Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Лекишвили, А. Н. Данелиа, Многомерный оператор сопряжения и деформации классов $Z(\omega^{(2)}; C(T^m))$, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 853–861

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:22:52

УДК 517.51

МНОГОМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР СОПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ КЛАССОВ $Z(\omega^{(2)}; C(T^m))$

М. М. Лекишвили, А. Н. Данелиа

Изучается гладкость сопряженных функций многих переменных в терминах вторых модулей гладкости. Выяснено, что в достаточно общей ситуации полный характер нарушения инвариантности рассматриваемых классов точно такой же, как и для классов, определяемых модулями непрерывности.

Библиография: 19 названий.

1. Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, — есть m -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ с действительными координатами. Рассмотрим множество $M = \{1, \dots, m\}$. Пусть B — произвольное непустое подмножество M , а $C_M B$ — дополнение к множеству B относительно M . Через $|B|$ обозначим число элементов множества B , через x_B — такую точку из $\mathbb{R}^m$, у которой координаты с индексами, составляющими множество $C_M B$, непременно нули.

Далее, $C(T^m)$, $T^m \equiv [-\pi, \pi]^m$, — пространство непрерывных 2π -периодических по каждой переменной функций $f: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ с чебышевской нормой

$$\|f\|_{C(T^m)} = \max_{x \in T^m} |f(x)|.$$

Если $f \in L(T^m)$, то, следуя [1], выражение

$$\tilde{f}_B(x) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \int_{T^{|B|}} f(x + s_B) \prod_{i \in B} \text{Ag}\left(\frac{s_i}{2}\right) ds_i$$

назовем *сопряженной функцией m переменных* по совокупности тех переменных, индексы которых составляют множество B ($\tilde{f}_B \equiv \tilde{f}$ при $m = 1$).

Пусть действительная функция f задана всюду на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Воспользуемся следующими обозначениями из теории конечных разностей [2, с. 251]: для $x \in \mathbb{R}^m$, $h, h_1, \dots, h_m \in \mathbb{R}$ и координатного вектора l_i , $i = 1, \dots, m$, положим

$$\begin{aligned} \Delta_i(h)f(x) &= f(x + hl_i) - f(x), & \Delta_i^2(h)f(x) &= \Delta_i(h)(\Delta_i(h)f(x)), \\ \Delta(h_1, \dots, h_m)f(x) &= f(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m) - f(x_1, \dots, x_m), \\ \Delta^2(h_1, \dots, h_m)f(x) &= \Delta(h_1, \dots, h_m)(\Delta(h_1, \dots, h_m)f(x)). \end{aligned}$$

В соответствии с этим при $m \geq 2$ будем использовать следующие структурные характеристики свойств функции $f \in C(T^m)$:

1) частный модуль непрерывности функции f по переменному x_i

$$\omega_i(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_i(h)f\|_{C(T^m)}, \quad 0 \leq \delta \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m;$$

2) полный модуль непрерывности функции f

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|h_i| \leq \delta_i} \|\Delta(h_1, \dots, h_m)f\|_{C(T^m)}, \quad 0 \leq \delta_i \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m;$$

3) частный модуль гладкости функции f по переменному x_i

$$\omega_i^{(2)}(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_i^2(h)f\|_{C(T^m)}, \quad 0 \leq \delta \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m;$$

4) полный модуль гладкости функции f

$$\omega^{(2)}(f; \delta) = \sup_{|h_i| \leq \delta_i} \|\Delta^2(h_1, \dots, h_m)f\|_{C(T^m)}, \quad 0 \leq \delta_i \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть f и g – две неотрицательные функции, заданные на некотором подмножестве E числовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда запись $f(x) \ll g(x)$, $x \in E$, означает, что существует постоянная $D > 0$ такая, что $f(x) \leq Dg(x)$ при всех $x \in E$.

Пусть ω – модуль непрерывности [3]. Через $H(\omega; C(T^m))$ обозначим множество всех тех функций $f \in C(T^m)$, для каждой из которых

$$\omega(f; \delta) \ll \sum_{i=1}^m \omega(\delta_i), \quad 0 \leq \delta_i \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m,$$

а через $H_i(\omega; C(T^m))$, $i = 1, \dots, m$, – множество всех тех функций $f \in C(T^m)$, для которых

$$\omega_i(f; \delta) \ll \omega(\delta_i), \quad 0 \leq \delta_i \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m.$$

Далее всюду считаем, что при $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $m = 1$ $H(\delta^\alpha; C(T^m)) \equiv \text{Lip } \alpha$.

Пусть $\omega^{(2)}$ – модуль гладкости (см., например, [4, с. 167]). Через $Z_i(\omega^{(2)}; C(T^m))$, $i = 1, \dots, m$, обозначим множество всех тех функций $f \in C(T^m)$, для которых

$$\omega_i^{(2)}(f; \delta) \ll \omega^{(2)}(\delta_i), \quad 0 \leq \delta_i \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m.$$

Положим

$$Z(\omega^{(2)}; C(T^m)) = \bigcap_{i=1}^m Z_i(\omega^{(2)}; C(T^m)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В дальнейшем для краткости считаем $\omega^{(2)} \equiv \Omega$.

2. Обзор результатов, относящихся к сопряженным функциям как одного, так и многих переменных, имеется в работах [5]–[7]. Мы приведем только те из них, которые тесно связаны с изучаемым нами свойством сопряженных функций.

В теории функций вещественной переменной хорошо известна теорема Привалова (см., например, [8, с. 560]) об инвариантности класса функций $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) относительно оператора $\tilde{f}$. Позже эта теорема обобщалась в различных направлениях и в результате исследований авторов работ [9]–[11] и др. сложилась определенная проблематика, где в терминах модулей непрерывности различных порядков находятся прямые и обратные оценки сопряженной функции через те же характеристики плотности.

Сопряженные функции двух переменных впервые, по всей видимости, были рассмотрены Л. Чезари [12] в 1938 году. Ему принадлежит

ТЕОРЕМА А. Если $0 < \alpha < 1$ и $f \in H(\delta^\alpha; C(T^2))$, то

$$\tilde{f}_{\{i\}} \in H(\delta^\alpha; C(T^2)), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\tilde{f}_{\{1,2\}} \in H(\delta^\alpha |\ln \delta|; C(T^2)). \quad (2)$$

Как показал И. Е. Жак [13], включение (1), высказанное Чезари без доказательства, является ошибочным и его следует заменить следующим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\{1\}} &\in H_1(\delta^\alpha; C(T^2)) \cap H_2(\delta^\alpha |\ln \delta|; C(T^2)), \\ \tilde{f}_{\{2\}} &\in H_1(\delta^\alpha |\ln \delta|; C(T^2)) \cap H_2(\delta^\alpha; C(T^2)). \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, в [13] приводится принадлежащий Е. М. Ландису пример функции, который показывает, что включения (2), (3) являются точными.

В работе [14] был анонсирован результат, выясняющий полный характер деформации классов $H(\omega; C(T^m))$ относительно оператора $\tilde{f}_B$. Справедливо следующее утверждение: если $f \in H(\omega; C(T^m))$, $m \geq 2$, и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, т.е. для ω выполнено

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u} du + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(u)}{u^2} du \ll \omega(\delta), \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{e^2},$$

то

$$\tilde{f}_B \in \left(\bigcap_{i \in B} H_i(\omega |\ln \delta|^{|B|-1}; C(T^m)) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in C_M B} H_i(\omega |\ln \delta|^{|B|}; C(T^m)) \right).$$

Существует функция $F \in H(\omega; C(T^m))$ такая, что

$$\begin{aligned} \omega_i(\tilde{F}_B; \delta) &\gg \omega(\delta) |\ln \delta|^{|B|-1}, \quad i \in B, \\ \omega_j(\tilde{F}_B; \delta) &\gg \omega(\delta) |\ln \delta|^{|B|}, \quad j \in C_M B, \end{aligned} \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{e^2},$$

Доказательство этой теоремы в частном случае, когда $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, опубликовано в [15].

В работе [16] доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. а) Если $f \in Z(\delta; C(T^2))$, то

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\{1\}} &\in Z_1(\delta; C(T^2)) \cap Z_2(\delta |\ln \delta|; C(T^2)), \quad \tilde{f}_{\{2\}} \in Z_1(\delta |\ln \delta|; C(T^2)) \cap Z_2(\delta; C(T^2)), \\ \tilde{f}_{\{1,2\}} &\in Z(\delta |\ln \delta|; C(T^2)). \end{aligned}$$

б) Утверждение а) нельзя усилить.

Полный характер нарушения инвариантности класса $Z(\delta; C(T^m))$, $m \geq 2$, относительно действующего в нем многомерного оператора сопряжения был выяснен в работе [17], а именно, справедлива

ТЕОРЕМА Б. а) Пусть $f \in Z(\delta; C(T^m))$, $m \geq 2$. Тогда

$$\tilde{f}_B \in \left(\bigcap_{i \in B} Z_i(\delta |\ln \delta|^{|B|-1}; C(T^m)) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in C_M B} Z_i(\delta |\ln \delta|^{|B|}; C(T^m)) \right).$$

б) Утверждение а) нельзя усилить.

3. В настоящей работе теорема Б обобщается на класс $Z(\Omega; C(T^m))$ в том случае, когда Ω удовлетворяет условию Зигмунда, т.е.

$$S(\Omega; \delta) \ll \Omega(\delta), \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{e^2},$$

где

$$S(\Omega; \delta) = \int_0^\delta \frac{\Omega(u)}{u} du + \delta^2 \int_\delta^\pi \frac{\Omega(u)}{u^3} du.$$

Доказательство этого факта опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 1 (Р. М. Тригуб (1960), см., например, [4, с. 172]). Если $\Omega(t) > 0$ при $t > 0$, то при всех $t \in [0, 1]$ модуль непрерывности ω оценивается через модуль гладкости Ω при помощи неравенств

$$\omega^2(t) \ll C\Omega(t), \quad \omega(t^2) \leq C\Omega(t), \quad C = \text{const} > 0.$$

ЛЕММА 2 (см. [11]). Если функция $\varphi: (0, 1/e^2] \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу Φ , то существует число γ , $0 < \gamma < 1$, такое, что $\varphi(t)/t^\gamma$ почти возрастает на $(0, 1/e^2]$.

ЛЕММА 3. Если $f \in Z(\Omega; C(T^m))$, $m \geq 2$, и Ω удовлетворяет условию Зигмунда, то $\tilde{f}_{\{i\}} \in C(T^m)$, $i = 1, \dots, m$, и справедливы оценки

$$\omega_i^{(2)}(\tilde{f}_{\{i\}}; \delta) \ll \int_0^\delta \frac{\Omega(u)}{u} du + \delta^2 \int_\delta^\pi \frac{\Omega(u)}{u^3} du, \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

$$\omega_k^{(2)}(\tilde{f}_{\{i\}}; \delta) \ll \int_0^{\sqrt{\delta}} \frac{\Omega(u)}{u} du + \Omega(\delta) |\ln \delta|, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{e^2}. \quad (5)$$

Оценка (4) доказывается так же, как и теорема Зигмунда (см., например, [18, с. 199]), с соответствующим небольшим изменением. Что касается оценки (5), ее можно получить, воспользовавшись схемой доказательства из работы [13] и леммой 1.

Справедлива

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. а) Если $f \in Z(\Omega; C(T^m))$, $m \geq 2$, и модуль гладкости Ω удовлетворяет условию Зигмунда, то

$$\tilde{f}_B \in \left(\bigcap_{i \in B} Z_i(\Omega |\ln \delta|^{|B|-1}; C(T^m)) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in C_M B} Z_i(\Omega |\ln \delta|^{|B|}; C(T^m)) \right).$$

б) Существует функция $F \in Z(\Omega; C(T^m))$ такая, что

$$\begin{aligned} \omega_i^{(2)}(\tilde{F}_B; \delta) &\gg \Omega(\delta) |\ln \delta|^{|B|-1}, & i \in B, \\ \omega_j^{(2)}(\tilde{F}_B; \delta) &\gg \Omega(\delta) |\ln \delta|^{|B|}, & j \in C_M B, \end{aligned} \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{e^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как модуль гладкости Ω удовлетворяет условию Зигмунда, то $\tilde{f}_B \in C(T^m)$ (см. [19]), причем порядок сопряжения не имеет значения. Справедливость утверждения а) с учетом сказанного вытекает из леммы 3.

б) Рассмотрим случай, когда размерность евклидова пространства равна m ($m \geq 2$), а количество сопряжений оператора $\tilde{f}_B$ равно $m - 1$.

Не нарушая общности рассуждений, доказательство утверждения б) при $|B| = m - 1$ приведем лишь для оператора

$$(-2\pi)^{m-1} \tilde{f}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_m) = \int_{T^{m-1}} f(x_1 + u_1, \dots, x_{m-1} + u_{m-1}, x_m) \prod_{i=1}^{m-1} \text{Ag} \frac{u_i}{2} du_i. \quad (6)$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_k)_{k \geq 1}$ такую, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < 1, \quad b_0 = 0.$$

Модуль гладкости Ω – непрерывная и неубывающая функция на отрезке $[0, \pi]$, заданная условием теоремы. Изменяя ее значения на промежутках постоянства (если такие имеются), можно, не нарушая общности рассуждений, считать функцию Ω строго возрастающей. Поэтому определена обратная функция Ω^{-1} .

Положим

$$\tau_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Omega^{-1}(b_k), \quad \tau_n^* = \tau_n + \Omega^{-1}(b_n), \quad n \geq 1.$$

Пусть $\nu = 1/(m - 1)$,

$$A = T^{m-1} \times \{x_m \in T : -\pi \leq x_m \leq 0\},$$

$$B = T^{m-1} \times \left\{x_m \in T : 2 \sum_{k=0}^{\infty} \Omega^{-1}(b_k) \leq x_m \leq \pi\right\}.$$

Далее, для любого $n \geq 1$ рассмотрим множества

$$Q_n = T^{m-1} \times \{x_m \in T : x_m = \tau_n^*\}, \quad R_n = T^{m-1} \times \{x_m \in T : x_m = \tau_n\},$$

$$V_n = T^{m-1} \times \{x_m \in T : \tau_n < x_m < \tau_n^*\},$$

$$W_n = T^{m-1} \times \{x_m \in T : \tau_n^* < x_m < \tau_{n+1}\},$$

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{x \in T^m : -\pi \leq x_i \leq -b_n^\nu, |x_k| \leq \pi, k \neq i, \tau_n \leq x_m \leq \tau_{n+1}\},$$

$$q_{n,i}^1 = \{x_i \in T : -\pi \leq x_i < -b_n^\nu\}, \quad q_{n,i}^2 = \{x_i \in T : -b_n^\nu \leq x_i < 0\},$$

$$q_{n,i}^3 = \{x_i \in T : 0 \leq x_i < \pi - b_n^\nu\}, \quad q_{n,i}^4 = \{x_i \in T : \pi - b_n^\nu \leq x_i \leq \pi\},$$

$$i = 1, \dots, m - 1,$$

и функцию $g_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$g_n(u) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq u < -b_n^\nu, \\ u + b_n^\nu, & -b_n^\nu \leq u < 0, \\ b_n^\nu, & 0 \leq u < \pi - b_n^\nu, \\ \pi - u, & \pi - b_n^\nu \leq u \leq \pi. \end{cases}$$

Определим функцию $G: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G(x) = G(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} g_n(x_1) \cdots g_n(x_{m-1}), & x \in Q_n, \\ 0, & x \in A \cup B \cup R_n \cup C_n, \end{cases} \quad n \geq 1,$$

а относительно множеств V_n и W_n , $n \geq 1$, функцию G определим линейной интерполяцией по переменному x_m .

Построенную функцию G продолжим 2π -периодически по непрерывности на все пространство $\mathbb{R}^m$.

Докажем, что справедливо включение

$$G \in \left(\bigcap_{k=1}^{m-1} \text{Lip}_k(1; C(T^m)) \right) \cap Z_m(\Omega; C(T^m)).$$

Для фиксированного $n \geq 1$ множество

$$\overline{V}_n = T^{m-1} \times \{x_m \in T : \tau_n \leq x_m \leq \tau_n^*\}$$

разобьем на подмножества

$$\begin{aligned} \Pi_n^k &= q_{n,1}^{k_1} \times \cdots \times q_{n,m-1}^{k_{m-1}} \times \{x_m \in T : \tau_n \leq x_m \leq \tau_n^*\}, \\ k &= 1, \dots, 4^{m-1}, \quad k_j = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Запишем аналитическое выражение функции G для каждого множества Π_n^k :

$$G(x) = \frac{1}{\Omega^{-1}(b_n)} g_n(x_1) \cdots g_n(x_{m-1})(x_m - \tau_n), \quad x \in \Pi_n^k, \quad n \geq 1, \quad k = 1, \dots, 4^{m-1}.$$

Отсюда следует, что для всех внутренних точек множества Π_n^k , $n \geq 1$, $k = 1, \dots, 4^{m-1}$, выполнено

$$\left| \frac{\partial G(x)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{b_n'}{\Omega^{-1}(b_n)} (x_m - \tau_n) \leq \frac{b_n'}{\Omega^{-1}(b_n)} (\tau_n^* - \tau_n) \leq 1. \quad (7)$$

Непрерывная функция $G: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ на множестве $A \cup B \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ равна 0. Значит, в силу (7) заключаем, что $G \in \text{Lip}_1(1; C(T^m))$. Точно так же можно установить принадлежность функции G классу $\text{Lip}_k(1; C(T^m))$, $k = 2, \dots, m-1$.

Для всех внутренних точек множества Π_n^k , $n \geq 1$, $k = 1, \dots, 4^{m-1}$, выполнено

$$\left| \frac{\partial G(x)}{\partial x_m} \right| \leq \frac{1}{\Omega^{-1}(b_n)} |g_n(x_1) \cdots g_n(x_{m-1})| \leq \frac{b_n}{\Omega^{-1}(b_n)} = \frac{\Omega(\tau_n^* - \tau_n)}{\tau_n^* - \tau_n}.$$

Поэтому для всех различных точек $(x_1, \dots, x_m)$ и $(x_1, \dots, x_m \pm h)$, принадлежащих V_n , $n \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} |G(x_1, \dots, x_m + h) - 2G(x_1, \dots, x_m) + G(x_1, \dots, x_m - h)| &\leq 2 \left| \frac{\partial G(x)}{\partial x_m} \right| \cdot |h| \\ &\leq 2 \frac{\Omega(\tau_n^* - \tau_n)}{\tau_n^* - \tau_n} |h|. \end{aligned}$$

Так как $0 < |h| \leq \tau_n^* - \tau_n$, отсюда получаем

$$|\Delta_m^2(h)G(x)| \leq C\Omega(|h|), \quad x \in V_n.$$

Приходим к выводу, что $G \in Z_m(\Omega; C(T^m))$, причем это включение является точным. Действительно, если $0 \leq x_i < \pi - b_n^\nu$, $i = 1, \dots, m-1$, $n \geq 1$, то

$$|G(x_1, \dots, x_{m-1}, \tau_{n+1}) + G(x_1, \dots, x_{m-1}, \tau_n) - 2G(x_1, \dots, x_{m-1}, \tau_n^*)| \\ = |2G(x_1, \dots, x_{m-1}, \tau_n^*)| = 2b_n = 2\Omega(\tau_n^* - \tau_n).$$

Из всего сказанного выше следует, что справедливо включение

$$G \in \left(\bigcap_{k=1}^{m-1} \text{Lip}_k(1; C(T^m)) \right) \cap Z_m(\Omega; C(T^m)).$$

Согласно (6) для функции G имеем

$$(-2\pi)^{m-1} (\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n+1}) \\ + \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n) - 2\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n^*)) \\ = \int_{T^{m-1}} (G(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_{n+1}) + G(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_n) - 2G(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_n^*)) \\ \times \prod_{i=1}^{m-1} \text{Ag} \frac{u_i}{2} du_i, \quad n \geq 1.$$

Учитывая, что на всех множествах вида

$$\{x \in T^m : |x_i| \leq \pi, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad x_m = \tau_n\}, \quad n \geq 1,$$

функция G равна 0, получаем

$$(-2\pi)^{m-1} (\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n+1}) \\ + \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n) - 2\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n^*)) \\ = -2 \int_{T^{m-1}} G(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_n^*) \prod_{i=1}^{m-1} \text{Ag} \frac{u_i}{2} du_i.$$

Подынтегральная функция неотрицательна на T^{m-1} , а

$$G(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_n^*) = b_n, \quad b_n^\nu \leq u_i < \pi - b_n^\nu, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad n \geq 1.$$

Значит,

$$(2\pi)^{m-1} |\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n+1}) \\ + \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n) - 2\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n^*)| \\ \geq b_n \int_{b_n^\nu}^{\pi - b_n^\nu} \text{Ag} \frac{u_1}{2} du_1 \cdots \int_{b_n^\nu}^{\pi - b_n^\nu} \text{Ag} \frac{u_{m-1}}{2} du_{m-1} \\ = b_n \left(\int_{b_n^\nu}^{\pi - b_n^\nu} \text{Ag} \frac{t}{2} dt \right)^{m-1} \geq \frac{1}{2^{m-1}} b_n |\ln b_n|^{m-1}$$

для всех n , начиная с некоторого номера n_0 .

На основании леммы 2 с учетом соотношения $b_n = \Omega(\tau_n^* - \tau_n)$ имеем, что при любом n , начиная с некоторого номера n_1 ,

$$\begin{aligned} & |\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n+1}) + \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n) \\ & - 2\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_n^*)| \geq \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^{m-1} \Omega(\tau_n^* - \tau_n) |\ln(\tau_n^* - \tau_n)|^{m-1}, \end{aligned}$$

где $\gamma, 0 < \gamma < 1$, — некоторая константа, зависящая лишь от Ω . Значит,

$$\omega_m^{(2)}(\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta) \gg \Omega(\delta) |\ln \delta|^{m-1}, \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{e^2}.$$

Функцию G от m переменных обозначим через $\Lambda(m, l_m)$ и назовем *функцией типа Λ размерности m по координатному направлению l_m* .

Функция $\Lambda(m, l_m)$ обладает следующими особенностями:

$$\Lambda(m, l_m) \in Z_m(\Omega; C(T^m)), \quad \tilde{\Lambda}_{\{1, \dots, m-1\}}(m, l_m) \in Z_m(\Omega |\ln \delta|^{m-1}; C(T^m)),$$

причем эти включения являются точными.

Точно так же можно построить и функции $\Lambda(m, l_1), \dots, \Lambda(m, l_{m-1})$, $m \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $m = 1$ положим

$$\Lambda(1, l_1) = F_2(\Omega, x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \int_x^1 \frac{\Omega^*(t)}{t^2} dt, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, 2\pi], \end{cases} \quad \text{где } \Omega^*(t) = t^2 \sup_{u \geq t} \frac{\Omega(u)}{u^2}.$$

Функция F_2 непрерывна и $C_1\Omega(t) \leq \omega^{(2)}(F_2; t) \leq C_2\Omega(t)$, C_1, C_2 — постоянные (см. [4, с. 168–170]).

Далее, рассмотрим функцию $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, которая в каждой точке x пространства $\mathbb{R}^m$ задана равенством

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \Lambda(m-1, l_k)(x_1, \dots, x_{m-1}) + \Lambda(m, l_m)(x_1, \dots, x_m).$$

Для всех $\delta, 0 < \delta \leq 1/e^2$, имеем

$$\begin{aligned} \omega_i^{(2)}(\tilde{F}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta) & \gg \Omega(\delta) |\ln \delta|^{m-2}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \omega_m^{(2)}(\tilde{F}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta) & \gg \Omega(\delta) |\ln \delta|^{m-1}. \end{aligned}$$

Итак, справедливость утверждения б) теоремы доказана в том случае, когда количество сопряжений оператора равно $m-1$.

Наконец, пусть всюду на $\mathbb{R}^m$

$$K(x) = \sum_{k=1}^m \Lambda(m, l_k)(x).$$

Очевидно, $K \in Z(\Omega; C(T^m))$ и, кроме того, для всех $\delta, 0 < \delta \leq 1/e^2$,

$$\omega_i^{(2)}(\tilde{K}_{\{1, \dots, m\}}; \delta) \gg \Omega(\delta) |\ln \delta|^{m-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Значит, K является той, в некотором смысле “экстремальной функцией”, которая подтверждает справедливость утверждения б) теоремы для оператора $\tilde{f}_{\{1, \dots, m\}}$. Основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жижиашвили Л. В. О сопряженных функциях переменных // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 3. С. 517–518.
- [2] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [3] Никольский С. М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 3. С. 191–194.
- [4] Дзялык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [5] Жижиашвили Л. В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1973. Т. 28. № 2. С. 65–119.
- [6] Жижиашвили Л. В. Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1983.
- [7] Жижиашвили Л. В. Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1993.
- [8] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
- [9] Zygmund A. Smooth functions // Duke Math. J. 1945. V. 12. P. 47–76.
- [10] Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 5. С. 285–302.
- [11] Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. ММО. 1956. Т. 5. С. 484–522.
- [12] Cesari L. Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di piu variabili // Ann. Sci. École Norm. Sup. (2). 1938. V. 7. P. 279–295.
- [13] Жак И. Е. По поводу одной теоремы Л. Чезари о сопряженных функциях двух переменных // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 6. С. 877–880.
- [14] Лекишвили М. М. Многомерный оператор сопряжения и деформации классов // Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 135. № 1. С. 57–59.
- [15] Лекишвили М. М. О сопряженных функциях многих переменных в классе $Lip \alpha$ // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 3. С. 361–372.
- [16] Жак И. Е. Об одной теореме Зигмунда о сопряженных функциях // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. № 3. С. 387–389.
- [17] Лекишвили М. М. О сопряженных функциях многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 94. № 1. С. 21–23.
- [18] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М., 1965.
- [19] Жижиашвили Л. В. Интегрируемость и непрерывность сопряженных функций многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1980. Т. 97. № 1. С. 17–20.

Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили

Поступило
05.01.97