Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О числах Пикара и Лефшеца вещественной алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 847–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:11:55

УДК 512.7

О ЧИСЛАХ ПИКАРА И ЛЕФШЕЦА ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Краснов

Определяются два числа Пикара и два числа Лефшеца для вещественной алгебраической поверхности. Они аналогичны числу Пикара и числу Лефшеца для комплексной алгебраической поверхности. Для этих чисел доказываются оценки и соотношения в виде неравенств.

Библиография: 6 названий.

Пусть X – неособая вещественная проективная поверхность. Для комплексной поверхности $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$ число Пикара $\rho(X_{\mathbb{C}})$ и число Лефшеца $\rho_0(X_{\mathbb{C}})$ определяются следующим образом. Если

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: \text{Div } X_{\mathbb{C}} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

– отображение цикла, то образ этого отображения обозначается через $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, коядро – через $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, а их ранги – через $\rho(X_{\mathbb{C}})$, $\rho_0(X_{\mathbb{C}})$ соответственно. Для вещественной поверхности X определены также следующие отображения цикла (см. [1]):

$$\text{cl}: \text{Div } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-), \quad \text{cl}_{\mathbb{R}}: \text{Div } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

где $G = G(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ – группа Галуа, $\mathbb{Z}_-$ – G -модуль $\mathbb{Z}$, на котором образующая $g \in G$ действует умножением на -1 . Тогда мы можем определить алгебраические группы коомологий $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ как образы отображений цикла cl , $\text{cl}_{\mathbb{R}}$, а также трансцендентные группы коомологий $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, $H_{\text{tr}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ как коядра отображений cl , $\text{cl}_{\mathbb{R}}$. Ранги групп $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ обозначим через $\rho(X)$, $\rho_0(X)$, а размерности пространств $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, $H_{\text{tr}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – через $\rho(X(\mathbb{R}))$, $\rho_0(X(\mathbb{R}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Выполняются неравенства*

$$\rho(X) \leq \frac{1}{2}(h^{1,1}(X(\mathbb{C})) - \chi(X(\mathbb{R}))) + 1, \quad (1)$$

$$0 \leq \rho(X_{\mathbb{C}}) - \rho(X) \leq \frac{1}{2}(h^{1,1}(X(\mathbb{C})) + \chi(X(\mathbb{R}))) - 1, \quad (2)$$

$$h^{2,0}(X(\mathbb{C})) \leq \rho_0(X_{\mathbb{C}}) - \rho_0(X) \leq h^{2,0}(X(\mathbb{C})) + \frac{1}{2}(h^{1,1}(X(\mathbb{C})) + \chi(X(\mathbb{R}))) - 1, \quad (3)$$

где $h^{1,1}(X(\mathbb{C}))$, $h^{2,0}(X(\mathbb{C}))$ – числа Ходжа, $\chi(X(\mathbb{R}))$ – эйлерова характеристика.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Div}_h X_{\mathbb{C}}$ – группа дивизоров гомологичных нулю. Тогда имеем точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \text{Div}_h X_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Div } X_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{C}}} H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0.$$

Из нее получаем длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow (\text{Div}_h X_{\mathbb{C}})^G \rightarrow (\text{Div } X_{\mathbb{C}})^G \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{C}}} H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \rightarrow H^1(G, \text{Div}_h X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \dots.$$

Так как $H^1(G, \text{Div}_h X_{\mathbb{C}})$ – 2-элементарная группа, т.е. является $\mathbb{F}_2$ -пространством, то из полученной точной последовательности следует равенство

$$\text{rk}(\text{cl}_{\mathbb{C}}((\text{Div } X_{\mathbb{C}})^G)) = \text{rk } H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G. \quad (4)$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Div } X & \xrightarrow{\text{cl}} & H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \alpha \\ (\text{Div } X_{\mathbb{C}})^G & \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{C}}} & H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \end{array},$$

где α – гомоморфизм забывания вещественной структуры

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-),$$

его ядро является 2-элементарной группой (см. [2]), поэтому имеем равенства

$$\rho(X) = \text{rk } H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \text{rk}(\text{cl}_{\mathbb{C}}((\text{Div } X_{\mathbb{C}})^G)). \quad (5)$$

Из (4), (5) следуют равенства

$$\rho(X) = \text{rk } H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G = \text{rk}(H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors})^G. \quad (6)$$

Положим $H = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors}$. Тогда имеет место каноническое вложение $H \subset H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$, а теорема Лефшеца об (1, 1)-классах дает равенство

$$H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors} = H \cap H^1(X(\mathbb{C})). \quad (7)$$

Пусть H_+ , H_- – соответственно инвариантная и антиинвариантная относительно g подгруппы группы H . Тогда из (6), (7) получаем равенство

$$\rho(X) = \text{rk}(H_- \cap H^{1,1}(X(\mathbb{C}))). \quad (8)$$

Пусть $H^{1,1}(X(\mathbb{C}))_+$, $H^{1,1}(X(\mathbb{C}))_-$ – соответственно инвариантное и антиинвариантное относительно g подпространства пространства $H^{1,1}(X(\mathbb{C}))$, а $h_+^{1,1}$, $h_-^{1,1}$ – их размерности. Тогда из равенства (8) следует неравенство

$$\rho(X) \leq h_-^{1,1}. \quad (9)$$

С другой стороны, из формулы Лефшеца о неподвижных точках инволюции $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ следует равенство (см. [3])

$$\chi(X(\mathbb{R})) = 2 + h^{1,1}(X(\mathbb{C})) - 2h_-^{1,1}, \quad (10)$$

поэтому неравенства (9) и (1) равносильны. Так как

$$\rho(X_{\mathbb{C}}) = \operatorname{rk}(H \cap H^{1,1}(X(\mathbb{C}))),$$

из равенства (8) получаем неравенства

$$0 \leq \rho(X_{\mathbb{C}}) - \rho(X) \leq h_+^{1,1}. \quad (11)$$

Равенство (10) можно переписать в виде

$$\chi(X(\mathbb{R})) = 2 + 2h_+^{1,1} - h^{1,1}(X(\mathbb{C})),$$

поэтому неравенства (11) и (2) равносильны. Осталось доказать неравенства (3). Так как

$$\begin{aligned} \rho_0(X_{\mathbb{C}}) &= \operatorname{rk} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) - \rho(X_{\mathbb{C}}) = 2h^{2,0}(X(\mathbb{C})) + h^{1,1}(X(\mathbb{C})) - \rho(X_{\mathbb{C}}), \\ \rho_0(X) &= \operatorname{rk} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) - \rho(X) = \operatorname{rk} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G - \rho(X) \\ &= h^{2,0}(X(\mathbb{C})) + h_-^{1,1} - \rho(X), \end{aligned}$$

имеем

$$\rho_0(X_{\mathbb{C}}) - \rho_0(X) = h^{2,0}(X(\mathbb{C})) + h_+^{1,1} - (\rho(X_{\mathbb{C}}) - \rho(X)).$$

Из этого равенства и неравенств (11) следуют неравенства

$$h^{2,0}(X(\mathbb{C})) \leq \rho_0(X_{\mathbb{C}}) - \rho_0(X) \leq h^{2,0}(X(\mathbb{C})) + h_+^{1,1},$$

которые равносильны неравенствам (3). Предложение доказано.

ТЕОРЕМА. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то выполняется неравенство

$$\rho(X(\mathbb{R})) \leq \rho(X) + q(X),$$

которое становится равенством для M -поверхности, где $q(X)$ – иррегулярность;

- 2) если $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, то для $(M - k)$ -поверхности X выполняются неравенства

$$\rho(X) - k \leq \rho(X(\mathbb{R})) \leq \rho(X), \quad (12)$$

$$\rho_0(X) - k \leq \rho_0(X(\mathbb{R})) \leq \rho_0(X). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение ограничения эквивариантных когомологий

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Так как $H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ (см. [4]), получаем гомоморфизм

$$\beta: H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

В [4] установлено, что этот гомоморфизм удовлетворяет условию $\beta \circ \text{cl} = \text{cl}_{\mathbb{R}}$. Таким образом, имеем равенство

$$H_{\text{alg}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \beta(H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(X(\mathbb{R})) &= \dim \beta(H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) = \dim \beta(H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2) \\ &\leq \dim H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2, \end{aligned}$$

причем для M -поверхности последнее неравенство становится равенством, так как для нее гомоморфизм

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \quad (14)$$

является мономорфизмом (см. [1]). Покажем, что в случае, когда группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, выполняется неравенство

$$\dim H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \leq \rho(X) + q(X),$$

причем для M -поверхности оно становится равенством. Рассмотрим точную последовательность G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 1, \quad (15)$$

где образующая $g \in G$ действует на $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ по правилу: $(g^*(h))(x) = \overline{h(g(x))}$ (черта означает комплексное сопряжение). Из (15) получаем длинную точную последовательность эквивариантных когомологий

$$\cdots \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \rightarrow \cdots. \quad (16)$$

Образ связывающего гомоморфизма δ в ней равен группе $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ (см. [1]). Так как группа $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) = H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})^G$ не имеет кручения, группа кручения $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}$ всегда содержится в группе $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Так как группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, группа кручения $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}$ равна ядру гомоморфизма забывания вещественной структуры

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-).$$

Ядро гомоморфизма α равно 2-элементарной группе $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$, что вытекает из рассмотрения спектральной последовательности (см. [2])

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Таким образом, имеем точную последовательность групп

$$0 \rightarrow H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow \mathbb{Z}^{\rho(X)} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует равенство

$$\dim H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 = \rho(X) + \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)).$$

Осталось заметить, что всегда

$$\dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \leq q(X),$$

причем для M -поверхности это неравенство становится равенством. Первое утверждение теоремы доказано, перейдем к доказательству второго. Из точной последовательности (16) получаем, что в условиях этого утверждения группа $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ равна $\mathbb{Z}^{\rho(X)}$. Пусть X является $(M - k)$ -поверхностью, а $\varkappa$ – размерностью ядра гомоморфизма

$$\beta: H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (17)$$

Тогда для доказательства неравенств (12) достаточно установить, что $\varkappa \leq k$. Рассмотрим точную последовательность групп

$$0 \rightarrow H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0. \quad (18)$$

Так как $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / \delta H^1(X(\mathbb{C}); G, \theta^*)$, из точной последовательности (16) следует, что всегда группа $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ свободная. Следовательно, из точной последовательности (18) получаем точную последовательность $\mathbb{F}_2$ -пространств

$$0 \rightarrow H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что размерность ядра гомоморфизма (17) не превосходит размерности ядра гомоморфизма (14). Чтобы закончить доказательство неравенств (12), достаточно установить, что размерность ядра гомоморфизма (14) равна k . Из спектральной последовательности $\Pi(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ следует, что в условиях второго утверждения гомоморфизм

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G$$

является изоморфизмом. В работах [4], [5] показано, что элемент $h \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ принадлежит $\text{Ker } \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha(h) \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$. Таким образом, размерность ядра гомоморфизма (14) равна размерности подпространства $(1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ пространства $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \otimes \mathbb{F}_2$. Из равенств (см. [6])

$$\begin{aligned} \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &= 2 + \dim H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) - 2k, \\ \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &= 2 + \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \end{aligned}$$

следует, что $\dim(1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = k$. Итак, неравенства (12) теоремы доказаны. Неравенства (13) следуют из неравенств (12) и равенств

$$\rho_0(X) = \operatorname{rk} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G - \rho(X), \quad \rho_0(X(\mathbb{R})) = \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) - \rho(X(\mathbb{R})), \quad (19)$$

$$\dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \operatorname{rk} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G - k. \quad (20)$$

Равенства (19) вытекают из определения чисел Лефшеца, а (20) установлено в [6]. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
- [2] Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
- [3] Харламов В. М. Обобщенное неравенство Петровского // Функцион. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 2. С. 50–56.
- [4] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [5] Краснов В. А. Алгебраические циклы на вещественном алгебраическом GM -многообразии и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 153–173.
- [6] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.

Ярославский государственный университет

Поступило
27.01.97