Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Темляков, Нелинейные поперечники по Колмогорову,
Матем. заметки, 1998, том 63, выпуск 6, 891–902

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 06:00:09

УДК 517.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ

В. Н. Темляков

Изучается обобщение поперечника по Колмогорову, которое подходит для оценки наилучших m -членных приближений. Обобщается неравенство Карла, дающее нижнюю оценку поперечников по Колмогорову через энтропийные числа. Применение этих новых неравенств позволяет получить продвижение в проблеме оценки наилучших m -членных тригонометрических приближений функций многих переменных.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В теории приближений изучаются различные поперечники: поперечники по Колмогорову, линейные поперечники, поперечники Фурье, поперечники по Гельфанду, поперечники по Александру и другие. Все эти поперечники были введены с целью оценить для данного функционального класса (более общо, компакта) наилучшую возможную точность аппроксимационных алгоритмов с определенными ограничениями. Например, колмогоровский n -поперечник для центральносимметричного компакта F в банаховом пространстве X определяется следующим образом:

$$d_n(F, X) := \inf_L \sup_{f \in F} \inf_{g \in L} \|f - g\|_X,$$

где $\inf_L$ берется по всем n -мерным подпространствам пространства X . Другими словами, колмогоровский n -поперечник дает наилучшую возможную ошибку в приближении компакта F n -мерными линейными подпространствами.

В последнее десятилетие наблюдается увеличивающийся интерес к нелинейным m -членным приближениям по различным системам. В настоящей работе делается попытка обобщить понятие классического поперечника по Колмогорову таким образом, чтобы использовать его в получении оценок наилучших m -членных приближений. С этой целью вводится нелинейный колмогоровский (N, m) -поперечник:

$$d_m(F, X, N) := \inf_{\mathcal{L}_N, \# \mathcal{L}_N \leq N} \sup_{f \in F} \inf_{L \in \mathcal{L}_N} \inf_{g \in L} \|f - g\|_X,$$

где $\mathcal{L}_N$ является множеством не более чем N m -мерных подпространств L . Ясно, что

$$d_m(F, X, 1) = d_m(F, X).$$

Работа выполнена при поддержке National Science Foundation, грант DMS 9622925, и фонда ONR, грант N00014-96-1-1003.

Новизна $d_m(F, X, N)$ состоит в том, что подпространство $L \in \mathcal{L}_N$ разрешается выбирать в зависимости от $f \in F$. Ясно, что с ростом N появляется больше возможностей для приближения f . Оказывается, что с точки зрения приложений важную роль играют следующие случаи:

- i) $N \asymp K^m, K = \text{const} > 1$;
- ii) $N \asymp m^{am}, a = \text{const} > 0$.

Мы собираемся использовать (N, m) -поперечники для оценки снизу наилучших m -членных приближений. Известно несколько общих результатов (см. [1], [2]), которые дают нижние оценки поперечников по Колмогорову $d_n(F, X)$ в терминах энтропийных чисел $\varepsilon_k(F, X)$. В п. 2 обобщается следующее неравенство Карла (см. [2]): для любого $r > 0$

$$\max_{1 \leq k \leq n} k^r \varepsilon_k(F, X) \leq C(r) \max_{1 \leq m \leq n} m^r d_{m-1}(F, X). \quad (1)$$

Здесь

$$\varepsilon_k(F, X) := \inf \left\{ \varepsilon : \exists f_1, \dots, f_{2^k} \in X : F \subset \bigcup_{j=1}^{2^k} (f_j + \varepsilon B(X)) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $B(X)$ – единичный шар банахова пространства X . Для нецелых k полагается $\varepsilon_k(F, X) = \varepsilon_{[k]}(F, X)$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Ясно, что $d_1(F, X, 2^n) \leq \varepsilon_n(F, X)$.

В п. 2 доказывается неравенство

$$\max_{1 \leq k \leq n} k^r \varepsilon_k(F, X) \leq C(r, K) \max_{1 \leq m \leq n} m^r d_{m-1}(F, X, K^m), \quad (2)$$

где

$$d_0(F, X, N) := \sup_{f \in F} \|f\|_X,$$

обобщающее неравенство (1), а также неравенство

$$\max_{1 \leq k \leq n} k^r \varepsilon_{(a+r)k \log k}(F, X) \leq C \max_{1 \leq m \leq n} m^r d_{m-1}(F, X, m^{am}) \quad (3)$$

и приводится пример, показывающий, что множитель $k \log k$ в (3) нельзя заменить на функцию от k , растущую медленнее.

В п. 3 неравенства (2) и (3) применяются для оценки снизу наилучших m -членных тригонометрических приближений. Пусть $\mathcal{T} := \{e^{i(k^j, x)}\}$ – тригонометрическая система. Обозначим через

$$\sigma_m(f)_p := \sigma_m(f, \mathcal{T})_p := \inf_{k^1, \dots, k^m; c_1, \dots, c_m} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_p$$

наилучшее m -членное тригонометрическое приближение функции f в L_p . Для функционального класса F положим

$$\sigma_m(F)_p := \sigma_m(F, \mathcal{T})_p := \sup_{f \in F} \sigma_m(f, \mathcal{T})_p.$$

В качестве следствия неравенства (2) мы приводим новое доказательство оценки (см. [3]) $\sigma_m(W_\infty^r, \mathcal{T})_1 \gg m^{-r}$, где W_∞^r – стандартный класс Соболева с ограничением, заданным в равномерной норме. Применяется некоторая модификация неравенства (3) для получения новых нижних оценок m -членных тригонометрических приближений в L_1 классов MW_∞^r функций многих переменных с ограниченной смешанной производной, а именно:

$$\sigma_m(MW_\infty^r, \mathcal{T})_1 \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-2)}. \quad (4)$$

Неравенство (4) дает новую оценку для малых r . В п. 3 обсуждаются некоторые результаты, относящиеся к $\sigma_m(MW_q^r, \mathcal{T})_p$. Отметим, что правильный порядок величины $\sigma_m(MW_\infty^r, \mathcal{T})_1$ неизвестен.

В п. 4 метод, развитый в п. 3, применяется к наилучшим m -членным приближениям по общей системе $\Psi := \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ вместо тригонометрической системы $\mathcal{T}$:

$$\sigma_m(f, \Psi)_X := \inf_{c_k, j_k, k=1, \dots, m} \left\| f - \sum_{k=1}^m c_k \psi_{j_k} \right\|_X, \quad \sigma_m(F, \Psi)_X := \sup_{f \in F} \sigma_m(f, \Psi)_X.$$

Доказывается, что для хорошей системы Ψ оценка энтропийных чисел

$$\varepsilon_n(F, X) \gg n^{-a}(\log n)^b, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

влечет такую же оценку наилучших m -членных приближений

$$\sigma_m(F, \Psi)_X \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

2. Некоторые общие неравенства для нелинейных колмогоровских поперечников. Сначала докажем неравенство (2).

ТЕОРЕМА 1. Для любого компакта $F \subset X$, произвольного $r > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X(N, m)$ – объединение некоторых N подпространств L , $\dim L = m$. Рассмотрим набор $\mathcal{X}(K, l) := \{X(K^{2^{s+1}}, 2^{s+1})\}_{s=1}^l$ и обозначим

$$\begin{aligned} H^r(\mathcal{X}(K, l)) := & \left\{ f \in X : \exists L_1(f), \dots, L_l(f), L_s(f) \in X(K^{2^{s+1}}, 2^{s+1}), s = 1, \dots, l; \right. \\ & \exists t_1(f), \dots, t_l(f), t_s(f) \in L_s(f), \|t_s(f)\|_X \leq 2^{-r(s-1)}, s = 1, \dots, l; \\ & \left. \left\| f - \sum_{s=1}^l t_s(f) \right\|_X \leq 2^{-rl} \right\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Для $r > 0$ выполнено $\varepsilon_{2^l}(H^r(\mathcal{X}(K, l)), X) \leq C(r, K)2^{-rl}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующей хорошо известной (см. [4]) оценкой энтропийного числа единичного шара B в d -мерном пространстве X :

$$\varepsilon_n(B, X) \leq 3 \cdot 2^{-n/d}. \quad (5)$$

Возьмем произвольную последовательность $\{n_s\}_{s=1}^{l(r)}$, состоящую из $l(r) \leq l$ неотрицательных целых чисел, и построим ε_{n_s} -сети для всех единичных шаров пространств, содержащихся в $X(K^{2^{s+1}}, 2^{s+1})$. Тогда общее число элементов y_j^s в этих ε_{n_s} -сетях не превосходит $M_s := K^{2^{s+1}} 2^{n_s}$. Рассмотрим множество A , состоящее из элементов вида

$$y_{j_1}^1 + 2^{-r} y_{j_2}^2 + \dots + 2^{-r(l(r)-1)} y_{j_{l(r)}}^{l(r)}, \quad j_s = 1, \dots, M_s, \quad s = 1, \dots, l(r).$$

Общее число элементов этого множества не превосходит

$$M = \prod_{s=1}^{l(r)} M_s \leq K^{2^{l(r)+2}} \cdot 2^{n_1 + \dots + n_{l(r)}}.$$

Очевидно, доказательство достаточно провести для больших $l \geq l(r, K)$. Положим $n_s = [(r+1)(l-s)2^{s+1}]$, $s = 1, \dots, l(r)$, и выберем $l(r) \leq l$ как максимальное натуральное число, удовлетворяющее соотношениям

$$\sum_{s=1}^{l(r)} n_s \leq 2^{l-1}, \quad 2^{l(r)+2} \log K \leq 2^{l-1}.$$

Тогда $l(r) \geq l - C(r, K)$ и $M \leq 2^{2^l}$. Для ошибки $\varepsilon(f)$ приближения $f \in H^r(\mathcal{K}(K, l))$ элементами множества A находим

$$\begin{aligned} \varepsilon(f) &\leq 2^{-rl} + \sum_{s=1}^{l(r)} \|t_s(f) - 2^{-r(s-1)} y_{j_s}^s\|_X + \sum_{s=l(r)+1}^l \|t_s(f)\|_X \\ &\leq C(r, K) 2^{-rl} + \sum_{s=1}^{l(r)} 2^{-r(s-1)} \varepsilon_{n_s}(B(L_s(f), X)) \\ &\leq C(r, K) 2^{-rl} + 3 \sum_{s=1}^{l(r)} 2^{-r(s-1)} 2^{-n_s/2^{s+1}} \leq C(r, K) 2^{-rl}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Предположим, что

$$\max_{1 \leq m \leq n} m^r d_{m-1}(F, X, K^m) < \frac{1}{2}.$$

Тогда для $s = 1, \dots, l$, где $l \leq [\log(n-1)]$, имеем $d_{2^s}(F, X, K^{2^s}) < 2^{-rs-1}$, т.е. для каждого $s = 1, \dots, l$ найдется набор $\mathcal{L}_{K^{2^s}}$, состоящий из $K^{2^s} 2^s$ -мерных подпространств L_j^s ,

$j = 1, \dots, K^{2^s}$, такой, что для всякой $f \in F$ существует подпространство $L_{j_s}^s(f)$ и приближающий элемент $a_s(f) \in L_{j_s}^s(f)$ такие, что $\|f - a_s(f)\| \leq 2^{-rs-1}$. Для элементов

$$t_s(f) := a_s(f) - a_{s-1}(f), \quad s = 1, \dots, l, \quad (6)$$

имеем

$$t_s(f) \in L_{j_s}^s(f) \oplus L_{j_{s-1}}^s(f), \quad \dim(L_{j_s}^s(f) \oplus L_{j_{s-1}}^s(f)) \leq 2^s + 2^{s-1} < 2^{s+1}.$$

Пусть $X(K^{2^{s+1}}, 2^{s+1})$ – набор всех $L_{j_s}^s \oplus L_{j_{s-1}}^s$, $1 \leq j_s \leq K^{2^s}$, $1 \leq j_{s-1} \leq K^{2^{s-1}}$. Для $t_s(f)$, определенных в (6), выполнено

$$\|t_s(f)\| \leq 2^{-rs-1} + 2^{-r(s-1)-1} \leq 2^{-r(s-1)}.$$

Далее, для $a_0 \in L^0$ имеем $\|f - a_0\| \leq 1/2$ и из неравенства $d_0(F, X) \leq 1/2$ получаем $\|a_0\| \leq 1$. Выбирая $t_0(f) = a_0(f)$, получаем вложение $F \subset H^r(\mathcal{X}(K, l))$, и из леммы 1 следует требуемая оценка

$$\varepsilon_{2^l}(F) \leq C(r, K)2^{-rl}, \quad 1 \leq l \leq [\log(n-1)].$$

Это неравенство доказывает теорему 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что неравенство (2) сохраняется при замене K^m на несколько большую функцию. Так, справедливо неравенство

$$\max_{1 \leq k \leq n} k^r \varepsilon_k(F, X) \leq C(r, K) \max_{1 \leq m \leq n} m^r d_{m-1}\left(F, X, \left(\frac{Kn}{m}\right)^m\right).$$

Перейдем к случаю ii). Предварительно докажем лемму, из которой вытекает неравенство (3).

ЛЕММА 2. Для любого компакта $F \subset X$ и произвольных действительных чисел $0 < a < b$ выполнено

$$\varepsilon_{bm \log m}(F, X) \leq C(d_0(F, X)m^{a-b} + d_m(F, X, m^{am})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N := [m^{am}]$. Для заданного $\delta > 0$ обозначим через $\mathcal{L}_N$ набор m -мерных подпространств L_j , $j = 1, \dots, N$, такой, что для каждой $f \in F$ существует $j(f) \in [1, N]$ и элемент $g(f) \in L_{j(f)}$ с аппроксимационным свойством

$$\|f - g(f)\| \leq d_m(F, X, m^{am}) + \delta. \quad (7)$$

Тогда

$$\|g(f)\|_X \leq \|f\|_X + \|f - g(f)\|_X \leq d_0(F, X) + d_m(F, X, m^{am}) + \delta =: \alpha.$$

Таким образом, мы должны оценить ε -энтропию объединения U m -мерных шаров радиуса α подпространств L_j по $j \in [1, N]$. В силу (5) имеем $\varepsilon_{n+[\log N]+1}(U, X) \leq 3\alpha \cdot 2^{-n/m}$. Если $(b-a)m \log m < 1$, то утверждение леммы 2 тривиально. Поэтому можно считать, что $(b-a)m \log m \geq 1$. Выберем n так, что $n = [(b-a)m \log m] - 1$. Тогда $n + [\log N] + 1 \leq bm \log m$ и

$$3\alpha \cdot 2^{-n/m} \leq C\alpha m^{a-b}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует утверждение леммы 2.

Легко заметить, что неравенство (3) вытекает из леммы 2. Приведем пример, показывающий, что избавиться от $\log k$ в (3) нельзя.

ПРИМЕР. Пусть $r > 0$ и $a > 0$ заданы. Рассмотрим разбиение $[0, 1]$ на $N = [n^{a+1}/3]$ промежутков

$$I_j := \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

и множество всех n -мерных подпространств вида

$$X_Q := \text{span}\{\chi_{I_j}\}_{j \in Q}, \quad Q \subset \{1, \dots, N\}, \quad \#Q = n,$$

где через χ_I обозначена характеристическая функция промежутка I . Число этих подпространств равно

$$N(n) = \binom{N}{n}, \quad \left(\frac{n^a - 1}{3} \right)^n \leq N(n) \leq n^{an}.$$

Для множества $F_n := \bigcup_Q B_\infty(X_Q) n^{-r}$ имеем $F_n \subset n^{-r} B(L_\infty([0, 1]))$, значит для всех m $d_m(F_n, L_\infty([0, 1])) \leq n^{-r}$. Кроме того,

$$d_n(F_n, L_\infty([0, 1]), n^{an}) \leq d_n(F_n, L_\infty([0, 1]), N(n)) = 0.$$

Отсюда следует, что для любых $s \in \mathbb{N}$ правая часть (3) удовлетворяет неравенству

$$\max_{1 \leq m \leq s} m^r d_m(F_n, L_\infty([0, 1]), m^{am}) \leq 1.$$

Далее рассмотрим множество функций χ_{G_Q} , $G_Q = \bigcup_{j \in Q} I_j$. Для любых $Q \neq Q'$ имеем $\|\chi_{G_Q} - \chi_{G_{Q'}}\|_\infty \geq 1$. Число функций $\{\chi_{G_Q}\}$ равно $N(n)$. Следовательно,

$$\varepsilon_{[\log N(n)]}(F_n, L_\infty([0, 1])) \geq \frac{n^{-r}}{2}.$$

Предположим, что замена $\log k$ в (3) на функцию $\psi(k)$, растущую медленнее, возможна. Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и определим $\mu_n \in \mathbb{N}$ как наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $(a+r)\mu_n \psi(\mu_n) \leq [\log N(n)]$. Тогда из нашего предположения следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{n} = \infty.$$

Значит, для левой части (3) выполнено

$$\max_{1 \leq k \leq \mu_n} k^r \varepsilon_{(a+r)k\psi(k)}(F_n, X) \geq \mu_n^r \varepsilon_{(a+r)\mu_n\psi(\mu_n)}(F_n, X) \geq \frac{(\mu_n/n)^r}{2} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$. Противоречие.

3. Наилучшее m -членное тригонометрическое приближение в норме L_1 .

В этом пункте неравенство (2) и лемма 2 применяются для получения некоторых нижних оценок наилучшего m -членного тригонометрического приближения. Сначала приведем другое доказательство оценки

$$\sigma_m(W_\infty^r, L_1) \gg m^{-r}, \quad r > 0,$$

полученной в [3]. Напомним определение класса W_∞^r в случае функций одной переменной:

$$W_\infty^r := \left\{ f = B_r * \varphi : \|\varphi\|_\infty \leq 1, B_r(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kx - \frac{r\pi}{2}\right) \right\}.$$

Известно, что $\varepsilon_n(W_\infty^r, L_1) \gg n^{-r}$, $r > 0$. Более того, та же оценка известна для пересечения класса W_∞^r и пространства $\mathcal{T}(n)$ тригонометрических полиномов степени n . Используя обозначение $\mathcal{T}(n)_\infty$ для единичного L_∞ -шара в $\mathcal{T}(n)$, запишем эту оценку в виде

$$\varepsilon_n(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1) \gg 1. \quad (9)$$

Она может быть получена из оценки объема множества коэффициентов Фурье полиномов из $\mathcal{T}(n)_\infty$ (см. [5]). Оценки соответствующих объемов в многомерном случае и вывод из них оценок энтропийных чисел содержатся в [6].

Рассмотрим m -членные приближения функций из $\mathcal{T}(n)_\infty$. Используя оператор Валле Пуссена, сведем задачу к случаю приближения гармониками с частотами из интервала $(-2n, 2n)$. Тогда число всевозможных комбинаций из k частот равно

$$N_k := \binom{4n-1}{k} \leq \left(\frac{Kn}{k}\right)^k.$$

Следовательно,

$$\sigma_k(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1) \geq C d_k(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1, N_k). \quad (10)$$

Из соотношения (9) и замечания к теореме 1 следует, что

$$\max_{1 \leq k \leq n} k^r d_k(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1, N_k) \geq C(r)n^r.$$

Используя очевидное неравенство $d_0(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1) \leq 1$, получаем

$$\max_{C(r)n \leq k \leq n} k^r d_k(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1, N_k) \geq C(r)n^r,$$

что вместе с (10) дает оценку $\sigma_{C(r)n}(\mathcal{T}(n)_\infty, L_1) \gg 1$, откуда $\sigma_n(W_\infty^r, L_1) \gg n^{-r}$.

Перейдем к основной части этого пункта – наилучшим m -членным приближениям классов функций многих переменных с ограниченной смешанной производной. Первые результаты в этом направлении, полученные в [7] и относящиеся к случаю приближения классов

$$MW_q^r := \left\{ f = B_r * \varphi : \|\varphi\|_q \leq 1, B_r(x_1, \dots, x_d) := \prod_{i=1}^d B_r(x_i) \right\}$$

в норме L_p при $1 < q \leq p \leq 2$, оказались весьма неожиданными. Известно, что в случае функций одной переменной

$$\sigma_m(W_q^r, L_p) \asymp d_m(W_q^r, L_p), \quad 1 < q \leq p \leq 2,$$

и стандартное подпространство $\mathcal{T}(m)$ тригонометрических полиномов степени m обеспечивает как оптимальное (в смысле порядка приближения) подпространство для колмогоровского $(2m+1)$ -поперечника, так и оптимальный (в смысле порядка приближения) набор гармоник для нелинейного $(2m+1)$ -членного приближения. Выяснилось, что в многомерном случае для аналогичной задачи имеют место соотношения

$$\sigma_m(MW_q^r, L_p)(\log m)^{(d-1)(1/q-1/p)} \asymp d_m(MW_q^r, L_p), \quad 1 < q \leq p \leq 2.$$

Эти соотношения показывают, что вместо приближения элементами любого m -мерного подпространства выгоднее использовать m -членное тригонометрическое приближение.

Некоторые верхние и нижние оценки для приближений классов MW_q^r в равномерной норме получены в [8]. В [9] доказана оценка

$$\sigma_m(MW_q^r)_p \gg m^{-r}(\log m)^{(d-1)r}, \quad 1 < p \leq q < \infty.$$

Комбинируя ее с известными оценками сверху для приближения тригонометрическими полиномами с частотами из гиперболических крестов (см. [10, гл. II, § 2])

$$EQ_n(MW_q^r, L_q) \ll 2^{-rn}, \quad 1 < q < \infty,$$

получим асимптотические оценки

$$\sigma_m(MW_q^r)_p \asymp m^{-r}(\log m)^{(d-1)r}, \quad 1 < p \leq q < \infty.$$

Как упоминалось во введении, основная цель этого пункта – получение новых оценок для $\sigma_m(MW_q^r)_p$ в случае $q = \infty$ и $p = 1$. Для полноты изложения докажем сначала асимптотические оценки в случае $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$.

ТЕОРЕМА 2. Для $r > \max(1/2, 2/q - 1/2)$ и $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$ выполнено

$$\sigma_m(MW_q^r)_p \asymp \begin{cases} m^{-(r-1/q+1/2)}(\log m)^{(d-1)(r-2/q+1)}, & 1 < q \leq 2; \\ m^{-r}(\log m)^{(d-1)r}, & 2 \leq q < \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижние оценки вытекают из известных результатов (см. [10, гл. IV, теорема 2.1])

$$\sigma_m(MW_q^r)_2 \gg m^{-(r-1/q+1/2)}(\log m)^{(d-1)(r-2/q+1)}, \quad 1 < q \leq 2.$$

Докажем верхние оценки. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $1 < q \leq 2$. Мы установим несколько более сильный результат, чем верхние оценки теоремы 2. Именно, норму L_p заменим более сильной нормой $B_{\infty,2}$, определяемой следующим образом. Пусть $f \in L_1$ и

$$\delta_s(f) := \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad \rho(s) := \{k \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] < |k_j| \leq 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}.$$

Тогда

$$\|f\|_{B_{\infty,2}} := \left(\sum_s \|\delta_s(f)\|_{\infty}^2 \right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 3. Для $r > 2/q - 1/2$ имеем

$$\sigma_m(MW_q^r)_{B_{\infty,2}} \ll m^{-(r-1/q+1/2)} (\log m)^{(d-1)(r-2/q+1)}, \quad 1 < q \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f_l := \sum_{\|s\|_1=l} \delta_s(f).$$

Известно (см., например, [10, гл. II, § 2]), что для $f \in MW_q^r$, $1 < q < \infty$, выполнено $\|f_l\|_q \ll 2^{-rl}$. Далее, по лемме 3.1' из [10] для $1 < q \leq 2$ получаем

$$\|f_l\|_q^q \gg \sum_{\|s\|_1=l} \|\delta_s(f)\|_2^q \cdot 2^{l(1/2-1/q)q},$$

откуда

$$\left(\sum_{\|s\|_1=l} \|\delta_s(f)\|_2^q \right)^{1/q} \ll 2^{-l(r+1/2-1/q)}. \quad (11)$$

Возьмем малое $\varkappa > 0$ и определим $m_l := [2^{-(1+\varkappa)(l-n)} l^{d-1}]$, $N_l := [2^{n-\varkappa(l-n)}]$. В силу следствия 5.1 из [3] для $\|s\|_1 = l$ имеем

$$\sigma_{N_l}(\delta_s(f))_{\infty} \ll \left(\frac{2^l}{N_l} \right)^{1/2} \log \frac{2^l}{N_l} \cdot \|\delta_s(f)\|_2. \quad (12)$$

Обозначим через $D(f, l)$ множество, состоящее из m_l индексов s , $\|s\|_1 = l$, для которых $\|\delta_s(f)\|_2$ принимает наибольшие значения. В силу леммы 2.1 из [10, гл. IV] и соотношения (11)

$$\left(\sum_{s \notin D(f, l)} \|\delta_s(f)\|_2^2 \right)^{1/2} \ll m_l^{1/2-1/q} \cdot 2^{-l(r+1/2-1/q)}. \quad (13)$$

Положим

$$\nu(l) := \#\{s : \|s\|_1 = l\}, \quad m := \sum_{l \geq n} (m_l 2^l + N_l \nu(l)) + \# \left(\bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s) \right).$$

Оценки (12) и (13) дают (в случае, когда N_l или m_l обращаются в нуль, заменяем их на единицу)

$$\begin{aligned} \sigma_{m_l 2^l + N_l \nu(l)}(f_l)_{B_{\infty,2}} &\ll \left(\sum_{s \notin D(f, l)} \|\delta_s(f)\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\frac{2^l}{N_l} \right)^{1/2} \log \frac{2^l}{N_l} \\ &\ll m_l^{1/2-1/q} \left(\frac{2^l}{N_l} \right)^{1/2} \log \frac{2^l}{N_l} \cdot 2^{-l(r+1/2-1/q)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_m(f)_{B_{\infty,2}} \leq \sum_{l \geq n} \sigma_{m_l 2^l + N_l \nu(l)}(f_l)_{B_{\infty,2}} \ll n^{(d-1)(1/2-1/q)} \cdot 2^{-n(r+1/2-1/q)}.$$

Остается отметить, что $m \ll n^{d-1} 2^n$.

Перейдем теперь к случаю $q = \infty, p = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Для $r > 0$ имеем

$$\sigma_m(MW_\infty^r)_1 \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [11] (см. также [9] и [12]) установлено, что

$$\varepsilon_m(MW_\infty^r)_1 \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}.$$

В работе [9] для каждого $k \in \mathbb{N}$ были построены число $n(k) \in \mathbb{N}$ такое, что $k \asymp 2^{n(k)} \times n(k)^{d-1}$, и множество U_k^r со следующими свойствами:

$$U_k^r \subset MW_\infty^r, \quad (14)$$

$$\varepsilon_k(U_k^r, L_1) \gg k^{-r}(\log k)^{r(d-1)}. \quad (15)$$

Из доказательств в [9] и [11] следует, что, модифицируя множество U_k^r (сворачивая его функции с соответствующим ядром Валле Пуссена), можно в дополнение к свойствам (14) и (15) добиться еще одного:

$$U_k^r \subset \mathcal{T}(2^{n(k)+1}), \quad (16)$$

согласно которому все элементы U_k^r являются тригонометрическими полиномами степени $2^{n(k)+1}$ по каждой переменной. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и определим $k := [bm \log m]$, где число $b > 0$ будет выбрано в дальнейшем. Рассмотрим множество U_k^r со свойствами (14)–(16). Используя оператор Валле Пуссена, подобно доказательству соотношения (9) мы ограничимся лишь частотами из интервала $(-2^{n(k)+2}, 2^{n(k)+2})^d$. Тогда число всевозможных комбинаций из m частот равно

$$N(m) := \binom{(2^{n(k)+3} - 1)^d}{m} \leq (C(d)m)^{dm}, \quad d \geq 2.$$

Воспользуемся леммой 2 и неравенством

$$\sigma_m(U_k^r)_1 \geq Cd_m(U_k^r, L_1, N(m)).$$

Согласно свойству (14) получим $d_0(U_k^r, L_1) \ll 1$ и в силу (15) и леммы 2

$$d_m(U_k^r, L_1, N(m)) \geq C^{-1} \varepsilon_{bm \log m}(U_k^r, L_1) - d_0(U_k^r, L_1) m^{a-b} \gg m^{-r}(\log m)^{r(d-2)}$$

для выбранных надлежащим образом a и b .

4. Одна оценка для общих m -членных приближений. В этом пункте воспользуемся замечанием к теореме 1 для доказательства нижней оценки наилучших m -членных приближений по системе $\Psi := \{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию:

(VP) существуют положительные постоянные A_1, A_2, A_3 и последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_{k+1} \leq A_1 n_k$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что найдется последовательность операторов V_k типа Валле Пуссена со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} V_k(\psi_j) &= \lambda_{k,j} \psi_j, \quad \lambda_{k,j} = \begin{cases} 1, & j = 1, \dots, n_k, \\ 0, & j > A_2 n_k, \end{cases} \\ \|V_k\|_{X \rightarrow X} &\leq A_3, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что для некоторых $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\varepsilon_m(F, X) \geq C_1 m^{-a} (\log m)^b, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда если система Ψ удовлетворяет условию (VP), а также условию

$$E_n(F, \Psi) := \sup_{f \in F} \inf_{c_1, \dots, c_n} \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j \psi_j \right\|_X \leq C_2 n^{-a} (\log n)^b, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то $\sigma_m(F, \Psi)_X \gg m^{-a} (\log m)^b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем m и выберем константу C_4 так, что для всех n

$$E_{C_4 n}(F, \Psi) \leq \frac{\varepsilon_n(F, X)}{2(A_3 + 1)}. \quad (18)$$

Пусть $k(m)$ таково, что $n_{k(m)} \geq C_4 m$ и $n_{k(m)-1} < C_4 m$. Тогда $n_{k(m)} \leq A_1 C_4 m$. Согласно (17) выполнено $\sigma_n(V_k(f), \Psi) \leq A_3 \sigma_n(f, \Psi)$ и, следовательно, требуемую оценку достаточно доказать для множества $F_m := V_{k(m)}(F)$ вместо F . Из (17), (18) находим

$$\varepsilon_m(F_m, X) \geq \varepsilon_m(F, X) - \|I - V_{k(m)}\|_{X \rightarrow X} \cdot E_{C_4 m}(F, \Psi) \geq \frac{\varepsilon_m(F, X)}{2}.$$

Положим

$$\sigma_n(f, \Psi_N)_X := \inf_{\Lambda, \{c_j\}} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda} c_j \psi_j \right\|,$$

где Λ – подмножество $[1, N]$, состоящее из n чисел. Используя свойство (VP) системы Ψ , для F_m получаем

$$\sigma_l(F_m, \Psi_{A_2 n_{k(m)}})_X \leq A_3 \sigma_l(F_m, \Psi)_X. \quad (19)$$

Определим $N := [A_2 n_{k(m)}]$ и $K := [A_2 A_1 C_4] + 1$. Тогда общее число l -мерных подпространств пространства $\text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ не больше

$$\binom{Km}{l} \leq \left(\frac{eKm}{l} \right)^l.$$

Следовательно, для каждого l имеем

$$\sigma_l(F_m, \Psi_N)_X \geq d_l \left(F_m, X, \left(\frac{eKm}{l} \right)^l \right). \quad (20)$$

Далее, из (17) получаем $d_l(F_m, X) \leq A_3 E_l(F, \Psi)$. Используя последнее неравенство и замечание к теореме 1 для $r = a + 1$ находим, что для некоторой постоянной C_5

$$\max_{C_5 m \leq l \leq m} l^r d_l \left(F_m, X, \left(\frac{eKm}{l} \right)^l \right) \gg m (\log m)^b,$$

что вместе с (20) дает оценку

$$\sigma_{C_5 m}(F_m, \Psi_N)_X \gg m^{-a} (\log m)^b.$$

Для завершения доказательства теоремы 4 остается воспользоваться неравенством (19).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lorentz G. G. Metric entropy and approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 903–937.
- [2] Carl B. Entropy numbers, s -numbers, and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. 1981. V. 41. P. 290–306.
- [3] DeVore R. A., Temlyakov V. N. Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. 1995. V. 2. № 1. P. 29–48.
- [4] Pisier G. The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry. Cambridge Tracts in Math. V. 94: Cambridge Univ. Press, 1989.
- [5] Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.
- [6] Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
- [7] Темляков В. Н. О приближении периодических функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. С. 301–305.
- [8] Belinskii E. S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε -entropy // Anal. Math. 1989. V. 15. № 2. P. 67–74.
- [9] Кашин Б. С., Темляков В. Н. О наилучших m -членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 5. С. 57–86.
- [10] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. Тр. МИАН. Т. 178. М.: Наука, 1986.
- [11] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об оценке асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 6. С. 922–925.
- [12] Белинский Э. С. Асимптотические характеристики классов функций с ограничениями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих действительных переменных. Ярославль: ЯГУ, 1990. С. 22–37.

University of South Carolina, Columbia
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: temlyak@math.sc.edu

Поступило
06.08.97