Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Фёдоров, О некоторых расслоениях на коники, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 903–910

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:43:38

УДК 512.776

О НЕКОТОРЫХ РАССЛОЕНИЯХ НА КОНИКИ

И. Ю. Фёдоров

Описана реализация антиканонической КЗ поверхности особой связки коник, обобщающая известную теорему Шокурова.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть X – проективное трехмерное многообразие. Тогда если $\kappa(X) = -\infty$, то X бирационально эквивалентно $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенному пространству, т.е. многообразию X' с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, имеющему проективный морфизм $p: X' \rightarrow Y$ на нормальное проективное многообразие Y , $\rho(X/Y) = 1$, со связными слоями такой, что $-K_X$ является p -обильным дивизором и $\dim Y \leq 2$ (см. [1]).

В гладком случае классификацию многообразий с $-K_X$ обильным, удовлетворяющих условию $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$, осуществил В. А. Исковских (см. [2]), используя следующий результат В. В. Шокурова.

ТЕОРЕМА [3]. Пусть X – неособое многообразие Фано индекса Фано $r \geq 1$ и $H \in \text{Pic } X$ – дивизор такой, что $-K_X = rH$. Тогда в линейной системе $|\mathcal{O}_X(H)|$ существует гладкая поверхность.

Позднее М. Рид высказал знаменитую гипотезу о слоне, имеющую важное значение в современной бирациональной геометрии.

ГИПОТЕЗА О СЛОНЕ. Пусть X – нормальное трехмерное многообразие с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $p: X \rightarrow S$ – проективный морфизм, $p_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ и дивизор $-K_X$ является p -обильным. Тогда общий элемент линейной системы $|-K_X + p^*(A)|$, где A – достаточно обильный дивизор Картье на S , имеет лишь дювалевские особенности (так называемый дювалевский слон).

В своей работе [1] Рид доказал обобщение теоремы Шокурова на случай многообразия X , имеющего канонические особенности, $-K_X \equiv Q$, где Q – дивизор Картье. В [4] Ю. Г. Прохоров обобщил теорему из [5] на лог-терминальный случай. В настоящей работе исследуется существование *хорошего слона*, т.е. слона с лог-терминальными особенностями, на $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенных пространствах – расслоениях на коники.

Всюду далее X – трехмерное расслоение на коники с лог-терминальными особенностями, $p: X \rightarrow S$ – проективный морфизм на нормальную поверхность S , A – достаточно обильный дивизор на S , $H = p^*A - Q$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00820, и фонда INTAS, грант № 93-2805.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $-K_X \equiv Q$, где Q – дивизор Картье. Тогда линейная система $|H| = |p^*A - Q|$ содержит приведенный неприводимый дивизор лишь с лог-терминальными особенностями.

Теорема 1 будет доказана в п. 3. В п. 2 приведены примеры таких многообразий.

2. Примеры. В дальнейшем считаем, что все многообразия определены над $\mathbb{C}$. Необходимые определения содержатся в [6]–[8].

Построение лог-терминальных расслоений на коники будем производить локально. Рассмотрим фактор Y/G , $Y = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$, по группе G , действующей по правилу $x \mapsto e^a x$, $y \mapsto e^b y$ и $z \mapsto -z$ в соответствующей карте на $\mathbb{P}^1$. Порядок группы G равен $2p$, где $p > 3$ – простое число, a, b – взаимно простые числа, не делящиеся на p . Тогда X имеет только лог-терминальные особенности (см. [6, утверждение 6.7]). Докажем, что $K_X \equiv Q$ где Q – дивизор Картье. Для этого необходимо построить инвариантную дифференциальную форму. При $a + b \equiv p \pmod{2p}$ такой инвариантной формой будет $dx \wedge dy \wedge dz$, так как ее вес $\text{wt}(dx \wedge dy \wedge dz) = a + b - p$ равен 0. В другой карте эта форма записывается, как $z^{-2}dx \wedge dy \wedge dz$, и ее вес равен $2p$. Отметим, что $K_X \cdot Z = -1$, где Z – цикл над $0 \in \mathbb{C}^2$.

3. Существование хорошего дивизора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для достаточно больших A система $|H|$ непуста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем обильный дивизор W на поверхности S и положим $A = lW$, где $l \gg 0$. По теореме Римана–Роха

$$\chi(\mathcal{O}_X(H)) = \frac{3}{4}l^2(p^*W)^2 \cdot (-K_X) + \dots > 0.$$

По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль (см. [7, теорема 1-2-5]) $h^j(\mathcal{O}(H)) = 0$ для $i > 0, l \gg 0$. Следовательно, $h^0(\mathcal{O}_X(H)) > 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если $B_S|H| = \emptyset$, то по теореме Бертини и формуле присоединения общий дивизор из системы $|H|$ имеет лишь лог-терминальные особенности (см., например, [6, лемма 6.6]). Таким образом, мы можем считать, что $B_S|H| \neq \emptyset$.

Воспользуемся конструкцией Каваматы, согласно которой существуют разрешение $f: Y \rightarrow X$ и дивизор $\sum E_i$ на Y с простыми нормальными пересечениями такие, что

- i) $K_Y \equiv f^*K_X + \sum a_i E_i$, где $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_i > -1$ и $a_i \neq 0$ только в случае $f_*E_i = 0$;
- ii) $f^*|H| = |L| + \sum r_i E_i$, где $|L|$ — свободная линейная система на Y , $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_i \geq 0$ и $r_i > 0$ по крайней мере для одного индекса i ;
- iii) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $p_i, q \in \mathbb{Q}$, $0 < p_i \ll q \ll \varepsilon$, такие, что $\mathbb{Q}$ -дивизор $qf^*H - \sum p_i E_i$ обилен;
- iv) f является 0-минимальным разрешением в смысле [5, теоремы 4.1–4.3], т.е. f индуцирует минимальное хорошее разрешение на общем гиперплоском сечении $X' \subset X$ и $|H'| := |H|_{X'}$.

ЗАМЕЧАНИЕ (ср. с [5, теорема 4.2]). Согласно iv) имеем следующее:

- 1) если $\dim f(E_i) \neq 0$, то $r_i \geq a_i$;
- 2) если $\dim f(E_i) \neq 0$, то $r_i > a_i$ за исключением случаев
 - а) $\dim f(E_i) = 1$, многообразие X неособо в общей точке $f(E_i)$, f – раздутие $f(E_i)$ и $r_i = a_i = 1$,

- б) $\dim f(E_i) = 1$, X имеет лишь cDV-особенность в общей точке $f(E_i)$, $f(E_i) \notin B_S|H|$ и $r_i = a_i = 0$.

ЛЕММА 1. Следующие два условия эквивалентны:

- 1) $a_i + 1 > r_i$ для всех i ;
- 2) общий дивизор линейной системы $|H|$ есть нормальная поверхность с лог-терминальными особенностями.

Доказательство вытекает из приведенной конструкции.

Положим $c = \min\{(a_i + 1 - p_i)/r_i \mid r_i \neq 0\}$. Тогда $c \leq 1 - p_i/r_i < 1$. Слегка изменяя p_i , можно считать, что минимум достигается только для одного индекса, скажем для $i = 0$. Обозначим соответствующий дивизор через $E := E_0$. Для $t \in \mathbb{Z}$ рассмотрим следующий $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии Y :

$$\begin{aligned} N &= N(t) = tf^*H + \sum (-cr_i + a_i - p_i)E_i - K_Y \\ &\equiv cL + f^*(t - c + 1)H - \sum p_iE_i - f^*p^*A \equiv (t - c)f^*H - f^*K_X + cL - \sum p_iE_i. \end{aligned}$$

Дивизор $N(t)$ обилен при $t \geq 1$, $(p \circ f)$ -обилен при $t - c + 1 \geq q > 0$, и его дробная часть содержится в $\sum E_i$. Для верхней целой части N имеем $\lceil N \rceil = tf^*H - K_Y + B - E$, где B — эффективный дивизор, состоящий из компонент E_i , исключительных для f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $t \geq c + q - 1$, $t \neq 0$, $i > 0$, то

- 1) $H^i(E, \mathcal{O}_E(tf^*H + B)) = 0$;
- 2) $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(tf^*H + B - E)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Каваматы–Фивега следует, что

$$0 = R^i(fp)_*(tf^*H + B - E) = H^i(Y, \mathcal{O}_Y(tf^*H + B - E + f^*p^*L'))$$

где L' — достаточно обильный дивизор на S . Согласно выбору дивизора A это доказывает утверждение 2).

Утверждение 1) является очевидным следствием утверждения 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Если $c \leq 2 - q$, то $h^0(\mathcal{O}_E(f^*H + B)) = 0$.

2) Если $c \leq 1 - q$, то $h^0(\mathcal{O}_E(B)) \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из предложения 2 и точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(f^*H + B - E) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(f^*H + B) \longrightarrow \mathcal{O}_E(f^*H + B) \longrightarrow 0.$$

Так как E не лежит в носителе B , получаем утверждение 2).

Следуя работам [5], [9], [4], докажем теорему 1, предполагая, что $a_i + 1 \leq r_i$ для некоторого i . Это приведет нас к противоречию с тем, что $h^0(\mathcal{O}_E(f^*H + B)) = 0$.

ЛЕММА 2. Если $f(E)$ — точка, то $c > 2 - q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $c \leq 2 - q$. Поскольку $f(E)$ – точка, имеем

$$\chi(\mathcal{O}_E(tf^*H + B)) = \chi(\mathcal{O}_E(B)),$$

и согласно предложению 3 $\chi(\mathcal{O}_E(B)) = h^0(\mathcal{O}_E(tf^*H + B))$ при $t \geq 1$. Таким образом, $h^0(\mathcal{O}_Y(tf^*H)) > 0$ при $t \gg 0$, откуда $\chi(\mathcal{O}_E(B)) > 0$. Последнее противоречит утверждению 1) предложения 3, согласно которому $\chi(\mathcal{O}_E(B)) = 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f(E)$ – точка, то $a_i + 1 \geq 2r_i$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2

$$\frac{a_i + 1 - p_i}{r_i} \geq c > 2 - q, \quad a_i + 1 \geq 2r_i - qr_i + p_i > 2r_i - \varepsilon.$$

Выбирая ε достаточно малым, получим $a_i + 1 \geq 2r_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Выполнено $c > 1 - q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана–Роха

$$\begin{aligned} \chi(t) := \chi(\mathcal{O}_E(tf^*H + B)) &= \frac{1}{2}(f^*H)^2 \cdot Et^2 + \frac{1}{2}(2B \cdot f^*H \cdot E - (f^*H|_E) \cdot K_E)t \\ &\quad + (B|_E) \cdot (B|_E - K_E) + \chi(\mathcal{O}_E). \end{aligned}$$

Предположим, что $c \leq 1 - q$. Тогда согласно предложениям 2 и 3 имеем $\chi(1) = 0$, $\chi(0) > 0$, $\chi(t) = h^0(\mathcal{O}_E(tf^*H + B))$ при $t \geq 0$. Следовательно,

$$0 > \chi(1) - \chi(0) = \frac{1}{2}(f^*H)^2 \cdot E + \frac{1}{2}(2B \cdot f^*H \cdot E - (f^*H|_E) \cdot K_E),$$

откуда

$$0 > f^*H \cdot B \cdot E + f^*H|_E \cdot ((f^*H + B - E - K_Y)|_E). \quad (1)$$

Слагаемое $f^*H \cdot B \cdot E$ в правой части (1) неотрицательно. Покажем, что

$$(f^*H|_E) \cdot ((f^*H + B - E - K_Y)|_E) \geq 0.$$

Имеем

$$(f^*H + B - E - K_Y)|_E = [N(1)|_E] = N(1)|_E + ([N(1)|_E] - N(1)|_E).$$

Так как $N(1)$ обилен и $[N(1)] - N(1)$ эффективен, правая часть последнего равенства неотрицательна. Следовательно, неотрицательной является и правая часть (1). Полученное противоречие доказывает предложение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $a_i + 1 \geq r_i$ для всех i ;
- 2) общий дивизор линейной системы $|H|$ приведен;
- 3) если $a_i + 1 \leq r_i$ для некоторого i , то $a_i + 1 = r_i$ и $a_0 + 1 = r_0$;
- 4) если общий дивизор системы $|H|$ имеет особенность вдоль кривой Z , то многообразие X неособо в общей точке Z .

ТЕОРЕМА 2. Если $a_0 + 1 = r_0$, то $\dim f(E) \neq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim f(E) = 2$. Тогда $a_0 = 0$, $r_0 = 1$. По формуле присоединения и лемме 2 имеем

$$K_E = (K_Y + E)|_E \equiv \left(-L + \sum_{i \neq 0} (a_i - r_i) E_i + f^* p^* A \right) \Big|_E,$$

где $a_i - r_i > 0$, если только $f(E)$ – точка, и, следовательно, $a_i - r_i > -1$ для любого i . Таким образом, существует разложение $K_E \equiv f^* p^* A|_E + R - G$, где R, G – эффективные $\mathbb{Q}$ -дивизоры на E , $f_* R = 0$ и $G = \sum \gamma_i G_i$, $\gamma_i \leq 1$. Бирациональный морфизм $f: E \rightarrow f(E)$ пропускается через минимальное разрешение $f: E \xrightarrow{\sigma} Z \xrightarrow{\mu} f(E)$. Поэтому $K_Z = \sigma_* K_E \equiv \sigma_* f^* p^* A + \sigma_* R - \sigma_* G$. Поскольку K_Z μ -численно эффективен и $\mu_* \sigma_* R = 0$, имеем $\sigma_* R = 0$. Положим $M := \mu^*(H|_{f(E)})$. Используя $H^0(\mathcal{O}_Z(-M)) = H^1(\mathcal{O}_Z(-M)) = 0$ (по теореме Рамануджана об обращении в нуль) и теорему Римана–Роха, получим

$$h^0(\mathcal{O}_Z(K_Z + M)) = \frac{1}{2} M(M + K_Z) + \chi(\mathcal{O}_Z).$$

С другой стороны,

$$h^0(\mathcal{O}_Z(M)) + h^0(\mathcal{O}_Z(K_Z - M)) \geq \frac{1}{2} M(M - K_Z) + \chi(\mathcal{O}_Z).$$

Следовательно, $h^0(\mathcal{O}_Z(K_Z - M)) = 0$, так как $K_E - f^* H|_E = (K_Y - f^* H + R)|_E$ и $K_Y - f^* H + E$ неэффективен ($K_Z - M$ со слоями $f \circ p$ пересекается отрицательно и не содержит E). Кроме того, $h^0(\mathcal{O}_Z(M)) = 0$, поскольку $h^0(\mathcal{O}_E(f^* H)) = 0$. Окончательно, получаем

$$0 \geq \frac{1}{2} M(M - K_Z) + \chi(\mathcal{O}_Z).$$

Докажем, что

$$f^* p^* A|_E = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим три случая:

- а) $\dim pf(E) = 0$;
- б) $\dim pf(E) = 2$;
- в) $\dim pf(E) = 1$.

В случае а) равенство (2) очевидно.

В случае б) $f^* p^* A|_E$ численно эффективен и объемён,

$$h^0(\mathcal{O}_E(f^* H)) = h^0(\mathcal{O}_E(f^* p^* A - f^* K_X)) > 0,$$

что противоречит предложению 3.

В случае в) $Z \rightarrow C$ – линейчатая поверхность (слои-конки), где C – нормализация $f(E)$, а $\sigma_*(f^* p^* A)|_Z$ – поднятие нескольких слоев. Соотношение (2) вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Если $g: Z \rightarrow C$ – гладкая линейчатая поверхность, L – дивизор на ней, пересекающийся со всеми слоями положительно, T – дивизор на C , $T \gg 0$. Тогда $h^0(\mathcal{O}(L + g^*T)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана–Роха

$$\chi(\mathcal{O}_Z(L + g^*T)) = \frac{1}{2}(L^2 + 2L \cdot f^*T - K_Z \cdot L - K_Z \cdot g^*T) + \chi(\mathcal{O}_Z).$$

Величины L^2 , $K_Z \cdot L$ и $\chi(\mathcal{O}_Z)$ в правой части последнего равенства постоянны. Остальные слагаемые растут вместе с ростом T . Поэтому для достаточно больших T имеем $h^i(\mathcal{O}_Z(L + g^*T)) = 0$ при $i > 0$. Следовательно, $h^0(\mathcal{O}_Z(L + g^*T)) > 0$.

Мы получили, что $K_Z \equiv -\sigma_G = -D$, где $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$. Рассмотрим два случая:

- а) $D = 0$, $K_Z \equiv 0$;
- б) $D > 0$, Z – бирационально линейчатая поверхность над кривой C рода $g(C) = q(Z) = 1 - \chi(\mathcal{O}_Z) \geq 2$.

В случае а) Z – минимальная поверхность с кодаировой размерностью $\kappa(Z) = 0$ и в соответствии с классификацией алгебраических поверхностей $\chi(\mathcal{O}_Z) \geq 0$, что противоречиво.

В случае б) имеем

$$0 \leq h^0(\mathcal{O}_Z(K_Z + M)) \leq \frac{1}{2}MK_Z = -\frac{1}{2}MD \leq 0,$$

откуда $M \cdot K_Z = M \cdot D = 0$, т.е. $M \cdot D_i = 0$ для любого i . Поэтому дивизор D стягивается морфизмом μ . Следовательно, $(D_i)^2 < 0$ и

$$2p_a(D_i) - 2 = (K_Z + D_i) \cdot D_i = (-D + D_i) \cdot D_i = (1 - d_i)(D_i)^2 - \sum_{j \neq i} d_j D_j \cdot D_i \leq 0,$$

откуда $p_a(D_i) \leq 1$. Таким образом, все компоненты D содержатся в слоях морфизма $Z \rightarrow C$, и если F – общий слой этого морфизма, то $D \cdot F = 0$. С другой стороны, $F \simeq \mathbb{P}^1$, $F^2 = 0$ и $K_Z \cdot F = -D \cdot F = -2$. Противоречие.

ТЕОРЕМА 3. Если $a_0 + 1 = r_0$, то $\dim f(E) \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(E)$ с приведенной структурой через Z , т.е. Z – приведенная неприводимая кривая. Общий дивизор системы $|H|$ имеет особенность вдоль Z и согласно утверждению 4) следствия 2 многообразие X неособо в общей точке Z . Поэтому E получается как исключительный дивизор раздутья (в общей точке) некоторой кривой над Z . Нам понадобится

ЛЕММА 4. Если $a_0 + 1 = r_0$, то $g(Z) \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu: Z' \rightarrow Z$ – нормализация Z и $\varphi: E \rightarrow Z'$ – соответствующий морфизм со связными слоями. Положим $D = \nu^*(H|_Z)$. Тогда $f^*H|_E = \varphi^*D$ и $\deg D > 0$. Предположим, что $g(Z') \leq 1$. Так как $h^0(\mathcal{O}_E(f^*H)) = 0$, имеем $h^0(\mathcal{O}_{Z'}(\varphi^*D)) = 0$. Это противоречит теореме Римана–Роха, примененной к кривой Z' .

Таким образом, $g(Z) \geq 2$, что противоречит следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $H \in |H|$ – общий дивизор. Предположим, что поверхность H особа вдоль кривой Z . Тогда $g(Z) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{H}$ – собственный прообраз общего дивизора системы $|H|$. Тогда

$$\tilde{H} = L + \sum_{\dim f(E_i)=2} r_i E_i.$$

Так как $Z \subset H$, существуют неприводимые компоненты $E_j \subset f^{-1}(Z)$ и $F \subset \tilde{H}$ такие, что $f(E_j \cap F) = Z$. Согласно пункту 1) замечания имеем $a_j \leq r_j$. Но из утверждения 4) следствия 2 вытекает, что X неособо в общей точке Z . Поэтому $a_j \in \mathbb{Z}$ и $a_j + 1 = r_j$.

Из формулы присоединения и леммы 2 получаем

$$K_F = (K_Y + F)|_F \equiv \left(-L + \sum_i (a_i - r_i) E_i + F + f^* p^* A \right) \Big|_F.$$

Рассмотрим три случая:

- а) $F = E_k$ для некоторого k , $f(F)$ – неподвижная компонента $|H|$;
- б) $|L|$ составлена не из пучка и $F = L$;
- в) $|L|$ составлена из пучка и F – компонента L .

В случае а) $a_k = 0, r_k = 1$ и $K_F \equiv (-L + \sum_{i \neq k} (a_i - r_i) E_i + f^* p^* A)|_F$.

В случае б) $K_F \equiv \sum (a_i - r_i) E_i + f^* p^* A|_F$.

В случае в) $L^2 \equiv 0, l \cdot F \equiv 0, K_F \equiv \sum (a_i - r_i) E_i + f^* p^* A|_F$.

Таким образом, в каждом случае, как и при доказательстве теоремы 2, имеем численное разложение $K_F \equiv f^* p^* A + R - G$, где R, G – эффективные $\mathbb{Q}$ -дивизоры на F , $R = \sum \alpha_i R_i, G = \sum \beta_i G_i, \alpha_i \geq 0, 0 \leq \beta_i \leq 1$. Более того, из замечания следует, что если $f(E_i)$ не является точкой, то $a_i - r_i \leq 0$, откуда $f_* R = 0$. Морфизм $f: F \rightarrow f(F)$ разлагается также в композицию $f: F \xrightarrow{\sigma} V \xrightarrow{\mu} f(F)$, где $\mu: V \rightarrow f(F)$ – минимальное разрешение нормализации $f(F)$. Поэтому канонический дивизор V задается формулой $K_V = \sigma_* K_F \equiv \sigma_*(f^* p^* A|_F + \sigma_* R - \sigma_* G)$. Так как K_V является μ -численно эффективным дивизором, выполнено $\sigma_* R = 0$. Окончательно, $K_V \equiv \sigma_*(f^* p^* A|_F - D)$, где $D = \sum \beta_i D_i, 0 \leq \beta_i \leq 1$. Для завершения доказательства предложения 5 нам понадобится

ЛЕММА 5. $p^*(A) \cdot Z \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $p^*(A) \cdot Z > 0$. Тогда согласно лемме 3 можно выбрать $A \gg 0$ так, чтобы $h^0(\mathcal{O}_E(f^* H|_E)) > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Из леммы 5 для $D_j = \sigma(G_j)$ находим, что

$$2p_a(D_j) - 2 = D_j \cdot (D_j + K_V) = D_j \cdot (D_j - D) \leq 0.$$

Поскольку $\mu(D_j) = f(E_j \cap F) = Z$, имеем $g(Z) \leq p_a(D_j) \leq 1$. Предложение 5 доказано.

Автор выражает глубокую признательность В.А. Исковских, Ю.Г. Прохорову и И.А. Чельцову за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
- [2] Исковских В. А. Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям: Многообразия Фано. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [3] Шокуров В. В. Гладкость общего антиканонического дивизора на многообразиях Фано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. С. 430–441.
- [4] Прохоров Ю. Г. О трехмерных многообразиях с гиперплоскими сечениями – поверхностями Энриквеса // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 9. С. 113–124.
- [5] Reid M. Projective Morphism According to Kawamata. Preprint. Warwick, 1983.
- [6] Клеменс Х., Коллар Я., Мори С. Многомерная комплексная геометрия. М.: Мир, 1993.
- [7] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Algebraic Geometry. Proc. Symp., Sendai, 1985. Adv. Stud. Pure Math. V. 10. Tokyo: Kinokuniya, 1987. P. 283–360.
- [8] Alexeev V. General elephants of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Compositio Math. 1994. V. 91. № 1. P. 91–116.
- [9] Alexeev V. A. Theorems about good divisors on log Fano varieties (case of index $r > n - 2$) // Algebraic Geometry. Proc. US–USSR Symp., 1989. Lecture Notes in Math. V. 1479. Chicago (I.L.): Springer, 1991. P. 1–9.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ifedorov@orc.ru

Поступило
04.04.97