Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Антонов, Интегрируемость мажорант сумм Фурье и расходимость рядов Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 651–665

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:33:12

УДК 517.518

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МАЖОРАНТ СУММ ФУРЬЕ И РАСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Н. Ю. Антонов

Построен пример функции из класса $H_1^{\omega^*}$, где $\omega^*(t) = \sqrt{\log \log(t^{-1}) / \log(t^{-1})}$, $0 < t \leq t_0$, с расходящимся почти всюду тригонометрическим рядом Фурье. Получены неулучшаемые условия интегрируемости мажорант частичных сумм тригонометрических рядов Фурье в терминах принадлежности функций классам H_1^ω .

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть $L = L_{[0, 2\pi)}$ – пространство 2π -периодических интегрируемых по Лебегу функций,

$$\|f\| = \|f\|_L = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

Обозначим через $\omega(f, \delta)_1$ интегральный модуль непрерывности функции $f \in L$:

$$\omega(f, \delta)_1 = \sup_{|h| \leq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx.$$

Пусть ω – произвольный модуль непрерывности (см., например, [1, § 7.1]). Определим множество H_1^ω следующим образом:

$$H_1^\omega = \{f \in L : \omega(f, \delta)_1 = O(\omega(\delta))\}.$$

Через $S_n(f, x)$ будем обозначать n -ю частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L$ в точке $x \in [0, 2\pi)$.

А. Зигмунд [2, гл. XIII, теорема 3.10] доказал, что если ω удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \omega(t)t^{-1} dt < \infty$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00764 и № 03-01-06496, и Российского фонда фундаментальных исследований – Государственного фонда естественных наук Китая, грант № 02-01-39007.

(это условие эквивалентно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1/k)/k$), то тригонометрический ряд Фурье функции $f \in H_1^{\omega}$ сходится почти всюду. А. Н. Колмогоровым [3] был построен пример интегрируемой функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду, а затем [4] – пример функции $f \in L$ с рядом Фурье, расходящимся всюду. Развивая конструкцию Колмогорова, В. И. Прохоренко [5] получил пример функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье и принадлежащей классу H_1^{ϖ} , где $\varpi(\delta) = 1/\log \log(1/\delta)$. С. В. Конягин [6], усилив результаты работ [7]–[10], показал, что если неубывающая функция $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию $\psi(n)\lambda_n = o(\sqrt{\log n}/\sqrt{\log \log n})$ при $n \rightarrow \infty$, то существует функция $f \in L$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\psi(|f(x)|) dx < \infty,$$

и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(f, x)}{\lambda_n} = \infty$$

для всех $x \in [0, 2\pi)$.

В п. 2 мы покажем, что из одного предварительного утверждения работы [6] можно получить также следующий факт, улучшающий результат работы [5].

ТЕОРЕМА 1. *Существует функция $F \in L$ с расходящимся почти всюду тригонометрическим рядом Фурье и интегральным модулем непрерывности, удовлетворяющим условию*

$$\omega(F, \delta)_1 = O\left(\sqrt{\frac{\log \log(1/\delta)}{\log(1/\delta)}}\right).$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел. Обозначим

$$M(f, \Lambda, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n(f, x)|}{\lambda_n}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

В случае $\lambda_n \equiv 1$, если ряд Фурье функции f сходится почти всюду, в частности, если $f \in H_1^{\omega}$, где ω удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1/k)/k < \infty$, то мажоранта $M(f, \{1\}, x)$ почти всюду конечна. Для произвольной функции $f \in L$ конечные значения почти во всех точках принимает мажоранта $M(f, \{\log n\}, x)$. Это следует из оценки Г. Харди [11]: если $f \in L$, то

$$S_n(f, x) = o(\log n) \quad \text{п.в.}$$

В п. 3 и п. 4 рассматривается задача о наиболее общих условиях на модуль непрерывности ω , достаточных для того, чтобы для всех $f \in H_1^{\omega}$ мажоранта $M(f, \Lambda, \cdot)$ была интегрируемой. Получены следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для модуля непрерывности ω и последовательности положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены условия:*

- 1) *последовательности λ_n и n/λ_n не убывают;*
- 2) *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(1/k)}{k\lambda_k}$$

сходится.

Тогда для любой $f \in H_1^\omega$ мажоранта $M(f, \Lambda, \cdot)$ интегрируема, и

$$\|M(f, \Lambda, \cdot)\|_L \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(f, \pi/k)_1}{k\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_L.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть модуль непрерывности ω и неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(1/k)}{k\lambda_k} = \infty. \quad (1.1)$$

Тогда существует функция $F \in H_1^\omega$ такая, что мажоранта $M(F, \Lambda, \cdot)$ не интегрируема.

В связи с теоремой 3 отметим, что в [2, гл. XIII, п. 2] построен пример функции $F \in L$, у которой $M(F, \{\log n\}, \cdot) \notin L$.

Кроме уже введенных, в работе будут также использоваться следующие обозначения: $D_n(t) = \sin(n + 1/2)t / (2 \sin(t/2))$ – ядро Дирихле; $\text{mes } A$ – лебегова мера множества A ; если f – функция с ограниченным изменением, то $V(f)$ – ее вариация на $[-\pi, \pi]$; $\log u = \log_2 u$; $[u]$ – целая часть числа u .

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 основано на двух леммах.

ЛЕММА А (С.В. Конягин [6, лемма 3.5]). Пусть n – достаточно большое натуральное число, $N = 2^n$, $M = 2Nn^{2n}$. Тогда существует такой неотрицательный тригонометрический полином T_n степени не выше M^2 , что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x) dx = 1,$$

и для любого $x \in [0, 2\pi)$ найдется такое $m \geq Nn$, что

$$S_m(T_n, x) \geq 0.0002\sqrt{n}.$$

ЛЕММА 1. Предположим, что существуют последовательности

- а) функций $\{f_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subset L$;
- б) 2π -периодических множеств $\{E_n\}_{n=n_0}^{\infty}$;
- в) номеров $\{q_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$;
- г) положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$;

такие, что

- 1) $\|f_n\| = 1$;
- 2) $\text{mes } E_n \geq \gamma > 0$;
- 3) последовательности λ_n , q_n , q_n^2/λ_n не убывают;
- 4) $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$, λ_n не ограничена;
- 5) для любого $x \in E_n$

$$\max_{1 \leq k \leq q_n} |S_k(f_n, x)| \geq c\lambda_n.$$

Пусть модуль непрерывности ω удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left(\omega\left(\frac{1}{q_n^2}\right)\right). \quad (2.1)$$

Тогда существует функция F из класса H_1^ω с расходящимся почти всюду рядом Фурье.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Сформулируем необходимые для доказательства известные утверждения.

ЛЕММА В (П. Л. Ульянов [12]). Пусть f — функция с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$. Тогда

$$\omega(f, \delta)_1 \leq 9V(f)\delta.$$

Для 2π -периодического множества $E \subset \mathbb{R}$ обозначим через E^u множество E , сдвинутое на u , и под $\text{mes } E$ будем понимать лебегову меру множества $E \cap [0, 2\pi)$.

ЛЕММА С [2, гл. XIII, лемма 1.24]. Пусть задана произвольная последовательность (периодических) множеств $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ таких, что

$$\sum_{i=1}^\infty \text{mes } G_i = \infty.$$

Тогда существуют такие числа u_i , $i = 1, 2, \dots$, что почти каждая точка принадлежит бесконечному числу множеств $G_i^{u_i}$.

Приступая к доказательству леммы 1, заметим сразу, что, поскольку для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 2\pi)$ $|S_k(f_n, x)| < 2k$, условие 5) леммы можно заменить на условие

$$\max_{c\lambda_n/2 \leq k \leq q_n} |S_k(f_n, x)| \geq c\lambda_n, \quad x \in E_n. \quad (2.2)$$

Выполнение условия (2.2) означает, в частности, что $c\lambda_n \leq 2q_n$. Отсюда и из неограниченности λ_n следует неограниченность последовательностей q_n и q_n^2/λ_n . Можно считать, не ограничивая общности, что

$$c \leq 1, \quad \gamma \leq 1, \quad c\lambda_{n_0} \geq \frac{16}{\gamma} \geq 16. \quad (2.3)$$

Пусть $n \geq n_0$. Обозначим $a_i = 2\pi i/q_n^2$, $i = 0, 1, \dots, q_n^2$, $\Delta_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, 2, \dots, q_n^2$. Определим 2π -периодическую функцию φ_n следующим образом:

$$\varphi_n(a_i) = 0, \quad \varphi_n\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right) = \frac{q_n^2}{\pi} \int_{\Delta_i} f_n(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, q_n^2,$$

$\varphi_n(x)$ линейная на отрезках $[a_{i-1}, (a_{i-1} + a_i)/2]$ и $[(a_{i-1} + a_i)/2, a_i]$, $i = 1, 2, \dots, q_n^2$. Как нетрудно видеть,

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) dx, \quad \|\varphi_n\| \leq \|f_n\| = 1, \quad (2.4)$$

функция φ_n непрерывна, ограниченной вариации, и

$$V(\varphi_n) = 2 \sum_{i=1}^{q_n^2} \left| \varphi_n \left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right) \right| \leq \frac{2q_n^2}{\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)| dx = \frac{2q_n^2}{\pi}. \quad (2.5)$$

Для $x \in [0, 2\pi)$

$$|S_k(\varphi_n, x)| \geq |S_k(f_n, x)| - |S_k(\varphi_n - f_n, x)|. \quad (2.6)$$

Поскольку согласно построению функции φ_n

$$\int_{\Delta_i} (\varphi_n(x) - f_n(x)) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q_n^2,$$

то

$$\begin{aligned} |S_k(\varphi_n - f_n, x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_k(x+t) (\varphi_n(t) - f_n(t)) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{q_n^2} \int_{\Delta_i} D_k(x+t) (\varphi_n(t) - f_n(t)) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{q_n^2} \int_{\Delta_i} (D_k(x+t) - D_k(x+a_i)) (\varphi_n(t) - f_n(t)) dt \right|. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью формулы Лагранжа о конечных приращениях получаем для $1 \leq k \leq q_n$

$$\begin{aligned} |S_k(\varphi_n - f_n, x)| &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{q_n^2} \max_{t \in [0, 2\pi)} |D'_k(t)| \text{mes } \Delta_i \int_{\Delta_i} (|\varphi_n(t)| + |f_n(t)|) dt \\ &\leq \frac{k^2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{q_n^2} (\|f_n\| + \|\varphi_n\|) \leq 4. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.2), (2.7) и (2.3) для $x \in E_n$ имеем

$$\max_{c\lambda_n/2 \leq k \leq q_n} |S_k(\varphi_n, x)| \geq c\lambda_n - 4 \geq \frac{c}{2} \lambda_n. \quad (2.8)$$

Так как φ_n — непрерывная функция ограниченной вариации, при $k \rightarrow \infty$ $S_k(\varphi_n, x)$ равномерно сходится к $\varphi_n(x)$ (см., например, [14, гл. 1, § 39]); следовательно, найдется номер μ_n такой, что $\mu_n \geq q_n$,

$$|S_{\mu_n}(\varphi_n, x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{2}{\gamma}, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (2.9)$$

и для всех $k, l \geq \mu_n$

$$|S_k(\varphi_n, x) - S_l(\varphi_n, x)| < 1, \quad x \in [0, 2\pi). \quad (2.10)$$

Согласно (2.9) для тех x , у которых $|\varphi_n(x)| \leq 2/\gamma$,

$$|S_{\mu_n}(\varphi_n, x)| \leq \frac{4}{\gamma}. \quad (2.11)$$

Обозначим $G_n = E_n \cap \{x \in [0, 2\pi) : |\varphi_n(x)| \leq 2/\gamma\}$. Поскольку

$$\frac{2}{\gamma} \text{mes} \left\{ x \in [0, 2\pi) : |\varphi_n(x)| > \frac{2}{\gamma} \right\} \leq \|\varphi_n\| \leq 1,$$

и $\text{mes } E_n \geq \gamma$, то

$$\text{mes } G_n = \text{mes} \left(E_n \setminus \left\{ x \in [0, 2\pi) : |\varphi_n(x)| > \frac{2}{\gamma} \right\} \right) \geq \frac{\gamma}{2},$$

и для $x \in G_n$ согласно (2.8), (2.11) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \max_{c\lambda_n/2 \leq k, l \leq \mu_n} |S_k(\varphi_n, x) - S_l(\varphi_n, x)| &\geq \max_{c\lambda_n/2 \leq k \leq q_n} |S_k(\varphi_n, x) - S_{\mu_n}(\varphi_n, x)| \\ &\geq \frac{c}{2}\lambda_n - \frac{4}{\gamma} \geq \frac{c}{4}\lambda_n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Наконец, используя лемму В и (2.5), получаем

$$\omega\left(\varphi_n, \frac{1}{q_m^2}\right)_1 \leq 9 V(\varphi_n) \frac{1}{q_m^2} \leq \frac{18}{\pi} \frac{q_n^2}{q_m^2}, \quad m \geq n_0. \quad (2.13)$$

Таким образом, построенные нами функции φ_n , $n \geq n_0$, обладают следующими свойствами (см. (2.12), (2.10), (2.4) и (2.13)):

1_φ) существуют номера μ_n и $\nu_n = [c\lambda_n/2] - 1$, $\mu_n \geq \nu_n$, $\nu_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$\max_{\nu_n \leq k, l \leq \mu_n} |S_k(\varphi_n, x) - S_l(\varphi_n, x)| \geq \frac{c}{4}\lambda_n, \quad x \in G_n, \quad \text{mes } G_n \geq \frac{\gamma}{2};$$

2_φ) для $x \in [0, 2\pi)$

$$\sup_{k, l \geq \mu_n} |S_k(\varphi_n, x) - S_l(\varphi_n, x)| < 1;$$

3_φ) $\|\varphi_n\| \leq 1$;

4_φ) для $m \geq n_0$

$$\omega\left(\varphi_n, \frac{1}{q_m^2}\right)_1 \leq \frac{6q_n^2}{q_m^2}.$$

Теперь приступим к построению функции F . Определим последовательность номеров n_j следующим образом: $n_1 = n_0$; пусть $n_1, \dots, n_{j-1}$ уже построены; выберем n_j так, чтобы

$$\lambda_{n_j} \geq 2\lambda_{n_{j-1}}, \quad (2.14)$$

$$\frac{q_{n_j}^2}{\lambda_{n_j}} \geq 2\frac{q_{n_{j-1}}^2}{\lambda_{n_{j-1}}}, \quad (2.15)$$

$$\nu_{n_j} \geq \frac{128}{c}\mu_{n_{j-1}}. \quad (2.16)$$

Возьмем точки u_i в соответствии с леммой С, примененной к последовательности $\{G_{n_i}\}$, так, что $\text{mes } G = 2\pi$, где

$$G = \limsup_{i \rightarrow \infty} G_{n_i}^{u_i}.$$

Положим

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x + u_i)}{\lambda_{n_i}}.$$

Из условий 3_φ и (2.14) видно, что $F \in L$.

Проверим, что в каждой точке множества G ряд Фурье функции F расходится. Пусть $x \in G$, $M > 0$. Тогда найдется такой номер j , что $x \in G_{n_j}^{u_j}$ и $\nu_{n_j} > M$. Далее, используя 1_φ , 2_φ , 3_φ), (2.16), (2.14) и (2.3), получаем

$$\begin{aligned} & \max_{\nu_{n_j} \leq k, l \leq \mu_{n_j}} |S_k(F, x) - S_l(F, x)| \\ & \geq \max_{\nu_{n_j} \leq k, l \leq \mu_{n_j}} |S_k(\varphi_{n_j}(\cdot + u_j), x) - S_l(\varphi_{n_j}(\cdot + u_j), x)| \frac{1}{\lambda_{n_j}} \\ & \quad - \sum_{i=1}^{j-1} \max_{\nu_{n_j} \leq k, l \leq \mu_{n_j}} |S_k(\varphi_{n_i}(\cdot + u_i), x) - S_l(\varphi_{n_i}(\cdot + u_i), x)| \frac{1}{\lambda_{n_i}} \\ & \quad - \sum_{i=j+1}^{\infty} \max_{\nu_{n_j} \leq k, l \leq \mu_{n_j}} |S_k(\varphi_{n_i}(\cdot + u_i), x) - S_l(\varphi_{n_i}(\cdot + u_i), x)| \frac{1}{\lambda_{n_i}} \\ & \geq \frac{c}{4} - \sum_{i=1}^{j-1} \sup_{k, l \geq \mu_{n_i}} |S_k(\varphi_{n_i}(\cdot + u_i), x) - S_l(\varphi_{n_i}(\cdot + u_i), x)| \frac{1}{\lambda_{n_i}} - 4\mu_{n_j} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\|\varphi_{n_i}\|}{\lambda_{n_i}} \\ & \geq \frac{c}{4} - \frac{1}{\lambda_{n_0}} - \frac{8\mu_{n_j}}{\lambda_{n_j}} \geq \frac{c}{8}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $x \in G$, то для любого M найдутся номера $k, l > M$ такие, что

$$|S_k(F, x) - S_l(F, x)| \geq \frac{c}{8},$$

т.е. ряд Фурье функции F расходится на множестве полной меры G .

Нам осталось показать, что модуль непрерывности функции F удовлетворяет требуемому условию. Пусть $m \geq n_1$. Выберем номер j так, чтобы $n_j \leq m < n_{j+1}$. Имеем

$$\omega\left(F, \frac{1}{q_m^2}\right)_1 \leq \sum_{i=1}^j \frac{\omega(\varphi_{n_i}, 1/q_m^2)_1}{\lambda_{n_i}} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\omega(\varphi_{n_i}, 1/q_m^2)_1}{\lambda_{n_i}} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (2.17)$$

Оценим каждую из сумм в правой части (2.17). Из условия 3) леммы 1 и (2.15) следует

$$\frac{q_m^2}{\lambda_m} \geq \frac{q_{n_j}^2}{\lambda_{n_j}} \geq 2^{j-i} \frac{q_{n_i}^2}{\lambda_{n_i}}, \quad i \leq j.$$

Отсюда и из 4 $_{\varphi}$) получаем

$$\Sigma_1 \leq 6 \sum_{i=1}^j \frac{1}{\lambda_{n_i}} \frac{q_{n_i}^2}{q_m^2} \leq 6 \sum_{i=1}^j \frac{1}{\lambda_{n_i}} \frac{\lambda_{n_i}}{2^{j-i} \lambda_m} = \frac{6}{\lambda_m} \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^{j-i}} < \frac{12}{\lambda_m}. \quad (2.18)$$

С помощью 3 $_{\varphi}$) и (2.14) имеем

$$\Sigma_2 \leq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\|\varphi_{n_i}\|}{\lambda_{n_i}} \leq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n_i}} \leq \frac{4}{\lambda_{n_{j+1}}} \leq \frac{4}{\lambda_m}. \quad (2.19)$$

Объединяя (2.17)–(2.19), видим, что для $m \geq n_1$

$$\omega\left(F, \frac{1}{q_m^2}\right)_1 \leq \frac{16}{\lambda_m}. \quad (2.20)$$

Покажем, что это условие гарантирует принадлежность F к классу H_1^{ω} для любого модуля непрерывности ω , удовлетворяющего условию (2.1). В самом деле, пусть ω удовлетворяет условию (2.1). Пусть $0 < \delta < 1/q_{n_1}^2$. Тогда, взяв номер m таким, что $1/q_{m+1}^2 \leq \delta < 1/q_m^2$, используя последовательно неубывание $\omega(F, \delta)_1$, (2.20), условие 4) леммы 1, условие (2.1) и неубывание $\omega(\delta)$, имеем

$$\omega(F, \delta)_1 \leq \omega\left(F, \frac{1}{q_m^2}\right)_1 \leq \frac{16}{\lambda_m} = O\left(\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{q_{m+1}^2}\right)\right) = O(\omega(\delta)),$$

т.е. $F \in H_1^{\omega}$. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применим лемму 1 к последовательностям из леммы А. Положим $f_n = T_n/(2\pi)$, $E_n = [0, 2\pi)$, $q_n = M^2 = 2^{2n(2 \log n + 1) + 2}$, $\lambda_n = \sqrt{n}$. Нетрудно проверить, что для этих последовательностей выполняются условия 1)–4) леммы 1. Условие 5) леммы 1 выполняется согласно лемме А.

Так как при $n \geq 2$

$$\sqrt{\frac{\log \log(q_n^2)}{\log(q_n^2)}} \geq \sqrt{\frac{\log \log 2^n}{\log(2^{16n \log n})}} = \frac{1}{\sqrt{16n}} = \frac{1}{4\lambda_n},$$

то функция $\omega(\delta) = \sqrt{\log \log(1/\delta)/\log(1/\delta)}$ также удовлетворяет условиям леммы 1. Применяя лемму 1, получаем утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Определим функцию $\lambda(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$. В условиях теоремы 2 положим

$$\lambda(t) = \lambda_n : \quad \frac{\pi}{n+1} < |t| \leq \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что для всех $t \in [-\pi, \pi]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|D_n(t)|}{\lambda_n} \leq \frac{2\pi}{|t|\lambda(t)}. \quad (3.1)$$

В самом деле, если $|t| > \pi/(n+1)$, то, так как λ_n не убывает, $\lambda(t) \leq \lambda_n$. Отсюда, учитывая также, что $|\sin(t/2)| \geq |t|/\pi$ при $|t| \leq \pi$, получаем

$$\frac{|D_n(t)|}{\lambda_n} = \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)\lambda_n} \right| \leq \frac{\pi}{2|t|\lambda(t)}.$$

Пусть $|t| \leq \pi/(n+1)$. Обозначая $\bar{n} = [\pi/|t|]$ и учитывая неубывание последовательности n/λ_n , имеем

$$\frac{|D_n(t)|}{\lambda_n} < \frac{2n}{\lambda_n} \leq \frac{2\bar{n}}{\lambda_{\bar{n}}} \leq \frac{2\pi}{|t|\lambda(t)},$$

и (3.1) доказано.

Пусть $f \in H_1^\omega$. Для произвольных $x \in [-\pi, \pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_n(f, x) - f(x)}{\lambda_n} \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt - f(x) \right| \frac{1}{\lambda_n} \\ &= \left| \frac{1}{\pi\lambda_n} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) (f(x+t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_n(t)|}{\lambda_n} |f(x+t) - f(x)| dt. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (3.1) получаем

$$\left| \frac{S_n(f, x) - f(x)}{\lambda_n} \right| \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|\lambda(t)} dt.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n(f, x)|}{\lambda_n} dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n(f, x) - f(x)|}{\lambda_n} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|f(x)|}{\lambda_n} dx \\ &\leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|\lambda(t)} dt dx + \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.2). С помощью теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|\lambda(t)} dt dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|t|\lambda(t)} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx dt \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega(f, |t|)_1}{|t|\lambda(t)} dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{\omega(f, t)_1}{|t|\lambda(t)} dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как $\omega(f, t)_1$ не убывает, то

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\omega(f, t)_1}{|t|\lambda(t)} dt &= \sum_{k=1}^\infty \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} \frac{\omega(f, t)_1}{|t|\lambda(t)} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} \frac{\omega(f, \pi/k)_1(k+1)}{\pi\lambda_k} dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{\omega(f, \pi/k)_1}{k\lambda_k}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Объединяя (3.2)–(3.4), получаем

$$\int_{-\pi}^\pi \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|S_n(f, x)|}{\lambda_n} dx \leq 4 \sum_{k=1}^\infty \frac{\omega(f, \pi/k)_1}{k\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\pi}^\pi |f(x)| dx.$$

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Заметим предварительно, что в условиях теоремы

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\omega(1/2^k)}{\lambda_{2^k}} = \infty. \quad (4.1)$$

В самом деле, пользуясь тем, что последовательность $\omega(1/n)/\lambda_n$ не возрастает, имеем для $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\omega(1/2^k)}{\lambda_{2^k}} \geq \frac{1}{2^k} \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}-1} \frac{\omega(1/n)}{\lambda_n} > \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}-1} \frac{\omega(1/n)}{n\lambda_n}.$$

Просуммировав левую и правую части этой цепочки неравенств по всем натуральным k , справа получим ряд, который согласно (1.1) расходится. Следовательно, ряд, получившийся в левой части, также расходится, и (4.1) доказано.

Для произвольного модуля непрерывности ω существует вогнутый модуль непрерывности ω^* такой, что

$$\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(t)$$

(С. Б. Стечкин, см., например, [1, § 7.1]), и, в частности, $H_1^\omega = H_1^{\omega^*}$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что рассматриваемый модуль непрерывности ω вогнутый.

Приступим к построению функции F . Пусть $\alpha_k = \omega(1/2^k) - \omega(1/2^{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$. Заметим, что $\omega(1/2^k) = \sum_{j=k}^\infty \alpha_j$. Обозначим $A_k = \pi/2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\Delta_k = [A_k, A_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Теперь определим функцию F . Положим

$$F(x) = \begin{cases} 2^k \alpha_k, & x \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0, & x \notin \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k = (0, \pi). \end{cases}$$

Заметим, что функция $F(x)$ встречалась в работах П. Л. Ульянова (см., например, [13, с. 673]). Там же использовалось следующее утверждение, которое мы для полноты изложения докажем.

ЛЕММА 2. *Последовательность $2^k \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, является неубывающей и, следовательно, функция F на интервале $(0, \pi)$ не возрастает.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как модуль непрерывности ω вогнутый, то для любых $t_1, t_2 \geq 0, 0 \leq a \leq 1$,

$$\omega(at_1 + (1-a)t_2) \geq a\omega(t_1) + (1-a)\omega(t_2).$$

Положив здесь

$$t_1 = \frac{1}{2^{k+2}}, \quad t_2 = \frac{1}{2^k}, \quad a = \frac{2^{k+1}}{2^{k+1} + 2^k},$$

имеем

$$\omega\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \omega\left(\frac{2^{k+1}}{(2^{k+1} + 2^k)2^{k+2}} + \frac{2^k}{(2^{k+1} + 2^k)2^k}\right) \geq \frac{2^{k+1}\omega(1/2^{k+2}) + 2^k\omega(1/2^k)}{2^{k+1} + 2^k},$$

откуда

$$2^k \alpha_k = 2^k \left(\omega\left(\frac{1}{2^k}\right) - \omega\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \right) \leq 2^{k+1} \left(\omega\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) - \omega\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) \right) = 2^{k+1} \alpha_{k+1}.$$

Лемма 2 доказана.

Покажем, что построенная функция F принадлежит классу H_1^ω . Пусть $\delta \in (0, 1/2)$. Представим F в виде суммы двух функций F_1 и F_2 , определенных следующим образом:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [A_{[\log(1/\delta)]+1}, \pi), \\ 0, & x \notin [A_{[\log(1/\delta)]+1}, \pi), \\ F_2(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (0, A_{[\log(1/\delta)]+1}), \\ 0, & x \notin (0, A_{[\log(1/\delta)]+1}). \end{cases} \end{cases}$$

Оценим модуль непрерывности функции F_2 в точке δ :

$$\begin{aligned} \omega(F_2, \delta)_1 &\leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} F_2(x) dx = 2 \sum_{k=[\log(1/\delta)]+2}^{\infty} 2^k \alpha_k \text{mes } \Delta_k \\ &= 2\pi \sum_{k=[\log(1/\delta)]+2}^{\infty} \alpha_k = 2\pi \omega\left(\frac{1}{2^{[\log(1/\delta)]+2}}\right) \leq 2\pi \omega\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq 2\pi \omega(\delta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для оценки модуля непрерывности функции F_1 воспользуемся леммой В. Так как по лемме 2 функция F_2 не возрастает на полуинтервале $[A_{[\log(1/\delta)]+1}, \pi)$ и равна нулю в остальных точках периода $[-\pi, \pi)$, то

$$\begin{aligned} V(F_1) &= 2 \max_{x \in [A_{[\log(1/\delta)]+1}, \pi)} F_1(x) = 2F(A_{[\log(1/\delta)]+1}) \\ &= 2 \cdot 2^{[\log(1/\delta)]+1} \alpha_{[\log(1/\delta)]+1} \leq \frac{4}{\delta} \omega\left(\frac{1}{2^{[\log(1/\delta)]+1}}\right) \leq \frac{4}{\delta} \omega(\delta). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы В получаем

$$\omega(F_1, \delta)_1 \leq 36\omega(\delta). \quad (4.3)$$

Из (4.2), (4.3) и неравенства

$$\omega(F, \delta)_1 \leq \omega(F_1, \delta)_1 + \omega(F_2, \delta)_1$$

следует

$$\omega(F, \delta)_1 \leq (2\pi + 36)\omega(\delta),$$

т.е. $F \in H_1^\omega$.

Нам осталось показать, что мажоранта $M(F, \Lambda, \cdot)$ несуммируема. Для этого нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 3. Существует номер $\bar{k} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $k > \bar{k}$

$$S_{2^k}(F, 0) \geq \frac{1}{40} 2^k \omega\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любой функции $f \in L$ при $n \rightarrow \infty$

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1)$$

(см., например, [14, гл. 1, § 32]), найдется такой номер $\bar{k}$, что для всех $k > \bar{k}$

$$S_{2^k}(F, 0) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt - \frac{2\alpha_1}{40}. \quad (4.4)$$

Разобьем интеграл в правой части (4.4) на четыре части:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt &= \left(\int_0^{\pi/2^{k+1}} + \int_{\pi/2^{k+1}}^{3\pi/2^{k+1}} + \int_{3\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^{k-1}} + \int_{\pi/2^{k-1}}^{\pi} \right) \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (4.5)$$

и оценим каждый из получившихся интегралов.

Так как функция $\sin 2^k t$ на интервале $(\pi/2^{k+1}, 3\pi/2^{k+1})$ нечетно симметрична относительно точки $\pi/2^k$, то

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\int_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k} + \int_{\pi/2^k}^{3\pi/2^{k+1}} \right) \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt \\ &= \int_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k} \sin 2^k t \left(\frac{F(t)}{t} - \frac{F(\pi/2^{k-1} - t)}{\pi/2^{k-1} - t} \right) dt \\ &= \int_{\pi/2^{k+1}}^{\pi/2^k} \sin 2^k t \left(\frac{2^{k+1}\alpha_{k+1}}{t} - \frac{2^k\alpha_k}{\pi/2^{k-1} - t} \right) dt. \end{aligned}$$

Поскольку оба сомножителя в последнем подынтегральном выражении неотрицательны, то

$$I_2 \geq 0. \quad (4.6)$$

Аналогичным путем можно показать, что для $j \leq k-1$

$$\int_{\Delta_j} \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt \geq 0,$$

разбив для этого отрезок Δ_j на 2^{k-j-1} отрезков длины $2\pi/2^k$. Отсюда

$$I_4 = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Delta_j} \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt \geq 0. \quad (4.7)$$

Далее,

$$I_1 = \sum_{j=k+2}^{\infty} \int_{\Delta_j} \frac{\sin 2^k t}{t} 2^j \alpha_j dt.$$

Нетрудно проверить, что для $t \in (0, \pi/2^{k+1})$

$$\frac{\sin 2^k t}{t} \geq \frac{\sin(2^k \cdot \pi/2^{k+1})}{\pi/2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}}{\pi}.$$

Следовательно,

$$I_1 \geq \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{\pi} 2^j \alpha_j \text{mes } \Delta_j = 2^{k+1} \sum_{j=k+2}^{\infty} \alpha_j = 2^{k+1} \omega\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right),$$

откуда, пользуясь свойством модуля непрерывности

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}\right) = \omega\left(\frac{4}{2^{k+2}}\right) \leq 4\omega\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right),$$

имеем

$$I_1 \geq 2^{k-1} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right). \quad (4.8)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq 2^k \alpha_k \max_{t \in [3\pi/2^{k+1}, \pi/2^{k-1}]} \left| \frac{\sin 2^k t}{t} \right| \text{mes}([3\pi/2^{k+1}, \pi/2^{k-1}]) \\ &= 2^k \alpha_k \frac{2^{k+1}}{3\pi} \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2^k \alpha_k}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь тем, что $\alpha_k \leq \omega(1/2^k)$, получаем

$$|I_3| \leq \frac{2^k \omega(1/2^k)}{3}. \quad (4.9)$$

Объединяя (4.5)–(4.9), получаем

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2^k t}{t} F(t) dt \geq \frac{2^{k-1} \omega(1/2^k)}{3}. \quad (4.10)$$

Из (4.4), (4.10) и неубывания последовательности $2^k \alpha_k$ заключаем

$$S_{2^k}(F, 0) \geq \frac{1}{\pi} \frac{2^{k-1} \omega(1/2^k)}{3} - \frac{2\alpha_1}{40} \geq \frac{2^k \omega(1/2^k)}{20} - \frac{2^k \alpha_k}{40} \geq \frac{2^k \omega(1/2^k)}{40}.$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда

$$|S_{2^k}(F, x) - S_{2^k}(F, 0)| \leq 13 \cdot 2^{2k} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) |x|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем функцию F на сумму двух функций F_1 и F_2 , определенных так:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [A_k, \pi), \\ 0, & x \notin [A_k, \pi), \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (0, A_k), \\ 0, & x \notin (0, A_k). \end{cases}$$

Ясно, что

$$|S_{2^k}(F, x) - S_{2^k}(F, 0)| \leq |S_{2^k}(F_1, x) - S_{2^k}(F_1, 0)| + |S_{2^k}(F_2, x) - S_{2^k}(F_2, 0)|. \quad (4.11)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (4.11). Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа и вспоминая определение функции F , имеем

$$\begin{aligned} |S_{2^k}(F_2, x) - S_{2^k}(F_2, 0)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (D_{2^k}(x+t) - D_{2^k}(t)) F_2(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi)} |D_{2^k}(x+t) - D_{2^k}(t)| \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F_2(t) dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi)} |D'_{2^k}(t)| |x| \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{\Delta_j} 2^j \alpha_j dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} 2^{2k} |x| \cdot \pi \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j \\ &= 2^{2k} \omega\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \cdot |x| \leq 2^{2k} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) |x|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

С помощью леммы В и невозрастания функции F на $[A_k, \pi)$ получаем

$$\begin{aligned} |S_{2^k}(F_1, x) - S_{2^k}(F_1, 0)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{2^k}(t) (F_1(x+t) - F_1(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi)} |D_{2^k}(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |F_1(x+t) - F_1(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} 2^{k+1} \omega(F_1, |x|)_1 \leq \frac{9}{\pi} 2^{k+1} V(F_1) |x| \\ &= \frac{18}{\pi} 2^{k+1} |x| \max_{x \in [A_k, \pi)} |F(x)| = \frac{18}{\pi} 2^{k+1} F(A_k) \cdot |x| \\ &= \frac{18}{\pi} 2^{2k+1} \alpha_k |x| \leq \frac{36}{\pi} 2^{2k} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) |x|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.11)–(4.13) следует утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Пусть $k > \bar{k}$, $x \in \Delta_{k+13}$. Так как

$$S_{2^k}(F, x) \geq S_{2^k}(F, 0) - |S_{2^k}(F, x) - S_{2^k}(F, 0)|,$$

применяя леммы 3 и 4, с учетом того, что $0 < x \leq \pi/2^{k+12}$, имеем

$$\begin{aligned} S_{2^k}(F, x) &\geq \frac{1}{40} 2^k \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) - 13 \cdot 2^{2k} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) |x| \\ &\geq 2^k \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) \left(\frac{1}{40} - \frac{13\pi}{2^{12}}\right) > \frac{1}{80} 2^k \omega\left(\frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, для $k > \bar{k}$, $x \in \Delta_{k+13}$

$$M(F, \Lambda, x) \geq \frac{|S_{2^k}(F, x)|}{\lambda_{2^k}} > \frac{1}{80} \frac{2^k \omega(1/2^k)}{\lambda_{2^k}}. \quad (4.14)$$

Используя (4.14), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} M(F, \Lambda, x) dx &\geq \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} \int_{\Delta_{k+13}} M(F, \Lambda, x) dx \\ &\geq \frac{1}{80} \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} \frac{2^k \omega(1/2^k)}{\lambda_{2^k}} \text{mes } \Delta_{k+13} \geq \frac{\pi}{80 \cdot 2^{13}} \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} \frac{\omega(1/2^k)}{\lambda_{2^k}}. \end{aligned}$$

Поскольку последний ряд согласно (4.1) расходится, то $\|M(F, \Lambda, x)\| = \infty$. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [3] Kolmogoroff A. Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout // *Fund. Math.* 1923. V. 4. P. 324–328.
- [4] Kolmogoroff A. Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1926. V. 183. P. 1327–1329.
- [5] Прохоренко В. И. О расходящихся рядах Фурье // *Матем. сб.* 1968. Т. 75(117). № 2. С. 185–198.
- [6] Конягин С. В. О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 1. С. 103–126.
- [7] Chen Y. M. On Kolmogoroff's divergent Fourier series // *Archiv der Mathematik.* 1963. V. 14. № 2. P. 116–119.
- [8] Chen Y. M. An almost everywhere divergent Fourier series of class $L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$ // *J. London Math. Soc.* 1969. V. 44. P. 643–654.
- [9] Tandori K. Ein Divergenzsatz für Fourierreihen // *Acta Sci. Math.* 1969. V. 30. P. 43–48.
- [10] Körner T. W. Everywhere divergent Fourier series // *Colloq. Math.* 1981. V. 45. № 1. P. 103–118.
- [11] Hardy G. H. On the summability of Fourier series // *Proc. London Math. Soc.* 1913. V. 12. P. 365–372.
- [12] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // *Матем. сб.* 1964. Т. 63(105). № 3. С. 356–391.
- [13] Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1968. Т. 32. № 3. С. 649–686.
- [14] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.