Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, Когерентно ядерные операторы в парах гильбертовых пространств, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 866–872

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:43:22

УДК 517.982.27

КОГЕРЕНТНО ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПАРАХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. И. Овчинников

В статье приведено доказательство того, что идеал ядерных операторов, действующих в паре гильбертовых пространств, совпадает с идеалом когерентно ядерных операторов. Получена новая формула для K -функционала в паре алгебр всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовых пространствах, образующих пару, а также новые интерполяционные теоремы для ядерных операторов.

Библиография: 6 названий.

Идеалы операторов, действующих в банаховых парах, играют важную роль в методе орбит построения и изучения интерполяционных пространств (см. [1]). Среди них идеал когерентно ядерных операторов занимает особое место, поскольку является в определенном смысле минимальным. Напомним, что оператор T , действующий из банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ в банахову пару $\{Y_0, Y_1\}$, называется *когерентно ядерным*, если существуют $x_j^* \in (X_0 + X_1)^*$ и $y_j \in Y_0 \cap Y_1$, где $j \in \mathbb{Z}$, такие, что для всех $x \in X_0 + X_1$

$$T(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j^*(x) y_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (y_j \otimes x_j^*)(x),$$

при этом

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|x_j^*\|_{X_0^*} \|y_j\|_{Y_0} < \infty, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|x_j^*\|_{X_1^*} \|y_j\|_{Y_1} < \infty.$$

Тем самым, оператор T является ядерным из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 , причем разложение в абсолютно сходящийся ряд одномерных операторов происходит одновременно в обоих пространствах пары.

Через $\text{Coh}(\{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ обозначим пространство всех когерентно ядерных операторов.

Если H и G – гильбертовы пространства, то через $S_p(H \rightarrow G)$ будем обозначать пространство операторов $T: H \rightarrow G$ таких, что $(T^*T)^{p/2}$ – ядерный оператор в пространстве H . При $p = 1$ получаем пространство всех ядерных операторов, при $p = 2$ – пространство всех операторов Гильберта–Шмидта. Введем норму в $S_p(H \rightarrow G)$

$$\|T\|_{S_p(H \rightarrow G)} = (\text{tr}(T^*T)^{p/2})^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда и Российского правительства, грант JD 7100.

Для краткости будем писать $S_p(H)$ вместо $S_p(H \rightarrow H)$ и $\text{Cohn}(H_0, H_1)$ вместо $\text{Cohn}(\{H_0, H_1\} \rightarrow \{H_0, H_1\})$. Через $L(H)$ будем обозначать пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве H , с обычной операторной нормой.

Оказалось, что давно возникший вопрос о совпадении $S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$ с пространством $\text{Cohn}(H_0, H_1)$ когерентно ядерных операторов решается положительно. Это объясняет тот факт, что с точки зрения орбит идеалы $S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$ и $\text{Cohn}(H_0, H_1)$ неразличимы (см. [1]). Соответствующая теорема и составляет п. 1. В п. 2 получена формула для K -функционала в паре алгебр линейных операторов и ее следствия. В п. 3 рассмотрены интерполяционные теоремы, которые вытекают из совпадения ядерных и когерентно ядерных операторов.

1. Основная теорема. Основные факты, обеспечивающие совпадение ядерных и когерентно ядерных операторов в гильбертовых парах, известны сравнительно давно. К сожалению, они не были своевременно интерпретированы в таком контексте.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\overline{H} = \{H_0, H_1\}$ – произвольная регулярная пара гильбертовых пространств, т.е. пересечение $H_0 \cap H_1$ плотно в H_0 и в H_1 . Пространство ядерных операторов в паре $\overline{H}$ совпадает с пространством когерентно ядерных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$. Хорошо известно, что в этом случае оператор $U: H_0 \rightarrow H_0$ представим в виде произведения операторов $V_0: H_0 \rightarrow F_0$ и $W_0: F_0 \rightarrow H_0$, где F_0 – гильбертово пространство, а $V_0 \in S_2(H_0 \rightarrow F_0)$, $W_0 \in S_2(F_0 \rightarrow H_0)$. При этом $\|U\|_{S_1(H_0)} = \|W_0\|_{S_2(F_0 \rightarrow H_0)} \|V_0\|_{S_2(H_0 \rightarrow F_0)}$. То же самое справедливо и для оператора $U \in S_1(H_1)$. Очевидно, операторы W_0 и W_1 можно считать мономорфизмами, и рассматривать в качестве вложений пространств F_0 и F_1 в $H_0 + H_1$. Следовательно, эти пространства образуют гильбертову пару. Заметим, что эту пару можно считать регулярной. Операторы V_0, V_1 задают отображение пары $\{H_0, H_1\}$ в пару $\{F_0, F_1\}$, а операторы W_0, W_1 – отображение пары $\{F_0, F_1\}$ в пару $\{H_0, H_1\}$ (подробнее см. в [1] или [2]). Таким образом, существуют пара гильбертовых пространств $\overline{F} = \{F_0, F_1\}$ и операторы $U_1: \overline{H} \rightarrow \overline{F}$ и $U_2: \overline{F} \rightarrow \overline{H}$ такие, что $U_1 \in S_2(H_0 \rightarrow F_0) \cap S_2(H_1 \rightarrow F_1)$, $U_2 \in S_2(F_0 \rightarrow H_0) \cap S_2(F_1 \rightarrow H_1)$ и

$$U = U_2 U_1, \quad (1)$$

$$\|U\|_{S_1(H_i)} = \|U_1\|_{S_2(H_i \rightarrow F_i)} \|U_2\|_{S_2(F_i \rightarrow H_i)}, \quad i = 0, 1.$$

Любая регулярная гильбертова пара $\overline{F}$ изоморфна паре весовых пространств $\{\ell_2, \ell_2(\omega)\}$ (см. [1]). Обозначим через $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ стандартный базис в соответствующем ℓ_2 и положим $y_j = U_2(e_j)$, $x_j^* = U_1^*(e_j)$. Тогда из (1) следует, что

$$U = \sum_{j \in \mathbb{J}} y_j \otimes x_j^*.$$

В самом деле,

$$U_1 = \sum_{k \in \mathbb{J}} e_k \otimes x_k^*, \quad U_2 = \sum_{j \in \mathbb{J}} y_j \otimes e_j,$$

поэтому

$$U_2 U_1 = \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} y_j \otimes e_j \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{J}} e_k \otimes x_k^* \right) = \sum_{k, j \in \mathbb{J}} (e_j, e_k) y_j \otimes x_k^* = \sum_{j \in \mathbb{J}} y_j \otimes x_j^*.$$

Напомним, что если фиксировать произвольный ортонормированный базис $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ в гильбертовом пространстве H , то

$$\|T\|_{S_2(H \rightarrow G)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \|T(e_j)\|_G^2 \right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \|x_j^*\|_{H_0^*} \|y_j\|_{H_0} \right)^2 &\leq \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \|y_j\|_{H_0}^2 \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \|x_j^*\|_{H_0^*}^2 \right) \\ &= \|U_1\|_{S_2(H_0 \rightarrow F_0)}^2 \|U_2\|_{S_2(F_0 \rightarrow H_0)}^2 < \infty, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \|x_j^*\|_{H_1^*} \|y_j\|_{H_1} \right)^2 &= \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} (\omega_j^{1/2} \|x_j^*\|_{H_1^*}) (\omega_j^{-1/2} \|y_j\|_{H_1}) \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \omega_j \|x_j^*\|_{H_1^*}^2 \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \omega_j^{-1} \|y_j\|_{H_1}^2 \right) \\ &= \|U_1\|_{S_2(H_1 \rightarrow F_1)}^2 \|U_2\|_{S_2(F_1 \rightarrow H_1)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что для банаховых пар утверждение, подобное теореме 1, вообще говоря, неверно (см. [1], [2]).

2. Вычисление K -функционала для банаховой пары $\{L(H_0), L(H_1)\}$. Напомним, что для любой банаховой пары $\overline{X} = \{X_0, X_1\}$ определен K -функционал Петре на пространстве $X_0 + X_1$:

$$K(s, t, x; \overline{X}) = \inf_{x = x_0 + x_1} s \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1}, \quad s, t > 0.$$

Пусть $\{H_0, H_1\}$ – пара гильбертовых пространств. Вновь будем предполагать, что эта пара регулярна.

Очевидно, что любой линейный ограниченный оператор $T: H_0 \rightarrow H_0$ действует непрерывно из $H_0 \cap H_1$ в $H_0 + H_1$, т.е. имеет место непрерывное вложение $L(H_0) \subset L(H_0 \cap H_1 \rightarrow H_0 + H_1)$. Аналогичное вложение справедливо и для пространства $L(H_1)$. Поэтому алгебры операторов $L(H_0)$ и $L(H_1)$ образуют банахову пару. Теорема 1 позволяет описать сумму пространств этой пары и вычислить K -функционал.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор $U \in L(H_0 \cap H_1 \rightarrow H_0 + H_1)$ принадлежит $L(H_0) + L(H_1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{y \in H_0 \cap H_1} K\left(\frac{1}{\|y\|_{H_0}}, \frac{1}{\|y\|_{H_1}}, U(y); \{H_0, H_1\}\right) < \infty,$$

при этом

$$K(s, t, U; \{L(H_0), L(H_1)\}) \asymp \sup_{y \in H_0 \cap H_1} K\left(\frac{s}{\|y\|_{H_0}}, \frac{t}{\|y\|_{H_1}}, U(y); \{H_0, H_1\}\right). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $L(H)$ является сопряженным к пространству ядерных операторов $S_1(H)$. Двойственность $L(H)$ и $S_1(H)$ может быть задана формулой

$$\langle U, T \rangle = \text{tr}(UT). \quad (3)$$

Покажем, что пара $\{L(H_0), L(H_1)\}$ является сопряженной к паре $\{S_1(H_0), S_1(H_1)\}$. Действительно, $S_1(H_0 + H_1 \rightarrow H_0 \cap H_1)$ плотно вложено в $S_1(H_0)$ и в $S_1(H_1)$ ввиду регулярности пары $\{H_0, H_1\}$. Если воспользоваться двойственностью пространств $S_1(H_0 + H_1 \rightarrow H_0 \cap H_1)$ и $L(H_0 \cap H_1 \rightarrow H_0 + H_1)$, задаваемой формулой (3) где $T \in S_1(H_0 + H_1 \rightarrow H_0 \cap H_1)$, а $U \in L(H_0 \cap H_1 \rightarrow H_0 + H_1)$, то мы получим, что сопряженное пространство к $S_1(H_0)$ отождествлено с $L(H_0)$ в $L(H_0 \cap H_1 \rightarrow H_0 + H_1)$, а сопряженное к $S_1(H_1)$ — с $L(H_1)$.

Как известно (см. [3]), для любой регулярной пары $\{X_0, X_1\}$ справедливо изометрическое равенство

$$(X_0 \cap X_1)^* \cong X_0^* + X_1^*. \quad (4)$$

Применяя (4) к паре $\{S_1(H_0), S_1(H_1)\}$, получим, что изометрически

$$L(H_0) + L(H_1) \cong (S_1(H_0) \cap S_1(H_1))^*,$$

т.е. $U \in L(H_0) + L(H_1)$, если $\sup_T |\text{tr}(UT)| < \infty$, где точная верхняя грань берется по всем операторам из единичного шара в $S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$. В силу теоремы 1 верхняя грань может быть взята по единичному шару в $\text{Cohn}(H_0, H_1)$, который является замкнутой выпуклой оболочкой операторов вида $y \otimes x^*$, где $x^* \in (H_0 + H_1)^* \cong H_0^* \cap H_1^*$ и $y \in H_0 \cap H_1$. Иными словами,

$$\sup_{x^*, y} |x^*(Uy)| < \infty,$$

где $\|x^*\|_{H_0^*} \|y\|_{H_0} \leq 1$, $\|x^*\|_{H_1^*} \|y\|_{H_1} \leq 1$. Это множество мы обозначим через $\mathcal{R}$.

Таким образом, $U \in L(H_0) + L(H_1)$ эквивалентно

$$\sup_{\{x^*, y\} \in \mathcal{R}} |x^*(Uy)| < \infty,$$

при этом

$$\|U\|_{L(H_0)+L(H_1)} \asymp \sup_{\{x^*, y\} \in \mathcal{R}} |x^*(Uy)|$$

с универсальными константами.

Очевидно,

$$\sup_{\{x^*, y\} \in \mathcal{R}} |x^*(Uy)| = \sup_{y \in H_0 \cap H_1} \sup_{\substack{\|x^*\|_{H_0^*} \leq 1/\|y\|_{H_0} \\ \|x^*\|_{H_1^*} \leq 1/\|y\|_{H_1}}} |x^*(Uy)|.$$

Как следует из [3], для всех $z \in H_0 + H_1$

$$\sup_{\substack{\|x^*\|_{H_0^*} \leq \alpha \\ \|x^*\|_{H_1^*} \leq \beta}} |x^*(z)| = K(\alpha, \beta, z; \{H_0, H_1\}),$$

поэтому

$$\|U\|_{L(H_0)+L(H_1)} \asymp \sup_{y \in H_0 \cap H_1} K\left(\frac{1}{\|y\|_{H_0}}, \frac{1}{\|y\|_{H_1}}, U(y); \{H_0, H_1\}\right).$$

Аналогично получаем

$$\|U\|_{L(H_0 \rightarrow G_0)+L(H_1 \rightarrow G_1)} \asymp \sup_{y \in H_0 \cap H_1} K\left(\frac{1}{\|y\|_{H_0}}, \frac{1}{\|y\|_{H_1}}, U(y); \{G_0, G_1\}\right),$$

где $\{G_0, G_1\}$ — произвольная пара гильбертовых пространств. Поэтому имеет место (2), где константы эквивалентности универсальны. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $a \otimes b^*$ – одномерный оператор из $L(H_0 \cap H_1 \rightarrow H_0 + H_1)$, т.е. $a \in H_0 + H_1$, $b^* \in H_0^* + H_1^*$. Тогда $a \otimes b^* \in L(H_0) + L(H_1)$ эквивалентно

$$\sup_{s, t > 0} K(s, t, a; \{H_0, H_1\}) K\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}, b^*; \{H_0^*, H_1^*\}\right) < \infty,$$

при этом

$$K(s, t, a \otimes b^*; \{L(H_0), L(H_1)\}) \asymp \sup_{u, v > 0} K(u, v, a; \{H_0, H_1\}) K\left(\frac{s}{u}, \frac{t}{v}, b^*; \{H_0^*, H_1^*\}\right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 $a \otimes b^* \in L(H_0) + L(H_1)$, если

$$\sup_{y \in H_0 \cap H_1} K\left(\frac{1}{\|y\|_{H_0}}, \frac{1}{\|y\|_{H_1}}, a; \{H_0, H_1\}\right) |b^*(y)| < \infty. \quad (6)$$

Очевидно,

$$K(s, t, a; \{H_0, H_1\}) = \sup_{u, v > 0} \min\left\{\frac{s}{u}, \frac{t}{v}\right\} K(u, v, a; \{H_0, H_1\}).$$

Поэтому левая часть (6) равна

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in H_0 \cap H_1} \sup_{u, v > 0} \min\left\{\frac{1}{u\|y\|_{H_0}}, \frac{1}{v\|y\|_{H_1}}\right\} K(u, v, a; \{H_0, H_1\}) |b^*(y)| \\ &= \sup_{u, v > 0} K(u, v, a; \{H_0, H_1\}) \sup_{y \in H_0 \cap H_1} \frac{|b^*(y)|}{\max\{u\|y\|_{H_0}, v\|y\|_{H_1}\}} \\ &= \sup_{u, v > 0} K(u, v, a; \{H_0, H_1\}) K\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, b^*; \{H_0^*, H_1^*\}\right). \end{aligned}$$

Аналогично получается и (5). Следствие доказано.

Назовем функцию

$$f(s, t) = \sup_{u, v > 0} f_1(u, v) f_2\left(\frac{s}{u}, \frac{t}{v}\right)$$

идемпотентной сверткой функций f_1 и f_2 . Таким образом, K -функционал тензорного произведения $a \otimes b^*$ равен свертке K -функционалов сомножителей.

Заметим, что если обозначим через a^* элемент из $H_0^* + H_1^*$ такой, что

$$K(u, v, a^*; \{H_0^*, H_1^*\}) \asymp K^*(u, v, a; \{H_0, H_1\}),$$

где $\varphi^*(u, v) = 1/\varphi(1/u, 1/v)$, то получим, что

$$K(1, t, a \otimes a^*; \{L(H_0), L(H_1)\}) \asymp \rho_K(t),$$

где $\rho_K(t)$ – функция растяжения $K(1, v, a; \{H_0, H_1\})$ (ср. с аналогичной формулой в [4], где вместо пары $\{H_0, H_1\}$ рассматривается пара $\{\ell_1, \ell_\infty\}$).

Формула (2) для K -функционала приводит к прямому доказательству равенства из [5]

$$(L(H_0), L(H_1))_{\theta, \infty} = L((H_0, H_1)_{\theta, 1} \rightarrow (H_0, H_1)_{\theta, \infty}).$$

В самом деле, по определению $U \in (L(H_0), L(H_1))_{\theta, \infty}$ означает, что

$$\sup_{t>0} \frac{K(1, t, U; \{L(H_0), L(H_1)\})}{t^\theta} < \infty.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \sup_{y \in H_0 \cap H_1} \frac{K(1/\|y\|_{H_0}, t/\|y\|_{H_1}, U(y); \{H_0, H_1\})}{t^\theta} \\ &= \sup_{y \in H_0 \cap H_1} \sup_{t>0} \frac{K(1/\|y\|_{H_0}, t/\|y\|_{H_1}, U(y); \{H_0, H_1\})}{t^\theta} \\ &= \sup_{y \in H_0 \cap H_1} \frac{\|U(y)\|_{(H_0, H_1)_{\theta, \infty}}}{\|y\|_{H_0}^{1-\theta} \|y\|_{H_1}^\theta} < \infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|U(y)\|_{(H_0, H_1)_{\theta, \infty}} \leq C \|y\|_{H_0}^{1-\theta} \|y\|_{H_1}^\theta$$

для некоторой константы C и всех $y \in H_0 \cap H_1$, что эквивалентно ограниченности U из $(H_0, H_1)_{\theta, 1}$ в $(H_0, H_1)_{\theta, \infty}$.

3. Интерполяция ядерных операторов. Тот факт, что ядерные операторы, действующие в паре гильбертовых пространств, оказываются когерентно ядерными, позволяет усилить интерполяционные теоремы для таких операторов (ср. с [5]).

ТЕОРЕМА 3. *Если любой оператор $T \in S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$ ограниченно действует из промежуточного пространства E в промежуточное пространство F , то оператор T является ядерным из E в F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы и принципа равномерной ограниченности следует, что для любого одномерного оператора $y \otimes x^* \in S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$

$$\|x^* \|_{E^*} \|y\|_F \leq C \max\{\|x^*\|_{H_0^*} \|y\|_{H_0}, \|x^*\|_{H_1^*} \|y\|_{H_1}\}.$$

Поэтому, если $T \in \text{Cohn}(H_0, H_1)$, то существуют $x_j^* \in (H_0 + H_1)^* = H_0^* \cap H_1^*$ и $y_j \in H_0 \cap H_1$ такие, что

$$T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} y_j \otimes x_j^*$$

и

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|x_j^*\|_{E^*} \|y_j\|_F \leq 2C \max_{i=0,1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|x_j^*\|_{H_i^*} \|y_j\|_{H_i} < \infty.$$

Теорема доказана.

В [1] показано, что если $T \in S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$, то оператор T непрерывно действует из обобщенного пространства Марцинкевича

$$M_\varphi(H_0, H_1) = \left\{ x \in H_0 + H_1 : \sup_{s, t > 0} \frac{K(s, t, x; \{H_0, H_1\})}{\varphi(s, t)} < \infty \right\}$$

в обобщенное пространство Лоренца

$$\Lambda_\varphi(H_0, H_1) = \left\{ x \in H_0 + H_1 : x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j, \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi^*(\|x_j\|_{H_0}, \|x_j\|_{H_1}) < \infty \right\}.$$

Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $T \in S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$, где $\{H_0, H_1\}$ – пара гильбертовых пространств таких, что $H_0 \cap H_1$ плотно в H_0 и в H_1 , то оператор T ядерный из $M_\varphi(H_0, H_1)$ в $\Lambda_\varphi(H_0, H_1)$.

Значит, если $T \in S_1(H_0) \cap S_1(H_1)$, то T будет ядерным в любом пространстве E , удовлетворяющем условиям

$$\Lambda_\varphi(H_0, H_1) \subset E \subset M_\varphi(H_0, H_1). \quad (7)$$

Как известно (см. [1] или [6]), условия (7) эквивалентны

$$\|x\|_E \leq \varphi^*(\|x\|_{H_0}, \|x\|_{H_1}), \quad \|f\|_{E^*} \leq \varphi(\|f\|_{H_0}, \|f\|_{H_1})$$

для всех $x \in H_0 \cap H_1$ и $f \in (H_0 + H_1)^*$.

Заметим, что следствие 2 обобщает результаты из [5], где показано, что T – ядерный оператор из пространства $(H_0, H_1)_{\theta, \infty}$ в пространство $(H_0, H_1)_{\theta, 1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rep. 1984. V. 1. № 2. P. 349–515.
- [2] Овчинников В. И. Интерполяция операторов классов S_p в гильбертовых парах // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 2. С. 273–282.
- [3] Bergh J., Löfström J. Interpolation Spaces. An Introduction. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976.
- [4] Овчинников В. И. Вычисление K -функционала для пар пространств матриц // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 98–109.
- [5] Овчинников В. И. Интерполяция в симметрично-нормированных идеалах операторов, действующих в различных гильбертовых пространствах // Функцион. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 3. С. 80–82.
- [6] Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославль, 1977. С. 31–74.

Воронежский государственный университет
E-mail: vio@mathd.vucnit.voronezh.su

Поступило
11.11.96