Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Д. Салманов, О гладкости обобщенного решения краевой задачи для некоторых вырождающихся нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 882–890

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:27:13

УДК 517.927.4

О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Д. Салманов

В работе изучается вариационным методом краевая задача первого рода для некоторого класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2r$ с сильным вырождением на концах интервала (a, b) . Получено неравенство, в котором норма решения U рассматриваемой задачи в смысле $W_{p,\alpha}^r(a, b)$ оценивается сверху нормами заданных функций $\Phi(x)$ и $F(x)$.

Библиография: 4 названия.

Изучим дифференциальные свойства обобщенного решения вплоть до границы в зависимости от дифференциальных свойств коэффициентов уравнения (теорема 3). Установим неравенства типа неравенства коэрцитивности решения (см. формулы (42), (43)). Пусть $W_{p,\alpha}^r = W_{p,\alpha}^r(a, b)$ ($\Delta = (a, b)$) – пространство функций $f(x)$, для которых имеет смысл конечная норма (см. [1, гл. 10]):

$$\|f\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)} = \|f\|_{p,\Delta} + \left\| \frac{f^{(r)}}{\rho^\alpha} \right\|_{p,\Delta} < +\infty,$$

где $r \geq 1$ – натуральное число, α, p ($1 < p < +\infty$) – действительные числа,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{p,\Delta} &= \|\cdot\|_{L_p(\Delta)}, \quad f^{(k)} = f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}, \quad k \leq r, \\ \rho &= \rho(x) = \min\{x - a, b - x\} \quad \forall x \in \Delta = (a, b). \end{aligned}$$

Пусть

$$0 < r + \alpha - \frac{1}{p} < r \tag{1}$$

и s_0 – натуральное число такое, что

$$s_0 - 1 < r + \alpha - \frac{1}{p} \leq s_0, \quad \frac{r}{2} \leq s_0 \leq r. \tag{2}$$

При условиях (1), (2) определим подпространство (см. [1, гл. 10])

$$W_0 = \mathring{W}_{p,\alpha}^r = \{f \in W_{p,\alpha}^r(a, b) : f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s_0 - 1\}.$$

Зададим функцию $\Phi(x) \in W_{p,\alpha}^r(a,b)$ и обозначим через W_Φ множество $f(x) \in W_{p,\alpha}^r(a,b)$ таких, что $f(x) - \Phi(x) \in W_0$. При условиях (1), (2) справедливы неравенства (см. [2]–[4])

$$\left\| \frac{f^{(k)}}{\rho^{\alpha+r-k}} \right\|_{p,\Delta} \leq c_0 \left\| \frac{f^{(r)}}{\rho^\alpha} \right\|_{p,\Delta} \quad \forall f \in W_0, \quad k \leq r,$$

$$\left\| \frac{f^{(k)}}{\rho^{\alpha+r-\beta_k}} \right\|_{p,\Delta} \leq c_1 \|f\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)} \quad \forall f \in W_{p,\alpha}^r(\Delta), \quad k \leq r, \quad (3)$$

$$\beta_k = \begin{cases} k, & k \geq s_0, \\ s_0, & k \leq s_0, \end{cases} \quad k \leq r. \quad (4)$$

Пусть каждому неотрицательному целому числу k ($k \leq r$) поставлена в соответствие измеримая на (a,b) функция $a_k(x)$ такая, что

$$\frac{c_2}{\rho^{p_k(r+\alpha-\beta_k)}(x)} \leq a_k(x) \leq \frac{c_3}{\rho^{p_k(r+\alpha-\beta_k)}(x)}, \quad 2 \leq p_k \leq p, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad p_r = p, \quad (5)$$

где c_2 и c_3 – положительные постоянные, не зависящие от $x \in \Delta = (a,b)$. Введем в рассмотрение интеграл

$$E(f) = \int_a^b \sum_{k \leq r} \frac{1}{p_k} a_k(x) |f^{(k)}(x)|^{p_k} dx,$$

который, очевидно, конечен для $f \in W_{p,\alpha}^r(a,b)$ при условиях (1), (2), (5). Положим $H(f) = E(f) - (F, f)$, где (F, f) – скалярное произведение функций $F(x)$ и $f(x)$ на Δ и функция $F(x)$ такая, что

$$\|\rho^{\alpha+r-s_0} F\|_{q,\Delta} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (6)$$

При условиях (1), (2), (5), (6) функционал $H(f)$ ограничен в классе W_Φ снизу. Положим

$$\inf_{f \in W_\Phi} H(f) = \lambda.$$

ТЕОРЕМА 1. При условиях (1), (2), (5), (6) существует и притом единственная функция $U(x) \in W_\Phi$ такая, что

$$\min_{f \in W_\Phi} H(f) = H(U) = \lambda, \quad (7)$$

удовлетворяющая равенству

$$\int_a^b \left(\sum_{k \leq r} a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x) v^{(k)}(x) - F(x) v(x) \right) dx = 0 \quad \forall f \in W_0. \quad (8)$$

Функцию $U \in W_\Phi$, удовлетворяющую (8) при любой $v \in W_0$, будем называть *обобщенным решением краевой задачи*

$$LU = F(x), \quad x \in (a,b), \quad U \in W_\Phi,$$

где

$$LU = \sum_{k \leq r} (-1)^k (a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x))^{(k)}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для решения $U \in W_\Phi$ вариационной задачи (7) имеет место неравенство

$$\|U\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)}^p \leq c_4 (\|\Phi\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)}^{\gamma_0} + \|\rho^{\alpha+r-s_0} F\|_{q,\Delta}^q), \quad (9)$$

где

$$\gamma_0 = \begin{cases} p, & \|\Phi\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)} \geq 1, \\ \min_k p_k, & \|\Phi\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)} \leq 1, \end{cases}$$

c_4 – постоянная, не зависящая от Φ и F .

Неравенство (9) устанавливается на основании тождества (8).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия (1), (2), (6), функции $a_k(x)$, где $k \leq r/2$, $k = r$, имеют на интервале (a, b) непрерывные производные до порядка k включительно такие, что

$$|a_k^{(s)}(x)| \leq \frac{c_5}{\rho^{p_k(r+\alpha-\beta_k)+s}(x)}, \quad x \in (a, b), \quad s \leq k, \quad 2 \leq p_k \leq p, \quad k \leq \frac{r}{2}, \quad p_r = p, \quad (10)$$

а функция $U \in W_\Phi$ удовлетворяет равенству ($a(x) \equiv a_r(x)$)

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(a(x) |U^{(r)}(x)|^{p-2} U^{(r)}(x) v^{(r)}(x) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k \leq r/2} a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x) v^{(k)}(x) - F(x) v(x) \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

для всех $v \in W_0$. Тогда для функции $\psi(x) \equiv a(x) |U^{(r)}(x)|^{p-2} U^{(r)}(x)$ имеют место следующие неравенства:

$$\|\rho^\alpha \psi\|_{q,\Delta} \leq c_6 \|U\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)}^{p-1}, \quad (12)$$

$$\|\rho^{\alpha+r+(l_0-q)/(ql_0)} \psi^{(r)}\|_{q,\Delta} \leq c_7 (\|U\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)}^{\lambda_0} + \|\rho^{\alpha+r-s_0} F\|_{q,\Delta}), \quad (13)$$

где

$$\lambda_0 = \begin{cases} p-1, & \|U\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)} \geq 1, \\ \min_k p_k - 1, & \|U\|_{W_{p,\alpha}^r(\Delta)} \leq 1, \end{cases} \quad l_0 = \max_k q_k, \quad \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1,$$

c_6, c_7 – постоянные, не зависящие от U и от F, U соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma, \sigma', \sigma'' \in (a, b)$ – интервалы с центрами в $x_0 \in (a, b)$, радиусы которых соответственно равны $4^{-1}\rho(x_0)$, $2^{-1}\rho(x_0)$, $\rho(x_0)$, где $\rho(x_0) = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Для любой функции $v(x) \in W_0$, финитной в σ' , будем писать $v(x) \in W_0(\sigma')$. На основании (11) имеем ($h \neq 0$)

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma'} \left(\frac{\Delta^s}{h^s} (a(x) |U^{(r)}(x)|^{p-2} U^{(r)}(x)) v^{(r)}(x) \right. \\ & \quad + \sum_{k \leq r/2} \frac{\Delta^s}{h^s} (a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x)) v^{(k)}(x) \\ & \quad \left. - \frac{\Delta^s F(x)}{h^s} v(x) \right) dx = 0 \quad \forall v \in W_0(\sigma'), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta^s f(x) = \Delta_h^s f(x)$ есть s -кратная разность от функции $f(x)$ в точке x с шагом h .

Введем в рассмотрение функцию $\eta(x) \in C^{(r+1)}(\mathbb{R})$, финитную в σ' , с носителем $\Lambda_\eta \subset \sigma'$, обладающую свойствами:

- 1) $\eta(x) = 1$ на σ ;
- 2) $0 \leq \eta(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$;
- 3) $|\eta^{(k)}(x)|^2 \leq c\eta(x), k \leq r+1$.

Положим (для достаточно малого $h \neq 0$)

$$A_s(x) = \frac{1}{\Gamma(r-1)} \int_{x_0}^x (x-t)^{r-1} \eta(t) \left| \frac{\Delta^s \psi(t)}{h^s} \right|^{q-1} \operatorname{sign} \frac{\Delta^s \psi(t)}{h^s} dt, \quad x \in \sigma'. \quad (15)$$

Имеем

$$\|A_s\|_{p, \sigma'} \ll |h|^{-s(q-1)} \|\Delta^s \psi\|_{q, \Lambda_\eta}^{q/p}. \quad (16)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|\Delta^s \psi\|_{q, \Lambda_\eta} &\ll \sum_{j=0}^s \|\psi(x+hj)\|_{q, \Lambda_\eta} \ll \rho^{-\alpha}(x_0) \sum_{j=0}^s \left(\int_{\Lambda_\eta} \left| \frac{U^{(r)}(x+hj)}{\rho^\alpha(x+hj)} \right|^p dx \right)^{1/q} \\ &\ll \rho^{-\alpha}(x_0) \|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}^{p/q}. \end{aligned} \quad (17)$$

Второе неравенство в (17) следует из неравенства (10) при $k=r, s=0$ ($\beta_r=r$) и того, что $\rho(x) \sim \rho(x_0)$ для любого $x \in \sigma'$ (см. [2, с. 101]), последнее очевидно.

Из (16), (17) имеем

$$\|A_s\|_{p, \sigma'} \ll |h|^{-s(q-1)} \rho^{-\alpha q/p}(x_0) \|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}.$$

Аналогично ($k \leq r$),

$$\|A_s^{(k)}\|_{p, \sigma'} \ll |h|^{-s(q-1)} \rho^{-\alpha q/p}(x_0) \|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}.$$

Следовательно, функция $A_s(x)$ при фиксированном h ($h \neq 0$) принадлежит классу $W_0(\sigma')$, поэтому в равенстве (14) можно положить $v(x) = \eta(x)A_s(x)$. Тогда получим

$$X(\sigma', s) \equiv \int_{\sigma'} \eta^2(x) \left| \frac{\Delta^s \psi}{h^s} \right|^q dx = J_1(\sigma', s) + J_2(\sigma', s) + J_3(\sigma', s), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(\sigma', s) &= - \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \int_{\sigma'} \frac{\Delta^s \psi(x)}{h^s} A_s^{(j)}(x) \eta^{(r-j)}(x) dx, \\ J_2(\sigma', s) &= - \sum_{k \leq r/2} \int_{\sigma'} \frac{\Delta^s}{h^s} (a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x)) (A_s(x) \eta(x))^{(k)} dx, \\ J_3(\sigma', s) &= \int_{\sigma'} \frac{\Delta^s F(x)}{h^s} A_s(x) \eta(x) dx. \end{aligned}$$

Легко установить неравенства ($j \leq r, \tau \leq r+1$)

$$\|A_s^{(j)}\eta^{(\tau)}\|_{p_k, \sigma'} \ll X^{1/p}(\sigma', s), \quad (19)$$

$$\|\psi\|_{q, \sigma'} \ll \rho^{-\alpha}(x_0)\|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}^{p/q}. \quad (20)$$

Теперь оценим интегралы $J_1(\sigma', 1)$, $J_2(\sigma', 1)$, $J_3(\sigma', 1)$ ($s = 1$). Для интегралов, составляющих $J_1(\sigma', 1)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma'} \frac{\Delta\psi(x)}{h} A_1^{(j)}(x) \eta^{(r-j)}(x) dx \right| &= \left| \int_{\sigma'} \psi(x) \frac{\Delta-h}{h} (A_1^{(j)}(x) \eta^{(r-j)}(x)) dx \right| \\ &\ll \|\psi\|_{q, \sigma'} \|(A_1^{(j)}\eta^{(r-j)})'\|_{p, \sigma'} \ll \rho^{-\alpha}(x_0)\|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}^{p-1} X^{1/p}(\sigma', 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Равенство в (21) написано в силу финитности функции $\eta(x)$, первое неравенство верно в силу неравенства Гёльдера и неравенства (5) из [2, с. 115] (в дальнейшем мы часто пользуемся этим неравенством, не упоминая об этом каждый раз), последнее следует из (19), (20). Для интегралов, составляющих $J_2(\sigma', 1)$, имеем ($k+1 \leq r/2+1 \leq r$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma'} \frac{\Delta}{h} (a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x)) (A_1\eta)^{(k)} dx \right| \\ \leq \|a_k |U^{(k)}|^{p_k-2}\|_{q_k, \sigma'} \|(A_1\eta)^{(k+1)}\|_{p_k, \sigma'} \ll \rho^{-r-\alpha+\beta_k}(x_0)\|U\|_{W_{p_k, \alpha}^r(\sigma')} X^{1/p}(\sigma', 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Для $J_3(\sigma', 1)$ имеем

$$\begin{aligned} |J_3(\sigma', 1)| &= \left| \int_{\sigma'} F \frac{\Delta-h}{h} (A_1\eta) dx \right| \leq \|F\|_{q, \sigma'} \|(A_1\eta)'\|_{p, \sigma'} \\ &\ll \rho^{-r-\alpha+s_0}(x_0) \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \sigma'} X^{1/p}(\sigma', 1). \end{aligned} \quad (23)$$

В силу (18) (при $s = 1$) и (21)–(23) получаем

$$X^{1/q}(\sigma', 1) \ll \rho^{-r-\alpha}(x_0) \left(\|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}^{p-1} + \sum_{k \leq r/2} \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^r(\sigma')}^{p_k-1} + \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \sigma'} \right) \equiv S(\sigma'). \quad (24)$$

Отсюда, так как $\eta(x) = 1$ на σ , имеем

$$\left\| \frac{\Delta\psi}{h} \right\|_{q, \sigma} \ll S(\sigma').$$

Заменим в последнем неравенстве σ на σ_1 :

$$\left\| \frac{\Delta\psi}{h} \right\|_{q, \sigma_1} \ll S(\sigma'). \quad (25)$$

Пусть $\sigma \subset (a, b)$ – произвольно фиксированная окрестность точки $x_0 \in (a, b)$ такая, что $\sigma \subset \sigma_1 \subset \sigma'$. Докажем, что

$$\left\| \frac{\Delta^r \psi}{h^r} \right\|_{q, \sigma} \ll S(\sigma'). \quad (26)$$

С этой целью введем в рассмотрение систему концентрических интервалов $\sigma_r, \sigma'_r, \dots, \sigma_1, \sigma'_1$ с центрами в точке $x_0 \in (a, b)$, для которых имеют место строгие вложения

$$\sigma \equiv \sigma_r \subset \sigma'_r \subset \dots \subset \sigma_1 \subset \sigma'_1 \equiv \sigma'. \quad (27)$$

Предположим, что установлены неравенства

$$\left\| \frac{\Delta^l \psi}{h^l} \right\|_{q, \sigma_l} \ll S(\sigma'), \quad l = 1, \dots, m, \quad (28)$$

где m – натуральное число такое, что $1 \leq m < r$. Покажем, что при этих условиях верно и неравенство

$$\left\| \frac{\Delta^{m+1} \psi}{h^{m+1}} \right\|_{q, \sigma_{m+1}} \ll S(\sigma') \quad (29)$$

и, следовательно, неравенство (26). Неравенство (28) при $l = 1$ доказано (см. (25)).

Для каждого l ($l = 1, \dots, r$) введем в рассмотрение функцию $\eta_l(x) \in C^{(r+1)}(\mathbb{R})$, финитную в σ'_l , с носителем Λ_{η_l} , обладающую свойствами:

- 1) $\eta_l(x) = 1$ на σ_l ;
- 2) $0 \leq \eta_l(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$;
- 3) $|\eta^{(k)}(x)|^2 \leq c \eta_l(x), k \leq r + 1$, где c – постоянная, не зависящая от точки $x \in \mathbb{R}$.

В формуле (15) $\eta(x), \sigma, \sigma'$ заменим на $\eta_l(x), \sigma_l, \sigma'_l$ соответственно.

Теперь в равенстве (18) положим $s = l = m + 1$ и оценим интегралы $J_i(\sigma'_l, l), i = 1, 2, 3$. В силу (19) и (27), (28) для интегралов, составляющих $J_1(\sigma'_l, l)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma'_l} \frac{\Delta^l \psi}{h^l} A_l^{(j)} \eta^{(r-j)} dx \right| &= \left| \int_{\sigma'_l} \frac{\Delta^{l-1} \psi}{h^{l-1}} \frac{\Delta_{-h}}{h} (A_l^{(j)} \eta^{(r-j)}) dx \right| \\ &\leq \left\| \frac{\Delta^{l-1} \psi}{h^{l-1}} \right\|_{q, \Lambda_{\eta_l}} \| (A_l^{(j)} \eta_l^{(r-j)})' \|_{p, \sigma'} \\ &\ll \left\| \frac{\Delta^{l-1} \psi}{h^{l-1}} \right\|_{q, \sigma_{l-1}} X^{1/p}(\sigma'_l, l) \ll S(\sigma') X^{1/p}(\sigma'_l, l). \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим интегралы, составляющие $J_2(\sigma'_l, l)$. Рассмотрим сначала случай $l \leq k$:

$$\begin{aligned} E &\equiv \left| \int_{\sigma'_l} \frac{\Delta^l}{h^l} (a_k(x) |U^{(k)}(x)|^{p_k-2} U^{(k)}(x)) (A_l \eta_l)^{(k)} dx \right| \\ &\ll \| a_k |U^{(k)}|^{p_k-1} \|_{q_k, \sigma'_l} \left\| \frac{\Delta_{-h}^l}{h^l} (A_l \eta_l)^{(k)} \right\|_{p_k, \sigma'_l} \\ &\ll \rho^{-r-\alpha+\beta_k}(x_0) \left\| \frac{U^{(k)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_k}} \right\|_{p_k, \sigma'_l}^{p_k-1} \| (A_l \eta_l)^{(k+l)} \|_{p_k, \sigma'_l} \\ &\ll \rho^{-r-\alpha+\beta_k}(x_0) \| U \|_{W_{p_k, \alpha}^{r-1}(\sigma'_l)}^{p_k-1} X^{1/p}(\sigma'_l, l). \end{aligned} \quad (31)$$

Равенство в цепи соотношений (31) верно в силу финитности функции $\eta_l(x)$, первое неравенство очевидно, второе написано на основании неравенства (10) и того факта, что

$\rho(x) \sim \rho(x_0)$ для любого $x \in \sigma'_l [2, \text{с. 101}]$, последнее следует из (3) и (19). Пусть $k < l \leq r$. Тогда

$$\begin{aligned} E &\ll \|(a_k |U^{(k)}|^{p_k-2} U^{(k)})^{(k)}\|_{q_k, \sigma'_l} \|(A_l \eta_l)^{(l)}\|_{p_k, \sigma'_l} \\ &\ll \sum_{n=0}^k \rho^{-p_k(r+\alpha-\beta_k)-k+n}(x_0) \|(|U^{(k)}|^{p_k-2} U^{(k)})^{(n)}\|_{q_k, \sigma'_l} X^{1/p}(\sigma'_l, l). \end{aligned} \quad (32)$$

Последнее неравенство в цепи (32) следует из неравенств (10), (19), а также неравенств (1) из [2, с. 101].

Теперь получим оценку для интеграла

$$\|E_n\| \equiv \|(|U^{(k)}|^{p_k-2} U^{(k)})^{(n)}\|_{q_k, \sigma'_l}.$$

С этой целью оценим $L_{q_k}(\sigma'_l)$ -норму каждого слагаемого из следующих равенств:

$$\begin{aligned} E_{2j} &= |U^{(k)}(x)|^{p_k-2(j+1)} \left(\sum_{s=0}^{2j-1} c_{ks} U^{(k+2j-s)}(x) (U^{(k+1)}(x))^s (U^{(k)}(x))^{2j-s} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{j-1} d_{ks} U^{(k+2(j-s))}(x) (U^{(k+2)}(x))^s (U^{(k)}(x))^{2j-s} \right), \quad 2 \leq 2j \leq k, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} E_{2j-1} &= |U^{(k)}(x)|^{p_k-2j} \left(\sum_{s=0}^{2(j-1)} c'_{ks} U^{(k+2j-1-s)}(x) (U^{(k+1)}(x))^s (U^{(k)}(x))^{2(j-1)-s} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{j-1} d'_{ks} U^{(k+2(j-s)-1)}(x) (U^{(k+2)}(x))^s (U^{(k)}(x))^{2(j-1)-s} \right), \quad 1 \leq 2j-1 \leq k, \end{aligned} \quad (34)$$

где $c_{ks}, d_{ks}, c'_{ks}, d'_{ks}$ — константы, точные значения которых для нас несущественны. Воспользуемся неравенствами (1) из [2, с. 101] для оценки слагаемых первой суммы из (33):

$$\begin{aligned} &\| |U^{(k)}|^{p_k-2-s} (U^{(k+1)})^s U^{(k+2j-s)} \|_{q_k, \sigma'_l} \\ &\ll \rho^{\nu_1}(x_0) \left\| \left| \frac{U^{(k)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_k}} \right|^{p_k-s-2} \left| \frac{U^{(k+1)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+1}}} \right|^s \left| \frac{U^{(k+2j-s)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+2j-s}}} \right| \right\|_{q_k, \sigma'_l} \equiv \rho^{\nu_1}(x_0) Q, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\nu_1 = (p_k - 2 - s)(r + \alpha - \beta_k) + s(r + \alpha - \beta_{k+1}) + r + \alpha - \beta_{k+2j-s}$. Пусть $s = 0$, $p_k > 2$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями

$$\lambda_1 = \frac{p_k}{q_k(p_k - 2)}, \quad \lambda_2 = \frac{p_k}{q_k},$$

получим

$$Q \leq \left\| \frac{U^{(k)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_k}} \right\|_{p_k, \sigma'_l}^{p_k-2} \left\| \frac{U^{(k+2j)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+2j}}} \right\|_{p_k, \sigma'_l} \ll \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^r(\sigma'_l)}^{p_k-1}. \quad (36)$$

Последнее неравенство в (36) следует из (3). Если $p_k = 2$, то $q_k = 2$. Поэтому

$$Q = \left\| \frac{U^{(k+2j)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+2j}}} \right\|_{2, \sigma'_l} \ll \|U\|_{W_{2,\alpha}^r(\sigma'_l)}.$$

Пусть $s \geq 1$. Если $p_k - 2 - s = 0$, то $p_k - 2 \geq 1$. Поэтому

$$Q \leq \left\| \frac{U^{(k+1)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+1}}} \right\|_{p_k, \sigma'_l}^{p_k-2} \left\| \frac{U^{(k+2j-s)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+2j-s}}} \right\|_{p_k, \sigma'_l} \ll \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^{r, p_k-1}(\sigma'_l)}^{p_k-1}. \quad (37)$$

Если $p_k - s - 2 > 0$, то, воспользовавшись неравенством Гёльдера с показателями

$$\lambda_1 = \frac{p_k}{q_k(p_k - 2 - s)}, \quad \lambda_2 = \frac{p_k}{sq_k}, \quad \lambda_3 = \frac{p_k}{q_k},$$

получим

$$Q \leq \left\| \frac{U^{(k)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_k}} \right\|_{p_k, \sigma'_l}^{p_k-2-s} \left\| \frac{U^{(k+1)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+1}}} \right\|_{p_k, \sigma'_l}^s \left\| \frac{U^{(k+2j-s)}}{\rho^{r+\alpha-\beta_{k+2j-s}}} \right\|_{p_k, \sigma'_l} \ll \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^{r, p_k-1}(\sigma'_l)}^{p_k-1}. \quad (38)$$

В силу (35)–(38) получим

$$\| |U^{(k)}|^{p_k-2-s} (U^{(k+1)})^s U^{(k+2j-s)} \|_{q_k, \sigma'_l} \ll \rho^{\nu_1}(x_0) \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^{r, p_k-1}(\sigma'_l)}^{p_k-1}. \quad (39)$$

Аналогично оцениваются слагаемые второй суммы из (33), а также слагаемые, составляющие первую и вторую сумму из равенства (34), и E_0 . Для них имеем такие же оценки, как (39), только показатель ν_1 надо заменить на $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ соответственно:

$$\begin{aligned} \nu_2 &= (p_k - 2 - s)(r + \alpha - \beta_k) + s(r + \alpha - \beta_{k+2}) + r + \alpha - \beta_{k+2(j-s)}, \\ \nu_3 &= (p_k - 2 - s)(r + \alpha - \beta_k) + s(r + \alpha - \beta_{k+1}) + r + \alpha - \beta_{k+2j-s-1}, \\ \nu_4 &= (p_k - 2 - s)(r + \alpha - \beta_k) + s(r + \alpha - \beta_{k+2}) + r + \alpha - \beta_{k+2(j-s)-1}, \\ \nu_5 &= (p_k - 1)(r + \alpha - \beta_k). \end{aligned}$$

Из определения β_k (см. (4)) следует

$$\beta_{k'} - \beta_{k''} \geq k' - k'' \quad \forall k', k'', \quad k' \leq k'' \leq r.$$

Поэтому

$$-p_k(r + \alpha - \beta_k) - k + n + \nu_j \geq -r - \alpha + \beta_k - k, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Теперь в силу (31), (32), (39) для $J_2(\sigma'_l, l)$ получим оценку

$$|J_2(\sigma'_l, l)| \ll \sum_{k \leq r/2} \rho^{-r-\alpha+\beta_k-k}(x_0) \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^{r, p_k-1}}^{p_k-1} X^{1/p}(\sigma'_l, l). \quad (40)$$

Нам осталось оценить интеграл $J_3(\sigma'_l, l)$:

$$\begin{aligned} |J_3(\sigma'_l, l)| &= \left| \int_{\sigma'_l} \frac{\Delta^l F}{h^l} A_l \eta_l dx \right| = \left| \int_{\sigma'_l} F \frac{\Delta^l h}{h^l} (A_l \eta_l) dx \right| \\ &\leq \|F\|_{q, \sigma'_l} \| (A_l \eta_l)^{(l)} \|_{p, \sigma'_l} \ll \rho^{-r-\alpha+s_0}(x_0) \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \sigma'_l} X^{1/p}(\sigma'_l, l). \end{aligned} \quad (41)$$

Из соотношений (18) при $\sigma' = \sigma'_l$, $\eta(x) = \eta_l(x)$, (30), (40), (41) следует

$$\left\| \eta_l^{2/q} \frac{\Delta^l \psi}{h^l} \right\|_{q, \sigma'_l} \ll S(\sigma').$$

Отсюда, так как $\eta_l(x) = 1$ на σ_l , имеем

$$\left\| \frac{\Delta^l \psi}{h^l} \right\|_{q, \sigma_l} \ll S(\sigma'), \quad l = m+1, \quad 1 \leq m < r.$$

Неравенства (29) и, следовательно, неравенство (26) доказаны. Из (26) на основании неравенств (8), (9) из [2, с. 116] получим (см. (24) для $S(\sigma')$)

$$\|\psi^{(r)}\|_{q, \sigma} \ll \rho^{-r-\alpha}(x_0) \left(\|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\sigma')}^{p-1} + \sum_{k \leq r/2} \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^r(\sigma')}^{p_k-1} + \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \sigma'} \right).$$

Умножим это неравенство на $\rho^{r+\alpha-1/l_0}(x_0)$, где $l_0 = \max_k q_k$, а затем возведем его в степень q и проинтегрируем по $x_0 \in \Delta = (a, b)$. Если полученный результат возвести в степень $1/q$ и применить к каждому члену теорему Труази, то получим неравенство (см. [2, с. 103])

$$\|\rho^{r+\alpha+(l_0-q)/(q l_0)} \psi^{(r)}\|_{q, \Delta} \ll \|U\|_{W_{p, \alpha}^r(\Delta)}^{p-1} + \sum_{k \leq r/2} \|U\|_{W_{p_k, \alpha}^r(\Delta)}^{p_k-1} + \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \Delta}.$$

Отсюда, так как $2 \leq p_k \leq p$, следует неравенство (13). Аналогично, на основании (20) получим неравенство (12).

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 3 имеют место неравенства

$$\|\rho^\alpha \psi\|_{q, \Delta}^q \ll \|\Phi\|_{W_{p, \alpha}^r(\Delta)}^{\gamma_0} + \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \Delta}^q, \quad (42)$$

$$\|\rho^{r+\alpha+(l_0-q)/(q l_0)} \psi^{(r)}\|_{q, \Delta} \ll \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \Delta} + (\|\Phi\|_{W_{p, \alpha}^r(\Delta)}^{\gamma_0} + \|\rho^{r+\alpha-s_0} F\|_{q, \Delta}^q)^{\lambda_0/p}. \quad (43)$$

Неравенство (42) следует из (9), (12), а неравенство (43) – из (9), (13).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
- [2] Лизоркин П. И., Никольский С. М. Коэрцитивное свойство эллиптических уравнений с вырождением. Вариационный метод // Тр. МИАН. 1981. Т. 157. С. 90–118.
- [3] Салманов Ю. Д. Весовые классы функций с вырождением на многообразиях любых измерений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 539–542.
- [4] Салманов Ю. Д. Следы функций из весовых классов на многообразиях и обратные теоремы вложения // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 4. С. 823–826.