma}{c_V} \right\|_{L_2(Q_t)} \|Du^{(1)}\|_{L_2(Q_t)} + \frac{1}{c_V^{(2)}} \|\sigma^{(2)}\|_{L_2(Q_t)} \|\Delta Du\|_{L_2(Q_t)} \\ &\leq K_5 (\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|D\Delta u\|_{L_2(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + |\Delta\nu| + |\Delta k| + |\Delta c_V|), \end{aligned} \quad (26)$$

здесь использована оценка (15) для Δp . Аналогично оценке (18) для $\Delta g^{(1)}[x_e]$ из условия (8) выводится оценка

$$\|\Delta f^{(1)}[x_e]\|_{L_1(Q_t)} \leq K_6 (\|\Delta\eta\|_{L_{1,\infty}(Q_t)} + \|\Delta u\|_{L_1(Q_t)} + \|\Delta\eta^0\|_{L_1(\Omega)}). \quad (27)$$

Из оценок (24)–(27) следует неравенство (21).

2) Оценка (22) доказывается проще. Из [9, теорема 2.1] следует оценка (ср. с (24))

$$\begin{aligned} \|\Delta\theta\|_{V_2(Q_t)} &\leq K_7 \left(\left\| \left(\Delta \left(\frac{\lambda}{c_V} \rho \right) \right) D\theta^{(2)} \right\|_{L_2(Q_t)} + \left\| \Delta \left(\frac{1}{c_V} \sigma Du \right) \right\|_{\mathcal{F}^3(Q)} \right. \\ &\quad + \|\Delta f^{(1)}[x_e]\|_{L_{2,1}(Q_t)} + \|\Delta\theta^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\pi_0\|_{L_{4/3}(0,T)} \\ &\quad \left. + \|\Delta\pi_X\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\Delta f[x_e^{(2)}]\|_{\mathcal{F}^3(Q)} + |\Delta c_V| \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В силу условий на $u^{(2)}$ и $\theta^{(2)}$ верна оценка

$$\|\sigma^{(2)}\varphi\|_{L_2(Q)} \leq \nu^{(2)} \|(Du^{(2)})\varphi\|_{L_2(Q)} + k^{(2)} \|\rho^{(2)}\|_{L_\infty(Q)} \|\theta^{(2)}\|_{L_{\infty,2}(Q)} \|\varphi\|_{L_{2,\infty}(Q)} \leq K_8$$

при $\|\varphi\|_{V_2(Q)} = 1$. Тогда из (26) следует

$$\begin{aligned} \left\| \Delta \left(\frac{1}{c_V} \sigma Du \right) \right\|_{\mathcal{F}^3(Q_t)} &\leq \left\| \Delta \frac{\sigma}{c_V} \right\|_{L_2(Q_t)} \sup_{\|\varphi\|_{V_2(Q)}=1} \|(Du^{(1)})\varphi\|_{L_2(Q)} \\ &\quad + \frac{1}{c_V^{(2)}} \sup_{\|\varphi\|_{V_2(Q)}=1} \|\sigma^{(2)}\varphi\|_{L_2(Q)} \|\Delta Du\|_{L_2(Q_t)} \\ &\leq K_9 (\|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|D\Delta u\|_{L_2(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + |\Delta\nu| + |\Delta k| + |\Delta c_V|). \end{aligned} \quad (29)$$

Кроме того, поскольку выполнено условие $\|b_{2,a}\|_{L_{2,1}(Q)} \leq C(a)$, верна оценка (ср. с (27))

$$\|\Delta f^{(1)}[x_e]\|_{L_{2,1}(Q_t)} \leq K_{10} (\|\Delta\eta\|_{L_{1,\infty}(Q_t)} + \|\Delta u\|_{L_1(Q_t)} + \|\Delta\eta^0\|_{L_1(\Omega)}). \quad (30)$$

Из оценок (28) и (25), (29), (30) следует оценка (22).

ЛЕММА 7. 1) *Справедлива оценка (9).*

2) *Если выполнены условия 2) теоремы, то справедлива оценка (11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Умножим оценку (21) для $\Delta\theta$ на $(2K_0)^{-1}$ и прибавим к оценке (16) для $\Delta\eta$ и Δu . Применяя оценку

$$\|\Delta x_e\|_{C(\overline{Q}_t)} \leq c (\|\Delta\eta^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\Delta\eta\|_{L_\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)}),$$

следующую из неравенства (17), получим

$$\|\Delta z\|_{\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q_t} \leq K_1 (\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} + \Lambda_1 + \Lambda_2), \quad 0 < t \leq T.$$

Очевидно, что $\Lambda_1 + \Lambda_2 \leq 2\Lambda_0$, где через Λ_0 обозначена сумма норм в правой части оценки (9). Воспользуемся неравенством

$$\|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)} \leq \|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)}^{1/2} \|\Delta\theta\|_{L_{1,\infty}(Q_t)}^{1/2}$$

и ε -неравенством с $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\|\Delta z\|_{\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q_t} \leq K_1 ((1 + \varepsilon^{-1}) \|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \varepsilon \|\Delta\theta\|_{L_{1,\infty}(Q_t)} + 2\Lambda_0). \quad (31)$$

Полагая $(q_0, r_0) = (1, \infty)$, $\varepsilon = (2K_1)^{-1}$, получим

$$\|\Delta\theta\|_{L_{1,\infty}(Q_t)} \leq K_2(\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \Lambda_0), \quad 0 < t \leq T.$$

Теперь из (31) следует оценка

$$\|\Delta z\|_{\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q_t} \leq K_3(\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \Lambda_0), \quad 0 < t \leq T. \quad (32)$$

Полагая $(q_0, r_0) = (\infty, 2 - \delta)$ с каким-либо $\delta \in (0, 1)$, получим

$$\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,2-\delta}(Q_t)} \leq K_3(\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)} + \Lambda_0), \quad 0 < t \leq T.$$

Согласно лемме 2.2 из [9] заключаем, что $\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,2-\delta}(Q)} \leq K_4\Lambda_0$. Отсюда и из (32) следует, что $\|\Delta z\|_{\mathbf{q}, \mathbf{r}, Q_t} \leq K_5\Lambda_0$, т.е. оценка (9) доказана.

2) Если в части 1) доказательства работать с оценкой (22) вместо (21) и учесть, что $\|\Delta\theta\|_{W_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}^{1,0}(Q_t)} \leq c\|\Delta\theta\|_{V_2(Q_t)}$, то получится оценка (11). Однако, ее можно вывести и короче. А именно, обратимся к доказательству леммы 4. Возведем в квадрат обе части оценки (22) для $\Delta\theta$, умножим результат на $(2\tilde{K}_0)^{-2}$ и прибавим к нему неравенство (19). В результате получим

$$\begin{aligned} W(t) &\equiv Y(t) + \|\Delta\theta\|_{V_2(Q_t)}^2 \\ &\leq K_5(I_t(d_3Y) + \|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)}^2 + \|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)}^2 + (\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_2)^2), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Воспользуемся простым неравенством ($0 < \varepsilon \leq 1$)

$$\|\Delta\theta\|_{L_{\infty,1}(Q_t)}^2 \leq \varepsilon\|D\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)}^2 + c\varepsilon^{-1}\|\Delta\theta\|_{L_2(Q_t)}^2, \quad 0 < t \leq T,$$

с $\varepsilon = (2K_5)^{-1}$, чтобы получить

$$W \leq K_6(I_t(d_3W) + (\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_2)^2), \quad 0 < t \leq T.$$

По лемме Гронуолла имеем $W(T) \leq K_7(\Lambda_1 + \tilde{\Lambda}_2)^2$, откуда и следует оценка (11).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В [6] изучена задача с краевыми условиями

$$(\lambda\rho D\theta + \mu_0\theta)|_{x=0} = \pi_0(t), \quad (\lambda\rho D\theta + \mu_X\theta)|_{x=X} = \pi_X(t), \quad (33)$$

более общими чем условия (6). Пусть $\mu_0, \mu_X \in L_2(0, T)$. Теорема переносится на этот случай со следующими изменениями. В 1) нужно дополнительно предположить, что $\|\mu_0^{(1)}\|_{L_{2+\varepsilon}(0, T)} + \|\mu_X^{(1)}\|_{L_{2+\varepsilon}(0, T)} \leq N$ с некоторым $\varepsilon > 0$. В 2) нужно предположить, что $\|\mu_0^{(1)}\|_{L_2(0, T)} + \|\mu_X^{(1)}\|_{L_2(0, T)} \leq N$ и $\|\theta^{(2)}\|_{V_2(Q)} \leq N$ (вместо $\|\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} + \|D\theta^{(2)}\|_{L_2(Q)} \leq N$). Кроме того, к сумме норм в правых частях оценок (9) и (11) следует добавить слагаемое $\|\Delta\mu_0\|_{L_2(0, T)} + \|\Delta\mu_X\|_{L_2(0, T)}$. Этот результат можно вывести, например, из теоремы сведением краевых условий (33) к условиям (6), т.е. применяя оценки (9) и (11) с $\Delta\pi_0 - \mu_0^{(1)}\Delta\theta|_{x=0} - (\Delta\mu_0)\theta^{(2)}|_{x=0}$ в роли $\Delta\pi_0$ и $\Delta\pi_X - \mu_X^{(1)}\Delta\theta|_{x=X} - (\Delta\mu_X)\theta^{(2)}|_{x=X}$ в роли $\Delta\pi_X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Теорема переносится также на случай, когда одно или оба из краевых условий (6) заменяются на $\theta|_{x=0} = \theta_0(t)$, $\theta|_{x=X} = \theta_X(t)$ соответственно. В этом случае к сумме норм в правой части оценок (9) и (11) следует добавить слагаемое $\|\Delta\theta_0\|_{V[0,T]} + \|\Delta\theta_X\|_{V[0,T]}$ (имеется в виду, что незадаанные функции $\pi_0^{(l)}$, $\pi_X^{(l)}$, $\theta_0^{(l)}$, $\theta_X^{(l)}$ равны 0). Кроме того, $\mathcal{F}^3(Q)$ -норму в оценках для функции $\Delta f[x_e^{(2)}]$ следует заменить или на норму пространства $\mathcal{F}^1(Q)$ при $x = 0, X$, или на норму $\mathcal{F}^2(Q)$ при $x = X$, или на норму $\mathcal{F}^4(Q)$ при $x = 0$. Для обоснования достаточно в доказательстве леммы 6 выбрать $\theta'|_{x=a} = \Delta\theta_a$, если задано краевое условие $\theta|_{x=a} = \theta_a(t)$ ($a = 0, X$) и воспользоваться замечанием 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если в неравенствах (7) и (8) заменить $g^{(1)}$ на $g^{(2)}$ и (или) $f^{(1)}$ на $f^{(2)}$, то в формулировке теоремы надо заменить $\Delta g[x_e^{(2)}]$ на $\Delta g[x_e^{(1)}]$ и (или) $\Delta f[x_e^{(2)}]$ на $\Delta f[x_e^{(1)}]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
- [2] Антоньев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
- [3] Амосов А. А. Корректность “в целом” начально-краевых задач для системы уравнений динамики вязкого излучающего газа // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 6. С. 1326–1329.
- [4] Amosov A. A., Zlotnik A. A. A study of a finite-difference method for the one-dimensional viscous heat conductive gas flow equation. I: A priori estimates and stability // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Model. 1987. V. 2. № 3. P. 159–178.
- [5] Амосов А. А., Злотник А. А. Разностная схема на неравномерной сетке для уравнений одномерной магнитной газовой динамики // ЖВМиМФ. 1989. Т. 29. № 4. С. 521–534.
- [6] Амосов А. А., Злотник А. А. Обобщенные решения “в целом” уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 1. С. 11–15.
- [7] Амосов А. А., Злотник А. А. Разрешимость “в целом” системы уравнений одномерного движения неоднородного вязкого теплопроводного газа // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 3–16.
- [8] Padula M. Existence and continuous dependence for solutions to the equations of a one-dimensional model in gas-dynamics // Meccanica. 1981. V. 16. P. 128–135.
- [9] Амосов А. А., Злотник А. А. Единственность и устойчивость обобщенных решений одного класса квазилинейных систем уравнений составного типа // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 6. С. 13–31.
- [10] Амосов А. А., Злотник А. А. Разрешимость “в целом” одного класса квазилинейных систем уравнений составного типа с негладкими данными // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 4. С. 596–609.

Московский энергетический институт (технический университет)
E-mail: zlotnik@arpsun.mpei.ac.ru

Поступило
27.06.96