Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Попов, О разрешимости эквациональных теорий многообразий колец, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 873–881

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:51:03

УДК 515.122.5+512.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ЭКВАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ МНОГООБРАЗИЙ КОЛЕЦ

В. Ю. Попов

Получен результат, иллюстрирующий сложность описания многообразий колец с неразрешимой эквациональной теорией.

Библиография: 7 названий.

В работе [1] А. И. Мальцев построил конечно базлируемое многообразие квазигрупп с неразрешимой эквациональной теорией и поставил опубликованный в [2] вопрос о существовании конечно базлируемых многообразий полугрупп, групп и колец с неразрешимой эквациональной теорией. Положительный ответ на этот вопрос для полугрупп получен в [3], а для групп – в [4]. В работе [5] построены примеры конечно базлируемых многообразий неассоциативных колец с неразрешимой эквациональной теорией. Следующий результат иллюстрирует сложность описания многообразий колец с неразрешимой эквациональной теорией.

ТЕОРЕМА. *Существует последовательность конечно базлируемых многообразий неассоциативных колец $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots$ такая, что для всех i эквациональная теория $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория $\mathfrak{B}_i$ разрешима.*

Из теоремы вытекает утверждение, решающее поставленную в общем случае в работе [6] проблему описания SA-критических теорий для многообразий $\mathfrak{A}_i$.

СЛЕДСТВИЕ. *Теория $\forall \mathfrak{A}_i$ является единственной критической теорией многообразия $\mathfrak{A}_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Введем ряд обозначений для слов свободного группоида Γ со свободным порождающим множеством $e, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$. Пусть

$$s(x_1, \dots, x_k) = ((x_{k-1}((\dots (x_4((x_1 x_2) x_3)) x_5 \dots) x_{k-2})) x_k),$$

$$t(x_1, \dots, x_{k+l}) = s(s(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+l}).$$

Если $w(e_1, \dots, e_k) \in \Gamma$, то через $w_k(x)$ обозначим слово, полученное из $w(e_1, \dots, e_k)$ подстановкой

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_k \\ x & \dots & x \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$A(x) = t_{k+17}(x), \quad B(x) = t_{k+18}(x), \quad C(x) = t_{k+19}(x), \quad D(x) = t_{k+20}(x),$$

$$Q_i(x) = t_{k+i+21}(x),$$

где $i \in \omega$, k – фиксированное натуральное число такое, что $k \geq 40$. Будем считать, если не оговорено противное, что

$$w_1 \dots w_n = (\dots((w_1 w_2) w_3) \dots) w_n, \quad w_1 w_2^n = (\dots((w_1 w_2) w_2) \dots) w_2$$

и y^0 – пустой символ.

Пусть P – некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел. Обозначим через M двухленточную машину Минского, вычисляющую частичную характеристическую функцию множества P . Произвольной команде

$$q_i \delta_1 \delta_2 \rightarrow q_j \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

машины M сопоставим кодирующее ее тождество:

$$\begin{aligned} Q_i(x)C(x)D(x) &= Q_j(x)A^{\varepsilon_1}(x)B^{\varepsilon_2}(x)C(x)D(x), & \text{если } \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \\ Q_i(x)A(x)D(x) &= Q_j(x)A^{\varepsilon_1+1}(x)B^{\varepsilon_2}(x)D(x), & \text{если } \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \\ Q_i(x)B(x)C(x) &= Q_j(x)A^{\varepsilon_1}(x)B^{\varepsilon_2+1}(x)C(x), & \text{если } \delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \\ Q_i(x)A(x)B(x) &= Q_j(x)A^{\varepsilon_1+1}(x)B^{\varepsilon_2+1}(x), & \text{если } \delta_1 = 0, \delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Пусть число внутренних состояний машины M равно $m + 1$,

$$W = \{A(x), B(x), C(x), D(x), Q_i(x) \mid 0 \leq i \leq m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{X}_k^1$ многообразие колец, заданное тождествами, кодирующими команды машины M , а через $\mathfrak{X}_k^2$ многообразие колец, заданное тождествами

$$\begin{aligned} yF(x)B(x) &= yB(x)A(x), \quad yC(x)D(x) = yD(x)C(x), \quad yA(x)D(x) = yD(x)A(x), \\ yB(x)C(x) &= yC(x)B(x), \quad z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_r) = 0, \end{aligned}$$

где $r = v + k + 100$.

Пусть $\mathfrak{R}_2$ – многообразие всех колец характеристики 2 и $\mathfrak{X}_k = \mathfrak{X}_k^1 \cap \mathfrak{X}_k^2 \cap \mathfrak{R}_2$. Обозначим через $F\mathfrak{R}_2$, $F\mathfrak{X}_k$, $F\mathfrak{X}_k^i$ кольца счетного ранга, свободные в многообразиях $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_k^i$ соответственно, а через $\{e, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ множество свободных образующих кольца $F\mathfrak{R}_2$. Для удобства свободные образующие колец $F\mathfrak{X}_k$ и $F\mathfrak{X}_k^i$ будем обозначать теми же буквами.

Далее нам потребуются три леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $w_1(e) \dots w_n(e)$ – слово из свободного группоида Γ , $w_i(x) \in W$. Тогда слово $w_1(e) \dots w_n(e)$ содержит подслово $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ для $y_i = e^{p_i}$ и $l > 16$, если и только если i такое, что $w_i(e) = t(y_1, \dots, y_{k+l})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если существует i такое, что $w_i(e) = t(y_1, \dots, y_{k+l})$, то $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ – подслово слова $w_1(e) \dots w_n(e)$. Докажем индукцией по n , что $w_i(e) = t(y_1, \dots, y_{k+l})$ для некоторого i . Пусть $n = 1$. Тогда $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ – подслово слова $w_1(e)$. Очевидно, что $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ в силу своего строения не может быть собственным подсловом слова $w_1(e)$. Следовательно, $w_1(e) = t(y_1, \dots, y_{k+l})$. Предположим, что утверждение справедливо для некоторого n . Покажем, что оно верно и для $n + 1$. В самом деле, пусть $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ – подслово слова $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$. Заметим, что по определению всякое собственное подслово слова $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$ есть либо подслово слова $w_1(e) \dots w_n(e)$, либо подслово слова $w_{n+1}(e)$. Поэтому по предположению индукции получаем, что $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ является собственным подсловом слова $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$ тогда и только тогда, когда существует i такое, что $t(y_1, \dots, y_{k+l}) = w_i(e)$. Пусть теперь $t(y_1, \dots, y_{k+l}) = w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$. Заметим, что $t(y_1, \dots, y_{k+l}) = ((y_{k+l-1} t^*(y_1, \dots, y_{k+l-2})) y_{k+l})$. Следовательно, слово $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$ представимо в виде $(z_1 z_2) z_3$, где z_i – некоторое слово от e . Легко убедиться, что $(z_1 z_2) z_3 = w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$ тогда и только тогда, когда

$$z_1 = w_1(e) \dots w_{n-1}(e), \quad z_2 = w_n(e), \quad z_3 = w_{n+1}(e)$$

соответственно. Поэтому $t^*(y_1, \dots, y_{k+l-2}) = w_n(e)$.

Так как $l > 16$, слово $t^*(y_1, \dots, y_{k+l-2})$ представимо в виде

$$(((t^{**}(y_1, \dots, y_{k+l-5}) y_{k+l-4}) y_{k+l-3}) y_{k+l-2}).$$

Следовательно, слово $w_n(e)$ должно быть представимо в виде $((u_1 u_2) u_3) u_4$. Но, как нетрудно убедиться, слово $w_n(e)$ в таком виде представить нельзя. Полученное противоречие доказывает, что $t(y_1, \dots, y_{k+l})$ – подслово слова $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$ тогда и только тогда, когда $t(y_1, \dots, y_{k+l}) = w_i(e)$ для некоторого i .

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если существует конечное вычисление на машине M , переводящее конфигурацию $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$, то в многообразии $\mathfrak{X}_k$ выполняется тождество

$$Q_i(x) A^{\xi_1}(x) B^{\xi_2}(x) C(x) D(x) = Q_j(x) A^{\eta_1}(x) B^{\eta_2}(x) C(x) D(x). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть машина M через d шагов переходит из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$. Индукцией по числу d докажем, что в многообразии $\mathfrak{X}_k$ выполняется тождество (1). Пусть $d = 0$. Тогда $i = j$, $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$. Следовательно, тождество (1) тривиальное. База индукции проверена.

Допустим, что утверждение справедливо для некоторого d . Покажем, что оно верно и для $d + 1$. Пусть через d тактов работы машина M перевела конфигурацию $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$ и на $(d + 1)$ -м шаге выполняется команда

$$q_j \delta_1 \delta_2 \rightarrow q_l \alpha \beta.$$

В зависимости от значений δ_1 и δ_2 возможны четыре случая. Рассмотрим лишь случай, когда $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = 0$, так как остальные три рассматриваются аналогично. Поскольку

на $(d+1)$ -м шаге выполняется команда $q_j 10 \rightarrow q_l \alpha \beta$, то $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \neq 0$ и в многообразии $\mathfrak{X}_k$ выполняется тождество

$$Q_j(x)B(x)C(x) = Q_l(x)A^\alpha(x)B^{1+\beta}(x)C(x). \quad (2)$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} Q_i(x)A^{\xi_1}(x)B^{\xi_2}(x)C(x)D(x) &= Q_j(x)A^{\eta_1}(x)B^{\eta_2}(x)C(x)D(x) \\ &= Q_j(x)A^{\eta_1}(x)B(x)C(x)B^{\eta_2-1}(x)D(x) = Q_j(x)B(x)C(x)B^{\eta_2-1}(x)D(x) \\ &= Q_l(x)A^\alpha(x)B^{1+\beta}(x)C(x)B^{\eta_2-1}(x)D(x) = Q_l(x)A^\alpha(x)B^{\eta_2+\beta}(x)C(x)D(x) \\ &= Q_l(x)A^{\eta_1+\alpha}(x)B^{\eta_2+\beta}(x)C(x)D(x). \end{aligned}$$

При этом первое равенство справедливо по предположению индукции, второе и пятое выполняются в силу тождества $yB(x)C(x) = yC(x)B(x)$, третье и шестое имеют место, так как $\eta_1 = 0$, а четвертое – в силу тождества (2).

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть в многообразии $\mathfrak{X}_k$ выполняется тождество (1). Тогда существует конечное вычисление на M , переводящее конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$ в конфигурацию $q_i \xi_1 \xi_2$, или наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что если $w_1(e) \dots w_n(e)$ – элемент свободно-го группоида Γ , где $w_i(x) \in W$, то слово $w_1(e) \dots w_n(e)$ не содержит подслов вида

$$Y(x_1, \dots, x_r) = x_r((\dots((x_1 x_2) x_3) \dots) x_{r-1})$$

при $r = m + k + 102$. Доказательство этого факта проведем индукцией по n . В самом деле, пусть $n = 1$. Тогда необходимо показать, что $Y(x_1, \dots, x_r)$ не является подсловом слова $w_1(e)$. По построению слова $w_1(e)$ его длина не превосходит $k + m + 20$. Так как длина слова $Y(x_1, \dots, x_r)$ не меньше r , а $r = k + m + 102$, слово $Y(x_1, \dots, x_r)$, очевидно, не является подсловом слова $w_1(e)$. База индукции проверена.

Допустим, что обсуждаемое утверждение справедливо для некоторого n . Покажем, что оно верно и для $n + 1$. Очевидно, что всякое собственное подслово слова $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$ является подсловом слова $w_1(e) \dots w_n(e)$ или подсловом слова $w_{n+1}(e)$. Следовательно, по предположению индукции $Y(x_1, \dots, x_r)$ не является собственным подсловом слова $w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$. Допустим, что $Y(x_1, \dots, x_r) = w_1(e) \dots w_{n+1}(e)$. Тогда, как нетрудно убедиться, должны выполняться следующие равенства:

$$x_r = w_1(e) \dots w_n(e), \quad (\dots((x_1 x_2) x_3) \dots) x_{r-1} = w_{n+1}(e).$$

Длина слова $(\dots((x_1 x_2) x_3) \dots) x_{r-1}$ не меньше, чем $m + k + 102$, а длина слова $w_{n+1}(e)$ не превосходит $m + k + 20$. Следовательно, равенство

$$(\dots((x_1 x_2) x_3) \dots) x_{r-1} = w_{n+1}(e)$$

неверно. Полученное противоречие доказывает, что слово $Y(x_1, \dots, x_r)$ не является подсловом слова $w_1(e) \dots w_n(e)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_k &|= Q_i(x)A^{\xi_1}(x)B^{\xi_2}(x)C(x)D(x) = Q_j(x)A^{\eta_1}(x)B^{\eta_2}(x)C(x)D(x) \\ \iff F\mathfrak{X}_k &|= Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e) = Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e).\end{aligned}$$

Обозначим через S множество многочленов $f(e)$ таких, что $f(e) = 0$ – соотношение в кольце $F\mathfrak{X}_k$, полученное подстановкой конкретных элементов кольца $F\mathfrak{X}_k$ вместо переменных в одно из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}_k^1 \cap \mathfrak{X}_k^2$. Пусть I – идеал в кольце $F\mathfrak{X}_2$, порожденный множеством S . Очевидно, что

$$\begin{aligned}F\mathfrak{X}_k &|= Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e) = Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e) \\ \iff Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e) + Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e) &\in I.\end{aligned}$$

Вхождение данного многочлена в идеал I равносильно тому, что в кольце $F\mathfrak{X}_2$ выполняется равенство вида

$$Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e) + Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}, \quad (3)$$

где $h_j \in S$, $u_{i1}h_ju_{i2}$ – некоторое произведение многочленов, одним из сомножителей в котором является многочлен h_j . Покажем, что сумма $\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}$ представима в виде $f_1 + f_2$, где $f_1 = \sum_{i,j} v_{i1}h_jv_{i2}$, и, кроме того, каждый одночлен многочлена f_1 представим в виде $w_1(e) \dots w_n(e)$, где $w_i(x) \in W$, а f_2 – многочлен, ни один одночлен которого нельзя представить в виде $w_1(e) \dots w_n(e)$. Доказательство проведем индукцией по числу одночленов в сумме $\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}$. Допустим, что число одночленов в сумме равно 0. Тогда утверждение очевидно. Пусть утверждение справедливо для некоторого числа d одночленов. Покажем, что оно верно и для $d + 1$. Пусть $\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i1}$ – сумма, число одночленов в которой не превосходит $d + 1$. Тогда число одночленов в сумме $\sum_{i>1,j} u_{i1}h_ju_{i2}$ не превосходит d , и в кольце $F\mathfrak{X}_2$ выполняется равенство

$$u_{11}h_1u_{12} + \sum_{i>1,j} u_{i1}h_ju_{i2} = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}.$$

Отсюда по предположению индукции получаем, что

$$\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} = f_1 + f_2 + u_{11}h_1u_{12}.$$

Поэтому достаточно показать, что многочлен $u_{11}h_1u_{12}$ представим в требуемом виде. Следует рассмотреть два случая в зависимости от того, соответствует ли многочлен h_1 тождеству многообразия $\mathfrak{X}_k^1$ или тождеству многообразия $\mathfrak{X}_k^2$. Допустим, что h_1 соответствует тождеству $\mathfrak{X}_k^2$. Тогда он имеет вид $yw_1(x)w_2(x) + yw_2(x)w_1(x)$.

В силу дистрибутивности можно считать, что y , а также все многочлены, входящие в $u_{11}h_1u_{12}$, кроме h_1 , являются одночленами. Допустим, что x – многочлен, который не содержит одночлен e . Тогда получим, что $w_1(x)$ – многочлен, состоящий из одночленов вида $t(y_1, \dots, y_{k+l})$, причем ни один из них не принадлежит W . Отсюда в силу леммы 1

получаем, что $f_1 + (f_2 + u_{11}h_1u_{12})$ – требуемое представление суммы $\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}$. Пусть теперь $x = e + x^*$, где x^* – многочлен, который не содержит одночлен e . Тогда

$$\begin{aligned} u_{11}h_1u_{12} &= u_{11}(yw_1(e + x^*)w_2(e + x^*) + yw_2(e + x^*)w_1(e + x^*))u_{12} \\ &= u_{11}(yw_1(e)w_2(e) + yw_2(e)w_1(e) + f)u_{12}, \end{aligned}$$

где f – многочлен, ни один одночлен которого в силу леммы 1 нельзя представить в виде $w_1(e) \dots w_n(e)$. Как упомянуто выше, y можно считать одночленом. Если y нельзя представить в виде $w_1(e) \dots w_n(e)$, то очевидно, что $f_1 + (f_2 + u_{11}h_1u_{12})$ – требуемое представление. Пусть $e = w_{i_1}(e) \dots w_{i_k}(e)$. Тогда

$$u_{11}h_1u_{12} = u_{11}(w_{i_1}(e) \dots w_{i_k}(e)w_1(e)w_2(e) + w_{i_1}(e) \dots w_{i_k}(e)w_2(e)w_1(e))u_{12}.$$

Очевидно, что слово $u_{11}(w_{i_1}(e) \dots w_{i_k}(e)w_1(e)w_2(e))u_{12}$ представимо в виде $w_{j_1}(e) \dots w_{j_p}(e)$ тогда и только тогда, когда в таком же виде представимо слово

$$u_{11}(w_{i_1}(e) \dots w_{i_k}(e)w_2(e)w_1(e))u_{12}.$$

Следовательно, искомым представлением будет либо $f_1 + (f_2 + u_{11}h_1u_{12})$, либо

$$(f_1 + u_{11}(yw_1(e)w_2(e) + yw_2(e)w_1(e))u_{12}) + (f_2 + u_{11}fu_{12}).$$

Случай многообразия $\mathfrak{X}_k^1$ рассматривается аналогично. Так как

$$Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e) + Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e) \quad (4)$$

– многочлен, состоящий из одночленов вида $w_1(e) \dots w_n(e)$, ввиду свободы кольца $F\mathfrak{R}_2$ получаем, что в кольце $F\mathfrak{R}_2$ равенство (3) выполняется тогда и только тогда, когда в этом кольце справедливо равенство

$$Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e) + Q_j(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e) = f_1.$$

Индукцией по числу d одночленов в многочлене f_1 покажем, что существует конечное вычисление на машине M , переводящее конфигурацию $q_i\xi_1\xi_2$ в $q_j\eta_1\eta_2$, либо наоборот. Пусть g – многочлен, полученный из многочлена (4) конечным числом перестановок вида

$$\begin{aligned} yA(e)B(e) &= yB(e)A(e), & yA(e)D(e) &= yD(e)A(e), \\ yB(e)C(e) &= yC(e)B(e), & yC(e)D(e) &= yD(e)C(e). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть в кольце $F\mathfrak{R}_2$ выполняется равенство $g = f_1$ и число одночленов в многочлене f_1 равно 0. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого числа d одночленов. Покажем, что оно верно и для $d + 1$. В самом деле, пусть в кольце $F\mathfrak{R}_2$ выполняется равенство $g = f_1$ и число одночленов в многочлене f_1 не превосходит $d + 1$. Так как $g = f_1$ – равенство в кольце $F\mathfrak{R}_2$, существует многочлен $v_{i1}h_jv_{i2}$ из суммы $f_1 = \sum_{i,j} v_{i1}h_jv_{i2}$ такой, что g_1 – одночлен многочлена $v_{i1}h_jv_{i2}$, полученный из

$$Q_i(e)A^{\xi_1}(e)B^{\xi_2}(e)C(e)D(e)$$

перестановками вида (5). Допустим, что g_1 – одночлен многочлена $v_{11}h_1v_{12}$. Пусть многочлен h_1 соответствует тождеству многообразия $\mathfrak{X}_k^2$. Тогда

$$\begin{aligned} v_{11}h_1v_{12} &= w_{i_1}(e) \dots w_{i_r}(e)w_1(e)w_2(e)w_{j_1}(e) \dots w_{j_p}(e) \\ &\quad + w_{i_1}(e) \dots w_{i_r}(e)w_2(e)w_1(e)w_{j_1}(e) \dots w_{j_p}(e), \end{aligned}$$

причем

$$\{w_1(e), w_2(e)\} \in \{\{A(e), B(e)\}, \{A(e), D(e)\}, \{B(e), C(e)\}, \{C(e), D(e)\}\}.$$

Следовательно, $v_{11}h_1v_{12} = H_1 + H_2$, где $H_1 = g_1$, H_2 – одночлен, полученный из H_1 при помощи перестановок вида (5). Поэтому в кольце $F\mathfrak{R}_2$ выполняется равенство

$$g + H_1 + H_2 = \sum_{i>1, j} v_{i1}h_jv_{i2}, \quad (6)$$

где многочлен $g + H_1 + H_2$ удовлетворяет тем же условиям, что и g , а сумма в правой части (6) имеет меньшее число одночленов, чем f_1 . Отсюда по предположению индукции получаем, что требуемое вычисление на машине М существует. Пусть теперь многочлен h_1 соответствует тождеству многообразия $\mathfrak{X}_k^1$. Тогда

$$v_{11}h_1v_{12} = w_{i_1}(e) \dots w_{i_{p_1}}(e)w_{l_1}(e) \dots w_{l_{p_2}}(e) + w_{j_1}(e) \dots w_{j_{p_3}}(e)w_{l_1}(e) \dots w_{l_{p_2}}(e),$$

где

$$\begin{aligned} \{w_{i_1}(e) \dots w_{i_{p_1}}(e), w_{j_1}(e) \dots w_{j_{p_3}}(e)\} &\in \{\{Q_i(e)C(e)D(e), Q_j(e)A^{\varepsilon_1}(e)B^{\varepsilon_2}(e)C(e)D(e)\}, \\ &\quad \{Q_i(e)A(e)D(e), Q_j(e)A^{1+\varepsilon_1}(e)B^{\varepsilon_2}(e)D(e)\}, \\ &\quad \{Q_i(e)B(e)C(e), Q_j(e)A^{\varepsilon_1}(e)B^{1+\varepsilon_2}(e)C(e)\}, \\ &\quad \{Q_i(e)A(e)B(e), Q_j(e)A^{1+\varepsilon_1}(e)B^{1+\varepsilon_2}(e)\}\}. \end{aligned}$$

Допустим, что

$$\{w_{i_1}(e) \dots w_{i_{p_1}}(e), w_{j_1}(e) \dots w_{j_{p_3}}(e)\} = \{Q_i(e)A(e)D(e), Q_j(e)A^{1+\varepsilon_1}(e)B^{\varepsilon_2}(e)D(e)\}. \quad (7)$$

Остальные три случая рассматриваются аналогично. Так как имеет место (7), то

$$\begin{aligned} H_1 &= Q_i(e)A(e)D(e)w_{l_1}(e) \dots w_{l_{p_2}}(e), \\ H_2 &= Q_j(e)A^{1+\varepsilon_1}(e)B^{\varepsilon_2}(e)D(e)w_{l_1}(e) \dots w_{l_{p_2}}(e). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 = 0$ и (6), где $g + H_1 + H_2$ – многочлен, полученный из многочлена

$$Q_j(e)A^{\xi_1+\varepsilon_1}(e)B^{\xi_2+\varepsilon_2}(e)C(e)D(e) + Q_l(e)A^{\eta_1}(e)B^{\eta_2}(e)C(e)D(e)$$

при помощи перестановок вида (5), и, кроме того, существует команда, при помощи которой машина М переводит конфигурацию $q_i\xi_1\xi_2$ в $q_j(\xi_1 + \varepsilon_1)(\xi_2 + \varepsilon_2)$, или наоборот.

Так как число одночленов в сумме $\sum_{i>1, j} v_{i1} h_j v_{i2}$ меньше, чем в исходной, то по предположению индукции получаем, что существует конечное вычисление на машине M , переводящее конфигурацию $q_i \xi_1 \xi_2$ в $q_l \eta_1 \eta_2$, или наоборот.

Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы. Зафиксируем некоторое число $k > 40 + m$. Пусть $r(x) = x + m + 100$ и

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{X}_{k_0}, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{X}_{r(k_0)}, \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{X}_{r(r(k_0))}, \quad \dots$$

Введем многообразия

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \text{var}(z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_{r(k_0)}) = 0), \\ \mathfrak{B}_2 &= \text{var}(z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_{r(r(k_0))}) = 0), \\ \mathfrak{B}_3 &= \text{var}(z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_{r(r(r(k_0)))}) = 0), \\ &\dots \end{aligned}$$

Заметим, что многообразие $\mathfrak{X}_\alpha$ по определению удовлетворяет тождеству

$$z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_{r(\alpha)}) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{X}_\alpha \subset \text{var}(z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_{r(\alpha)}) = 0) = \mathfrak{B}_i.$$

Так как $s(x_1, \dots, x_\alpha)$ содержит подслово вида $Y(x_1, \dots, x_\alpha)$, то $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{A}_{i+1}$. Следовательно, многообразия $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ образуют цепочку:

$$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots$$

Поэтому достаточно доказать, что эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима.

Очевидно, что тождество $H(\vec{x}) = 0$ выполняется в многообразии

$$\text{var}(z((\dots((yx_1)x_2)\dots)x_\alpha) = 0)$$

тогда и только тогда, когда каждый одночлен многочлена $H(\vec{x})$ содержит подслово вида $Y(x_1, \dots, x_{\alpha+2})$. В кольце $F\mathfrak{A}$, свободном в многообразии всех колец, проблема равенства разрешима [7]. Следовательно, существует алгоритм, определяющий по произвольному слову, содержит ли оно подслово $Y(x_1, \dots, x_{\alpha+2})$. Отсюда вытекает, что эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима. Из лемм 2 и 3 вытекает, что в многообразии $\mathfrak{A}_i$ тождество

$$Q_1(x)A^{2^n}(x)C(x)D(x) = Q_0(x)A(x)C(x)D(x)$$

выполняется тогда и только тогда, когда машина M , начав работать в конфигурации $q_1 2^n 0$, через конечное число шагов переходит в конфигурацию $q_0 10$. По определению машины M это равносильно соотношению $n \in P$. Отсюда в силу нерекурсивности множества P следует, что эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Воспользуемся строением схемно-альтернативной иерархии языков SA , введенной и изученной в работе [6]. Поскольку $\forall \mathfrak{A}_i$ содержит лишь теорию $0\mathfrak{A}_i$, которая пуста ввиду отсутствия в сигнатуре констант и, следовательно, разрешима, то $\forall \mathfrak{A}_i$ – критическая теория многообразия $\mathfrak{A}_i$. Для того чтобы показать, что $\forall \mathfrak{A}_i$ – единственная критическая теория, ввиду строения иерархии теорий SA $\mathfrak{A}_i$ достаточно установить, что теория $\exists \neg \vee \wedge \mathfrak{A}_i$ разрешима. Пусть φ – произвольное предложение языка $\exists \neg \vee \wedge$. Тогда φ равносильно предложению вида $\bigvee_{j=1}^k \varphi_j$, где φ_j является $\exists \neg \vee \wedge$ -предложением. Допустим, что для любого j предложение φ_j содержит отрицание. Стало быть, для любого j предложение φ_j ложно на одноэлементном кольце. Следовательно, $\bigvee_{j=1}^k \varphi_j$, а значит и φ , ложно на $\mathfrak{A}_i$. Допустим, что существует j_0 такое, что φ_{j_0} – предложение языка $\exists \wedge$. Тогда φ_i истинно в произвольном кольце на нулевом наборе. Поэтому $\mathfrak{A}_i \models \bigvee_{j=1}^k \varphi_j$, а значит, $\mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Следствие доказано.

Автор благодарит Ю.М. Важенина за руководство работой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мальцев А. И. Тожественные соотношения на многообразиях квазигрупп // Матем. сб. 1966. Т. 69. № 1. С. 3–12.
- [2] Коуровская тетрадь. 10-е изд. Новосибирск, 1986.
- [3] Мурский В. Л. Несколько примеров многообразий полугрупп // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 6. С. 663–670.
- [4] Клейман Ю. Г. О тождествах в группах // Тр. ММО. 1982. Т. 44. С. 62–108.
- [5] Попов В. Ю. Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 3. С. 347–361.
- [6] Важенин Ю. М. Алгоритмические проблемы и иерархии языков первого порядка // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 4. С. 419–434.
- [7] Жуков А. И. Приведенные системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах // Матем. сб. 1950. Т. 27. № 2. С. 267–280.

Уральский государственный университет, г. Екатеринбург

Поступило

03.08.95

Исправленный вариант

16.12.97