Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Финогенов, О конечных p -группах с циклическим коммутантом и циклическим центром, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 911–922

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:23:11

УДК 512.542.3

О КОНЕЧНЫХ p -ГРУППАХ С ЦИКЛИЧЕСКИМ КОММУТАНТОМ И ЦИКЛИЧЕСКИМ ЦЕНТРОМ

А. А. Финогенов

В работе описаны с точностью до изоморфизма конечные p -группы G с циклическим коммутантом, циклическим центром и дополнительным ограничением: $[G', G] \leq G'^4$ при $p = 2$.

Библиография: 6 названий.

Работа посвящена описанию с точностью до изоморфизма конечных p -групп G с циклическим коммутантом, циклическим центром и дополнительным условием при $p = 2$: $[G', G] \leq G'^4$. Эти группы представимы в виде центрального произведения 2-порожденной группы одного из тринадцати типов, перечисленных в лемме 11, с группой класса 2 (теорема 1). В теореме 2 приведены необходимые и достаточные условия изоморфизма таких групп.

Выбор именно этого класса групп объясняется тем, что, с одной стороны, описание более широкого класса конечных p -групп – с циклическим коммутантом (и даже p -групп класса 2 с коммутантом порядка p^2) – сводится к сложной матричной задаче [1]. С другой стороны, более узкий класс групп – конечных p -групп класса 2 с циклическим центром – описан с точностью до изоморфизма Леонгом [2], [3] в 1974 и 1978 годах. Описание с точностью до изоморфизма 2-групп G с условием $[G', G] \not\leq G'^4$ неизвестно, и вероятно оно окажется слишком громоздким [4].

В работе использованы стандартные обозначения [5].

Пусть G – p -группа с циклическим коммутантом, a, b – элементы из G . При $p = 2$ потребуем дополнительно $[G', G] \leq G'^4$.

ЛЕММА 1 [4, лемма 1]. $|[b, a]| = |[b, a^p]| \cdot p = |[b^p, a]| \cdot p$.

ЛЕММА 2 [4, лемма 2]. Если a, b, c – элементы G такие, что $|[a, b]| \geq |[b, c]|$, то $[b, a^\alpha c] = 1$ для некоторого натурального α .

ЛЕММА 3 [4, предложение 2]. Если $\langle b, a \rangle' = G'$, то $G = \langle a, b \rangle * C_G(\langle a, b \rangle)$.

ЛЕММА 4. Если $p = 2$, то $(ab)^{2^k} = a^{2^k} b^{2^k} [b, a]^{2^{k-1}} c$, где $c \in \langle [b, a]^{2^k} \rangle$.

ЛЕММА 5. Пусть $|a| \leq p^s$, $|b| \leq p^s$ и, кроме того, $|[a, b]| < p^s$ при $p = 2$. Тогда $|ab| \leq p^s$.

ЛЕММА 6. Пусть $p = 2$, $|a| = p^s$, $|b| = p^s$ и $|[a, b]| = p^s$. Тогда $|ab| = p^{s+1}$.

ЛЕММА 7. Пусть $p = 2$, $|a| = p^{s+1}$, $|b| = p^s$ и $|[a, b]| = p^s$. Тогда $|ab| = p^s$.

ЛЕММА 8. Пусть $|a| \geq |b|$, $b^{p^k} \in \langle a \rangle$, но $b^{p^{k-1}} \notin \langle a \rangle$. Кроме того, пусть при $p = 2$ $|a| > p^{k+1}$. Тогда $\langle a \rangle \cap \langle a^\alpha b \rangle = 1$ и $|a^\alpha b| = p^k$ для подходящего целого α .

ЛЕММА 9 [4, лемма 3]. Если G – 2-порожденная p -группа класса не выше 2 и $|G' : \gamma_3(G)| = p^k$, то в p -группе G найдутся элементы a, b и c такие, что $G = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle$, $[a, b] = b^{p^k} c$, $[a, c] = [b, c] = 1$.

ЛЕММА 10 [2]. Существует в точности четыре типа конечных 2-порожденных p -групп класса не выше 2 с циклическим центром (а значит, и с циклическим коммутантом):

- 1) при $2r \leq n$ и $p \geq 2$ $Q(n, r) = \langle b \rangle \lambda \langle a \rangle$, $a^{p^n} = b^{p^r} = 1$, $b^{p^{n-r}} = [a, b]$;
- 2) при $2r > n$ и $p \geq 2$ $Q(n, r) = \langle a \rangle (\langle b \rangle \times \langle c \rangle)$, $a^{p^n} = b^{p^r} = 1$, $c = [a, b]$, $a^{p^{n-r}} = c^{p^{2r-n}}$;
- 3) при $p = 2$ $Q(n) = \langle a \rangle \langle c \rangle \langle b \rangle$, $a^{p^n} = b^{p^n} = c^{p^{n-1}}$, $|c| = p^n$, $c = [a, b]$;
- 4) $Q(n, 0)$ – циклическая p -группа порядка p^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ. Лемму 4 докажем индукцией по k . При $k = 1$, очевидно, $(a, b)^2 = a^2 b^2 [b, a] [b, a, b]$. Далее,

$$\begin{aligned} ((ab)^{2^k})^2 &= (a^{2^k} b^{2^k} [b, a]^{2^{k-1}} c)^2 = (a^{2^k} b^{2^k} [b, a]^{2^{k-1}})^2 c^2 d \\ &= (a^{2^k} b^{2^k})^2 [b, a]^{2^k} e c^2 d = a^{2^{k+1}} b^{2^{k+1}} f [b, a]^{2^k} e c^2 d. \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что d, e и f лежат в $\langle [b, a]^{2^{k+1}} \rangle$.

Если $p \neq 2$, то лемма 5 следует из регулярности [5, 3.10.2] групп с циклическим коммутантом. При $p = 2$ леммы 5 и 6 следуют непосредственно из леммы 4.

Для доказательства леммы 7 заметим, что из леммы 4 следует $(ab)^{2^s} = a^{2^s} [b, a]^{2^{s-1}}$. Так как $a^{2^s}, [b, a]^{2^{s-1}} \in Z(G)$ и $|a^{2^s}| = |[b, a]^{2^{s-1}}| = 2$, имеем $(ab)^{2^s} = 1$.

При $p \neq 2$ лемма 8 доказана в [6, лемма 2.1.6]. В случае $p = 2$ заметим, что в силу леммы 1 $|[a, b]| \leq 2^k$. Итак, возможны два случая: $|a| > |b|$ или $|a^{2^k}| = |b^{2^k}| \geq 4$. В первом случае найдется α такое, что $(a^\alpha)^{2^k} = (b^{-1})^{2^k}$ и $|a| > |a^\alpha| = |b| = 2^k$. По лемме 1 $|[a^\alpha, b]| < 2^k$, поэтому ввиду леммы 4 $|a^\alpha b| \leq 2^k$. Так как $|[a, b]| = |[a, a^\alpha b]|$, из леммы 1 следует, что $|a^\alpha b| = 2^k$ и $\langle a \rangle \cap \langle a^\alpha b \rangle = 1$.

Во втором случае по лемме 4 $(a^\alpha b)^{2^{k+1}} = 1$ для некоторого подходящего α , т.е. $|a| > |a^\alpha b|$, и мы приходим к предыдущему случаю. Итак, лемма 8 доказана.

ЛЕММА 11. Существует всего тринадцать типов конечных 2-порожденных p -групп G класса выше 2 с циклическим центром, циклическим коммутантом порядка p^s и двумя условиями:

- 1) $[G' : \gamma_3(G)] = p^k$;
- 2) $k > 1$ при $p = 2$.

А именно:

- (1.a) $\langle b \rangle \lambda \langle a \rangle$: $|a| = p^s$, $|b| = p^{s+k}$, $[a, b] = b^{p^k}$;
- (1.b) $\langle a \rangle \langle b \rangle$: $|a| = p^{s+m+k}$, $|b| = p^{s+k}$, $a^{p^{s+m}} = b^{p^s}$, $[a, b] = b^{p^k}$, $m < t$;
- (1.c) $\langle a \rangle \langle b \rangle$: $|a| = p^{s+m+k}$, $|b| = p^{s+k}$, $a^{p^{s+m}} = b^{p^s}$, $[a, b] = b^{p^k}$, $m \geq t$;
- (2.a) $(\langle b \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle a \rangle$: $|a| = |b| = |c| = p^s$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$;

- (2.b) $(\langle b \rangle \times \langle c \rangle) \langle a \rangle$: $|a| = p^{s+s-m}$, $|b| = |c| = p^s$, $a^{p^s} = c^{p^m}$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, $s > m > k$ и *нпу* $p = 2$ $s > m + 1$;
- (2.c) $(\langle b \rangle \times \langle c \rangle) \langle a \rangle$: $|a| = p^{s+s-m}$, $|b| = |c| = p^s$, $a^{p^s} = c^{p^m}$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, $k > m > 0$;
- (3.a) $(\langle b \rangle \langle c \rangle) \lambda \langle a \rangle$: $|a| = p^s$, $|b| = p^{s+l+k}$, $|c| = p^{t+l+k}$, $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^{t+l}} \varphi$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, *зде* $t = s - k$, $l > 0$ и $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (3.b) $\langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle$: $|a| = p^{s+l+s-m}$, $|b| = p^{s+l+k}$, $|c| = p^{t+l+k}$, $a^{p^s} = c^{p^m}$, $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^{t+l}} \varphi$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, *зде* $t = s - k$, $l > 0$, $t > m > 0$ и $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (4.a) $(\langle b \rangle \langle c \rangle) \lambda \langle a \rangle$: $|a| = p^s$, $|b| = p^{s+k-l}$, $|c| = p^s$, $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^t} c^{p^{t+l}} \varphi$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, *зде* $t = s - k$, $k > l > 0$ и $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (4.b) $\langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle$: $|a| = p^{s-l+s-m}$, $|b| = p^{s+k-l}$, $|c| = p^s$, $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^t} c^{p^{t+l}} \varphi$, $a^{p^s} = c^{p^m}$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, *зде* $t = s - k$, $k > l > 0$, $t > m > 0$ и $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (5.a) $(\langle b \rangle \langle c \rangle) \lambda \langle a \rangle$: $|a| = p^s$, $|b| = p^{s+k}$, $|c| = p^{s-l}$, $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^{t-l}} \varphi$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, *зде* $|z| = p^k$, $t = s - k$, $t > l \geq 0$, $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (5.b) $\langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle$: $|a| = p^{s+s-l-m}$, $|b| = p^{s+k}$, $|c| = p^{s-l}$, $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^{t+l}} \varphi$, $a^{p^s} = c^{p^m}$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{p^k} c$, *зде* $|z| = p^k$, $t = s - k$, $t > l \geq 0$, $t - l > m > 0$, $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$;
- (6.a) $(\langle b \rangle \langle c \rangle) \langle a \rangle$: $|a| = |b| = 2^{s+1}$, $|c| = 2^s$, $[a, c] = [b, c] = 1$, $[a, b] = b^{2^k} c$, $a^{2^s} = b^{2^s} = c^{2^{s-1}} = [a, b]^{2^{s-1}}$.

Кроме того, у групп типа (*.a) $\exp(G) = \exp(C_G(G')) = |b|$, за исключением групп типа (2.a), у которых $\exp(G) = p^{s+1}$, а $\exp(C_G(G')) = |b| = p^s$. У групп типа (*.b) $\exp(G) = |a|$, у групп типа (*.a) и (*.b) $\exp(C_G(G')) \cdot p^t > \exp(G)$ и у групп типа (*.c) $\exp(C_G(G')) \cdot p^t \leq \exp(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строение метациклических p -групп, в том числе и с циклическим центром, хорошо известно (это группы типа (1)), поэтому будем считать, что G не метациклическая.

В силу леммы 9 $G = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle$, $[a, b] = b^{p^k} c$, $[a, c] = [b, c] = 1$ и $|b^{p^k} c| = p^s$.

Докажем сначала, что $Z(G) = \langle c \rangle$. Действительно, если $a^\alpha b^\beta c^\gamma \in Z(G)$, то $a^\alpha b^\beta \in Z(G)$. Тогда $1 = [a, a^\alpha b^\beta] = [a, b^\beta]$, т.е. $b^\beta \in Z(G)$. Поскольку $Z(G)$ – циклическая группа, то либо $\langle c \rangle \leq \langle b^\beta \rangle$, либо $\langle b^\beta \rangle \leq \langle c \rangle$. В первом случае $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ и, очевидно, G метациклическая. Значит, $\langle b^\beta \rangle \leq \langle c \rangle$. С другой стороны, $1 = [b, b^\alpha a^\beta]$ и либо $\langle a^\alpha \rangle \geq \langle c \rangle$, либо $\langle a^\alpha \rangle \leq \langle c \rangle$.

Докажем, что в первом случае G метациклическая. Пусть $\bar{b} = ba^{2^t \beta}$. Тогда $[a, \bar{b}] = [a, b] = b^{2^k} c$. Но $\bar{b}^{2^k} = b^{2^k} a^{2^s \beta}$. Так как $a^{2^{s-1}} \notin Z(G)$ и $\langle a \rangle \geq \langle c \rangle$, существует β такое, что $a^{2^s \beta} = c$, $[a, \bar{b}] = \bar{b}^{2^k}$ и $\langle a, \bar{b} \rangle$ – метациклическая группа.

Итак, мы доказали, что $a^\alpha b^\beta c^\gamma \in \langle c \rangle$ и $\langle c \rangle = Z(G)$.

1) Рассмотрим случай $\langle b \rangle \cap \langle c \rangle = 1$. Так как по лемме 1 $b^{p^s} \in Z(G) = \langle c \rangle$, то $|b| = p^s$ и $p^s = |G'| = |b^{p^k} c| = |c|$.

Из леммы 1 следует, что $a^{p^s} \in Z(G) = \langle c \rangle$. Ясно, что существуют целые числа α и m такие, что $\bar{c} = c^\alpha$, $\langle c \rangle = \langle \bar{c} \rangle$ и $a^{p^s} = \bar{c}^{p^m}$.

Так как $[a, b^\alpha] = (b^{p^k} c)^\alpha = (b^\alpha)^{p^k} c^\alpha$, группа $H = \langle a \rangle \langle \bar{b} \rangle \langle \bar{c} \rangle$, где $\bar{b} = b^\alpha$, является

группой типа (2.a) (если $m = 0$), типа (2.b) (если $0 > m > k$), типа (2.c) (если $k \geq m$) и $H = G$. Так как G не метациклическая, имеет место $m \neq s$.

Если $p = 2$ и $s - m = 1$, то, применив лемму 7, получим $m = 0$ и, следовательно, G – группа типа (2.a). Лемма 6 показывает, что экспонента групп типа (2.a) при $p = 2$ равна 2^{s+1} .

2) Рассмотрим случай $\langle b \rangle \cap \langle c \rangle \neq 1$ и $|b| = |c| \cdot p^k$. Как уже отмечалось, $b^{p^s} \in Z(G) = \langle c \rangle$ и, значит, $(b^{p^k} c)^{p^t} \in \langle c \rangle$. А так как $|G'| = p^s$, имеем $|(b^{p^k} c)^{p^t}| = p^k$ и $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^{t+l}\varphi}$ для некоторого $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$, $|b| = p^{s+l+k}$ и $|c| = p^{t+l+k}$, где l – некоторое неотрицательное число. Кроме того, $a^{p^s} \in Z(G) = \langle c \rangle$. Если $a^{p^s} \in \langle c^{p^t} \rangle = \langle b^{p^s} \rangle$, то по лемме 8 $\langle ab^\alpha \rangle \cap \langle b, c \rangle = 1$ для некоторого α . Следовательно, $\langle b, c \rangle \lambda \langle ab^\alpha \rangle$ является группой типа (3.a) в случае $l > 0$ и группой типа (5.a) в случае $l = 0$. Если $a^{p^s} \notin \langle c^{p^t} \rangle = \langle b^{p^s} \rangle$, то существуют α и m такие, что $\bar{c} = c^\alpha$, $\langle c \rangle = \langle \bar{c} \rangle$ и $a^{p^s} = \bar{c}^{p^{t-m}}$. Аналогично 1), легко проверить, что $G = \langle a \rangle \langle \bar{b} \rangle \langle \bar{c} \rangle$, где $\bar{b} = b^\alpha$, является группой типа (3.b) в случае $l > 0$ и группой типа (5.a) в случае $l = 0$.

3) Рассмотрим случай $\langle b \rangle \cap \langle c \rangle \neq 1$, $|b| < |c| \cdot p^k$. Заметим, что $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^t} b^{p^s}$ и b^{p^s} лежит в собственной подгруппе $\langle c^{p^t} \rangle$. Следовательно, $|c| = |b^{p^k} c| = p^s$. Отсюда вытекает, что $|b| = p^{s+k-l}$ для некоторого натурального l , и существует $\varphi \not\equiv 0 \pmod{p}$ такое, что $c^{p^{t+l}\varphi} = b^{p^s}$.

Как уже отмечалось в 1), заменяя c и b на c^α и b^α , мы можем считать, что $a^{p^s} = c^{p^r}$ для некоторого натурального r .

Если $l < r < l + t$, то G – группа типа (4.b) и $m = r - l$.

Если $r \geq l + t$, $|a| = 2^{s+1}$ и $|b| = 2^{s+1}$ то, очевидно, $a^{2^s} = b^{2^s} = c^{2^{s-1}} = [a, b]^{2^{s-1}}$ и G – группа типа (6.a).

Если $r \geq l + t$, но $|a| \neq 2^{s+1}$ или $|b| \neq 2^{s+1}$, то $c^{p^r} \in \langle b^{p^s} \rangle$. В силу леммы 5 $\langle ab^\beta \rangle \cap \langle c \rangle$ для некоторого натурального β , и $\langle b, c \rangle \lambda \langle ab^\beta \rangle$ – группа типа (4.a).

Если $r \leq l$, то по лемме 8 для некоторого натурального α $\langle b(a^{p^t})^\alpha \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, $[a, b(a^{p^t})^\alpha] = b^{p^k} c = (ba^\alpha)^{p^k} a^{-\alpha p^t} c$ и $a^{-\alpha p^t} \in \langle c \rangle$. Значит, $\langle a \rangle \langle (b(a^{p^t})^\alpha) \times \langle a^{-\alpha p^t} c \rangle \rangle$ – группа типа (2.c).

4) Осталось рассмотреть случай $\langle b \rangle \cap \langle c \rangle \neq 1$ и $|c| \cdot p^k < |b|$. Очевидно, $(b^{p^k} c)^{p^t} = b^{p^s} c^{p^t}$. Так как $\langle c^{p^t} \rangle < \langle b^{p^s} \rangle$, имеем $|G'| = |b^{p^k} c| = |b^{p^k}|$. Отсюда $|b| = p^{s+k}$ и $|c| = p^{s-l}$ для некоторого подходящего неотрицательного l .

Рассуждения, относящиеся к элементу a , проводятся аналогично 2). Лемма доказана.

Легко заметить, что центральное произведение $A * B$ групп A и B с циклическими центрами $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответственно имеет циклический центр тогда и только тогда, когда центры “склеиваются”, т.е. $\hat{A} = \hat{B}$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такие центральные произведения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [2], [3]). *Конечная p -группа класса 2 с циклическим центром однозначно представима либо в виде центрального произведения групп*

$$Q(n_1, r_1) * \dots * Q(n_\alpha, r_\alpha) * Q(l, l)^{\varepsilon_l} * \dots * Q(1, 1)^{\varepsilon_1},$$

где $Q(n, r)$ – группа из леммы 10, $Q(l, l)^{\varepsilon_l}$ есть центральное произведение ε_l экземпляров $Q(l, l)$, $\alpha \geq 0$, $\varepsilon_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$, $n_1 > \dots > n_\alpha > l$, $n_\alpha > r_1 > \dots > r_\alpha \geq 0$,

$0 < n_1 - r_1 < \dots < n_\alpha - r_\alpha$, а при $p = 2$ и $\alpha > 0$; либо в виде центрального произведения групп

$$Q(n) * Q(l, l)^{\varepsilon_l} * \dots * Q(1, 1)^{\varepsilon_1},$$

где $n > l \geq 1$, $\varepsilon_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$, и $p = 2$.

ТЕОРЕМА 1. Существует тринадцать типов конечных p -групп P класса выше 2 с циклическим коммутантом, циклическим центром и условиями

$$|P'| = p^s, \quad [P' : \gamma_3(P)] = p^k. \quad (1)$$

А именно, $P = G * D$, $Z(G) \subseteq D$ (что равносильно $D = C_P(G')$). Здесь конечная p -группа D класса 2 с циклическим центром, $|D'| \leq p^k$, представима в виде центрального произведения групп $Q(n_1, r_1), \dots, Q(n_\alpha, r_\alpha), Q(l_1, l_1), \dots, Q(l_\beta, l_\beta)$, где $\alpha, \beta \geq 0$, $n_1 > \dots > n_\alpha$, $p^k \geq l_1 \geq \dots \geq l_\beta$, $p^k \geq r_1 > \dots > r_\alpha > 0$, $n_0 < n_1 - r_1 < \dots < n_\alpha - r_\alpha$, где n_0 такое, что $\exp(G) = p^{n_0+s}$, а при $p = 2$ и $\alpha > 0$; а G — одна из следующих групп (v, u — числа такие, что $p^v = \exp(D)$ и $|c| \cdot p^{k-u} = \exp(D)$):

- (A.a) группа типа (1.a) с условиями (1), $v \leq s$;
- (A.b) группа типа (1.b) с условиями (1), $v \leq s + k$;
- (A.c) группа типа (1.c) с условиями (1), $v \leq m + 2k$;
- (B.a) группа типа (2.a) с условиями (1), $v \leq s$;
- (B.b) группа типа (2.b) с условиями (1), $v \leq s$;
- (B.c) группа типа (2.c) с условиями (1), $v \leq s + k - m$;
- (C.a) группа типа (3.a) с условиями (1), $u > 0$;
- (C.b) группа типа (3.b) с условиями (1), $u > 0$;
- (D.a) группа типа (4.a) с условиями (1), $u \geq 0$;
- (D.b) группа типа (4.b) с условиями (1), $u \geq 0$;
- (E.a) группа типа (5.a) с условиями (1), $u > 0$;
- (E.b) группа типа (5.b) с условиями (1), $u > 0$;
- (F.a) группа типа (6.a) с условиями (1), $v \leq s$.

Вообще говоря, центральное произведение, в отличие от прямого, определяется не только своими множителями, но и способом “склейки”. Но в нашем случае все группы, кроме одной, имеют класс нильпотентности не выше 2, поэтому, как сказано в [2], произведение таких групп однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своими сомножителями. Действительно, пусть, например, $P = G * D$ — группа с циклическим центром и циклическим коммутантом, $D = \langle a \rangle \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ — группа класса 2, $\langle c \rangle = Z(D)$ и $\langle z \rangle = Z(G)$. Можем считать, что $\bar{c} = z^{p^r}$ или $\bar{c}^{p^r} = z$, где $\bar{c} = c^\alpha$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$. Но группа $\langle \bar{a} \rangle \langle b \rangle \langle \bar{c} \rangle$, где $\bar{a} = c^\alpha$, изоморфна D . Более того, существует изоморфизм, продолжающий отображение $a \mapsto \bar{a}$, $b \mapsto b$ и $c \mapsto \bar{c}$. (Случай $D = \langle a \rangle \langle b \rangle$ рассматривается аналогично.)

Таким образом, мы можем считать, что в центральном произведении группы “подклеиваются” друг к другу некоторым единственным каноническим способом.

ТЕОРЕМА 2. Если P и $\bar{P}$ — группы, удовлетворяющие условиям теоремы 1, $\bar{e}, \bar{m}, \bar{\varphi}$ — параметры группы $\bar{P}$, аналогичные соответствующим параметрам группы P , то $P \cong \bar{P}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $\bar{P}$ и P — группы одного типа (в смысле теоремы 1);

- 2) $\overline{m} = m$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(*.b)$;
- 3) $\overline{l} = l$, если $\overline{P}$ и P – группы типа (C) , (D) или (E) ;
- 4) $\overline{D} \cong D$;
- 5) $\overline{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(t,u)}}$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(C.a)$;
- 6) $\overline{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(m,u)}}$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(C.b)$;
- 7) $\overline{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(t,u)}}$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(D.a)$;
- 8) $\overline{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(m,u)}}$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(D.b)$;
- 9) $\overline{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(t-l,u)}}$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(E.a)$;
- 10) $\overline{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(m,u)}}$, если $\overline{P}$ и P – группы типа $(E.b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 3 $P = G * D$, где $D = C_P(G)$. Поскольку $D' \subseteq G' \cap C_G(a) = \langle (b^{p^k} c)^{p^t} \rangle$, то $|D'| \leq p^k$. Если у группы P $\exp(C_P(P')) \cdot p^t \leq \exp(P)$, то аналогичное условие выполнено и для G . Из леммы 11 следует, что G – группа типа (1.с) или (2.с), значит P – группа типа (A.с) или (B.с).

В случае, когда $\exp(C_P(P')) \cdot p^t > \exp(P)$, можем считать, что $|b| \geq \exp(C_P(G'))$. Действительно, если существует элемент $d \in C_P(G')$ и $|d| > |b|$, то по лемме 2 для некоторого натурального α $[db^\alpha, a] = 1$, $bdb^\alpha \in C_P(G')$, $[bdb^\alpha, a] = [b, a]$. Тогда, как легко проверить, группа $\langle a \rangle \langle bdb^\alpha \rangle \langle c(db^\alpha)^{-p^k} \rangle$ удовлетворяет соотношениям леммы 9. Применяя преобразования из доказательства леммы 11, можем привести эту группу к виду (1)–(6), при этом $|b|$ (равный $\exp(C_G(G'))$) не изменится.

Докажем, что если G – группа типа (C) или (E), то $\exp(D) < |c| \cdot p^k$. Пусть $d \in D$ и $|d| \geq |c| \cdot p^k$. Рассмотрим группу $\langle a \rangle \langle \overline{b} \rangle \langle \overline{c} \rangle$, где $\overline{b} = bd^\alpha$ и $\overline{c} = c(d^{-p^k})^\alpha$. Поскольку

$$[a, \overline{b}] = [a, b] = b^{p^k} c = (bd^\alpha)^{p^k} c (d^\alpha)^{-p^k} = \overline{b}^{p^k} \overline{c},$$

$\langle a \rangle \langle \overline{b} \rangle \langle \overline{c} \rangle$ удовлетворяет соотношениям из леммы 9. Так как $|D'| \leq p^k$, по лемме 1 $d^{-p^k} \in Z(P)$, значит $c \in \langle d^{-p^k} \rangle$. Следовательно, при подходящем α $\overline{c} = 1$ и $\langle a \rangle \langle \overline{b} \rangle \langle \overline{c} \rangle$ – метациклическая p -группа.

Докажем, что в группах типа (F.a) $\exp(D) < 2^{s+1}$. Пусть существует $d \in D$ и $|d| = 2^{s+1}$. Тогда $|ad| = 2^s$ и $\langle ad, b, c \rangle$ – группа типа (4.a) и, значит, G – группа типа (D.a).

Строение группы D определяется леммой 9 и следующими шестью леммами.

ЛЕММА 12. Если $n_1 \geq n_2$ и $n_1 - r_1 \geq n_2 - r_2$, то

$$Q(n_1, r_1) * Q(n_2, r_2) \cong Q(n_1, r_1) * Q(r_2, r_2).$$

ЛЕММА 13. Если $n < n_1$, то $Q(n) * Q(n_1, r_1) \cong Q(n-1, n-1) * Q(n_1, r_1)$.

ЛЕММА 14. Если $p = 2$, то $Q(n, n) * Q(n, n) \cong Q(n+1) * Q(n+1)$.

ЛЕММА 15. Если $p = 2$, то $Q(n, n) \cong Q(n+1, n)$.

Леммы 12–15 доказаны в [2] и [3].

ЛЕММА 16. Пусть $P = G * D$ – конечная p -группа с циклическим центром и циклическим коммутантом, $G' = P'$, G – группа класса выше 2, D – группа типа $Q(n, r)$ (т.е. $D = \langle d, e \rangle$, где $|d| = n$ и $|e| = r$), $p^{n+t} \leq \exp(G)$ и $p^{n-r+s} \leq \exp(G)$ (t, s и m из леммы 11). Тогда $P \cong \overline{G} * \overline{D}$, где $\overline{D}$ – группа типа $Q(r, r)$, $\overline{G} \cong G$ и $\overline{G} \subseteq G\langle e \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $r < k = s - t$, так как $|D'| = p^r$, $D' \subseteq Z(P) \cup G'$ и $p^{n+t} \leq \exp(G)$.

Пусть $|a| = \exp(G)$. (Если $|b| = \exp(G)$, то необходимо поменять a и b местами.) Тогда $|a^{p^s}| \geq |d^{p^r}|$ и $|a^{p^t}| \geq |d|$. Положим $\bar{d} = da^{p^t\alpha}$. Так как $d^{p^r} \in \langle a^{p^s} \rangle$ и $a^{p^t} \in C_P(P')$, по лемме 2 существует α такое, что $|\bar{d}| = p^r$; следовательно, $\langle \bar{d}, e \rangle = \bar{D}$ – группа типа $Q(r, r)$. Пусть $\bar{b} = be^\beta$. Существует β такое, что $[\bar{b}, \bar{d}] = 1$. Действительно, так как $|a^{p^s}| \geq |d|$, имеем $\alpha \equiv 0 \pmod{p^{k-t}}$, значит $||[\bar{d}, b]| \leq p^r$. Существование подходящего β теперь следует из леммы 2. Итак, если $\bar{D} = \langle \bar{d}, e \rangle$ и $\bar{G} = \langle a, \bar{b} \rangle$, то $G * D = \bar{G} * \bar{D}$. Поскольку $|e^\beta| \leq p^k$, отображение $a \mapsto a, b \mapsto \bar{b}$ продолжается до изоморфизма G на $\bar{G}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. Если группа G удовлетворяет условиям леммы 16, D – группа типа $Q(n)$, то $P = G * D \cong G * Q(n, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, заменим e на $\bar{e} = ea^{p^t\alpha}$ (b на $\bar{b}$), где α такое, что $|\bar{e}| < |e|$. Применив к группе $\langle d, \bar{e} \rangle$ лемму 7, получим, что $\langle d, \bar{e} \rangle$ – группа типа $Q(n, n)$. Лемма доказана.

По лемме 9 D представима в виде центрального произведения групп $Q(n_i, r_i)$ и $Q(n)$. Используя леммы 12–17, эти группы можно преобразовать и переставить в требуемом порядке подобно тому, как это сделано в [2] и [3]. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1) Сначала заметим, что группы типа (А.с) и (В.с) неизоморфны группам другого типа, так как лишь у этих групп $\exp(P) = \exp(C_P(P')) \cdot p^t$. Группы типа (А.с) неизоморфны группам типа (В.с), так как у (А.с) $\exp(P) \geq p^{s+k}$, у (В.с) $\exp(P) < p^{s+k}$.

Рассмотрим оставшиеся группы. Экспонента $\exp(C_P(P')) = \langle a^{p^t} \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle D$ одинакова только у групп типа (А) и (Е) (в этом случае $\exp(C_P(P')) = p^{s+k}$) и у групп типа (D) и (F) (в этом случае $\exp(C_P(P')) = 2^{s+1}$ и $p = 2$). Но экспонента группы типа (D.б) больше экспоненты группы типа (F.а). Поэтому если группы разных типов и изоморфны, то это либо группы типа (А) и (Е), либо группы типа (D.а) и (F.а).

Докажем, что если группа P типа (А) изоморфна группе типа (Е), то у этой группы $|b| > \exp(D)$.

Допустим, это не так. Тогда существует элемент $d \in D$ такой, что $|d| = |b|$. Следовательно, $b^{p^s} \in \langle d^{p^s} \rangle$ и $bd^\alpha = p^s$ для некоторого натурального α . Значит, в P существуют элементы $x = bd^\alpha$ и $y = a$ такие, что

- 1) $x \in C_P(P'), y \notin C_P(P')$ и $\langle [x, y] \rangle = P'$;
- 2) $|x| = p^s$.

Однако, группа типа (Е) элементов с такими свойствами не содержит. Действительно, из условия 1) следует, что $x = b^{\alpha_b} (a^{p^t})^{\alpha_a} c^{\alpha_c} d_x$, $y = a^{\beta_a} b^{\beta_b} c^{\beta_c} d_y$, где $d_x, d_y \in D$, и $\langle b^{\alpha_b} \rangle = \langle b \rangle$, $\langle a^{\beta_a} \rangle = \langle a \rangle$. Так как в группе типа (Е) порядок элемента b больше, чем $|a^{p^t}|$, $|c|$ и $\exp(D)$, условие 2) не может быть выполнено.

Итак, пусть $P = \langle a \rangle \langle b \rangle * D$ – группа типа (А), у которой $|b| > \exp(D)$, и в ней есть элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и подгруппа $\bar{D}$, для которых выполняются условия типа (Е).

Заметим, что порядки элементов a и $\bar{a}$ одинаковы, так как если $\exp(P) = \exp(C_P(P'))$, то $|a| = |\bar{a}| = p^s$, и если $\exp(P) > \exp(C_P(P'))$, то $|a| = |\bar{a}| = \exp(P)$. Порядки элементов b и $\bar{b}$ также одинаковы и равны $\exp(C_P(P'))$, так как $|b| > \exp(D)$. Для получения противоречия достаточно показать, что $\exp(\bar{D}) \geq |\bar{c}| \cdot p^k$.

Так как $a, \bar{a} \in P \setminus C_P(P')$, $b, \bar{b} \in C_P(P')$ и $\langle [\bar{a}, \bar{b}] \rangle = P'$, то $\bar{a} = a^\alpha y$, $y \in \langle b, D \rangle$, $\bar{b} = b^\beta x$, где $x \in \langle a^{p^t}, D \rangle$ и $\alpha, \beta \not\equiv 0 \pmod{p}$.

С одной стороны, $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{b}^{p^k} \bar{c}$; с другой стороны, $[\bar{a}, \bar{b}] \equiv [a^\alpha, b^\beta] = [a, b]^{\beta f(\alpha)} = (b^{p^k})^{\beta f(\alpha)} = ((b^\beta x)^{p^k} x^{-p^k})^{f(\alpha)} = (\bar{b}^{p^k} x^{-p^k})^{f(\alpha)} \pmod{\langle [b, a^{p^t}] \rangle}$, $[b, a^{p^t}] = b^{p^s} \in P' \cap Z(P)$ и $f(\alpha) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $x^{p^k} \in Z(P)$, отсюда следует, что $(\bar{b}^{p^k})^{1-f(\alpha)} \in Z(P) \cap \langle \bar{b} \rangle = \langle b^{p^s} \rangle$ и $\bar{c} \in \langle x^{p^k} \rangle \langle b^{p^s} \rangle = \langle a^{p^s} \rangle D^{p^k} \langle b^{p^s} \rangle$, значит $|\bar{c}| \cdot p^k \leq \exp(D)$. Что и требовалось доказать.

Докажем, что группы типа (D.a) и (F.a) неизоморфны. Для этого заметим, что элемент a в группе типа (D.a) обладает следующими свойствами: $|a| = p^s$, $|[a, C(P')]| = p^s$; в группе типа (F.a) элементов с такими свойствами нет. Действительно, пусть $\bar{a} = a^\alpha b^\beta d$ ($d \in \langle c, D \rangle$) – элемент группы типа (F.a), обладающий этими свойствами. Поскольку $|[\bar{a}, C(P')]| = p^s$, то α нечетное. По лемме 4 $(\bar{a}^\alpha b^\beta d)^{2^s} = \bar{a}^{2^s \alpha} b^{2^s \beta} [b, a]^{2^{s-1} \alpha \beta} = \bar{a}^{2^s \alpha} (b^{2^s} [b, a]^{2^{s-1}})^\beta = \bar{a}^{2^s \alpha} \neq 1$. Получили противоречие.

2) Как отмечалось выше, порядки элементов a и $\bar{a}$ одинаковы. Таким образом, в группах типа (A) и (B) $\bar{m} = m$. Для групп типа (C)–(E) докажем, что $\bar{l} = l$; следовательно, $\bar{m} = m$.

3) В группах типа (C) $\exp(C_P(P')) = |b| = p^{k+l+s}$, в группах типа (D) $\exp(C_P(P')) = |b| = p^{s+k-l}$. Следовательно, в этих группах $\bar{l} = l$.

Пусть $P = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle * D$ – группа типа (C), (D) или (E). Допустим, в P можно выбрать элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и подгруппу $\bar{D}$ так, что для них выполняются условия одного из типов (C), (D) или (E). Так как $a, \bar{a} \in P \setminus C_P(P')$, $b, \bar{b} \in C_P(P')$ и $\langle [\bar{a}, \bar{b}] \rangle = P'$, можем считать, что $\bar{a} = a^\alpha b^r d_1$ и $\bar{b} = b^\beta x$, где $\alpha, \beta \not\equiv 0 \pmod{p}$, $x = a^{p^t \psi} d_2$ и $d_1, d_2 \in D$. В этом случае

$$\begin{aligned} \bar{b}^{p^k} \bar{c} &= [\bar{a}, \bar{b}] = [a, b]^{\beta f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} [d_1, d_2] = (b^{p^k} c)^{\beta f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} [d_1, d_2] \\ &= ((b^\beta x)^{p^k} (x^{-p^k} c^\beta))^{f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} [d_1, d_2] = \bar{b}^{p^k f(\alpha)} (x^{-p^k} c^\beta)^{f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} [d_1, d_2], \end{aligned}$$

где $f(\alpha)$ – число такое, что $[a^\alpha, b] = [a, b]^\alpha$ (в частности, $f(\alpha) \not\equiv 0 \pmod{p}$). Так как $(x^{-p^k} c^\beta)^{f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} [d_1, d_2] \in Z(P)$, то $\bar{b}^{p^k(f(\alpha)-1)} \in Z(P) \cap \langle \bar{b} \rangle = \langle b^{p^s} \rangle$ (т.е. $f(\alpha) - 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$) и

$$\bar{c} = (x^{-p^k} c^\beta)^{f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} \bar{b}^{p^k(f(\alpha)-1)} [d_1, d_2], \quad (2)$$

$$\bar{b}^{p^k} \bar{c} = (b^{p^k} c)^{\beta f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi} [d_1, d_2]. \quad (3)$$

Вернемся к доказательству теоремы. Вычислив порядок элементов в формуле (2), легко понять, что в группах типа (E) $|\bar{c}| = |c|$, и (поскольку $|c| = p^{k+t-l}$) $\bar{l} = l$. Что и требовалось доказать.

4) Докажем более сильное утверждение.

ЛЕММА 18. Пусть $P = G * D \cong \bar{P} = \bar{G} * \bar{D}$ – группы, удовлетворяющие условиям теоремы 2, $\{n_i, \dots, r_i, \dots, l_i, \dots\}$ – параметры группы D и $\{\bar{n}_i, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{l}_i, \dots\}$ – параметры группы $\bar{D}$. Тогда $n_i = \bar{n}_i$, $r_i = \bar{r}_i$, $l_i = \bar{l}_i$. Иными словами, множество пар чисел $\{(n_i, r_i), \dots, (l_j, l_j), \dots\}$ является инвариантом группы P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим процедуру, позволяющую определить пары чисел $\{(n_i, r_i), \dots, (l_j, l_j), \dots\}$ из абстрактного строения группы P .

Из лемм 1–10 следует, что $P/Z(P) \cong (\langle \hat{b} \rangle \lambda \langle \hat{a} \rangle) \times A$, где A – абелева p -группа с инвариантами $(r_1, r_1, r_2, r_2, \dots, l_1, l_1, l_2, l_2, \dots)$ и $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{b}^{p^k}$. Профакторизовав группу $P/Z(P)$ по коммутанту, получим абелеву p -группу с инвариантами $(s, k, r_1, r_1, r_2, r_2, \dots, l_1, l_1, l_2, l_2, \dots)$ и $s > k > r_1, \dots, l_1, \dots$.

Таким образом, множество $\{r_1, r_2, \dots, l_1, l_2, \dots\}$ определяется абстрактными свойствами группы P .

Рассмотрим целочисленную функцию $f(g)$, равную максимальному среди чисел f со свойством: существуют $x, y \in P$ такие, что $|x| = p^f$, $|[x, y]| = p^g$ и для любого $y' \in P$ $|[x, y']| \leq p^g$. Докажем, что $f(r_i) = n_i$ и $f(l_j) \leq h_j$, где h_j – наибольшее число из множества $\{n_i - (r_i - l_j) \mid r_i \geq l_j, i \geq 1\} \cup \{n_i - (r_i - l_j) \mid r_i \geq l_j, i \geq 1\} \cup \{w\}$, а w определяется из равенства $p^{w+s-l_j} = \exp(P)$.

Обозначим образующие группы $Q(n_i, r_i)$ через a_i и b_i , а образующие группы $Q(l_j, l_j)$ через c_j и d_j (предполагается, что $|a_i| = p^{n_i}$, $|b_i| = p^{r_i}$, $|c_i| = |d_i| = p^{l_i}$ и a_i, b_i, c_j, d_j удовлетворяют соответствующим соотношениям из леммы 10).

Заметим, что $f(r_i) \geq n_i$. Для этого нужно взять a_i и b_i в качестве x и y .

Вообще говоря,

$$x \equiv a^\alpha b^\beta \dots a_i^{\alpha_i} \dots \pmod{\langle b_i, \dots, c_i, \dots, d_i, \dots \rangle}, \quad (4)$$

и если $|x| > p^{n_i}$, то порядок одного из трех элементов: $a_k^{\alpha_k}$ ($k < i$), a^α или b^β – больше p^{n_i} . Взяв в качестве y' соответственно b_k , b или a , получим $|[x, y']| > p^{r_i}$. Следовательно, $f(r_i) = n_i$. Если $f(l_j) > h_j$, из формулы (4) следует, что либо $|a_i^{\alpha_i}| > p^{n_i - (r_i - l_j)}$ (при $r_i \geq l_j$) и в этом случае $|[a_i^{\alpha_i}, b_i]| > p^{l_i}$; либо $|a^\alpha| > p^w$ или $|b^\beta| > p^w$ и в этом случае $|[a^\alpha, b]| > p^{l_i}$ или $|[b^\beta, a]| > p^{l_i}$. Что противоречит определению $f(g)$.

Итак, множество пар $T = \{(n_1, r_1), \dots, (f(l_1), l_1), \dots\}$ является инвариантом группы P . Осталось найти способ отделять пары $(n_1, r_1), \dots$ от пар $(f(l_1), l_1), \dots$.

Назовем пару $(x, y) \in T$ *неустойчивой*, если выполняется одно из условий:

- 1) существует пара $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ такая, что $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} \geq x$ и $\bar{x} - \bar{y} \geq x - y$;
- 2) $p^{x+t} \leq \exp(G)$ и $p^{x-y+s} \leq \exp(G)$ (t и s – параметры группы G).

Из определения чисел h_i следует, что пара $(x, y) \in T$ устойчива (т.е. не является неустойчивой) тогда и только тогда, когда $(x, y) = (n_i, r_i)$ для некоторого i . Выбрасывая из множества устойчивых пар повторяющиеся, мы получим в точности $\{(n_1, r_1), \dots\}$. Лемма доказана.

5), 6) Шаг 1. Пусть теперь $P = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle * D$ и $\overline{P} = \langle \bar{a} \rangle \langle \bar{b} \rangle \langle \bar{c} \rangle * \overline{D}$ – изоморфные группы типа (C), $\overline{m} = m$ и $\overline{l} = l$. Отождествив P и $\overline{P}$, можно выбрать элементы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и подгруппу $\overline{D}$ так, что $\bar{a} = a^\alpha b^r d_1$ и $\bar{b} = b^\beta x$, где $x = a^{p^t \psi} d_2$ и $d_1, d_2 \in D$. Из формул (2), (3) и соотношений $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^{t+l} \varphi}$ и $(\bar{b}^{p^k} \bar{c})^{p^t} = \bar{c}^{p^{t+l} \overline{\varphi}}$ следует, что

$$(\bar{b}^{p^k} \bar{c})^{p^t} = (b^{p^k} c)^{\beta f(\alpha) p^t} [b, a^{p^t}]^{r \psi p^t} [d_1, d_2]^{p^t} = c^{p^{t+l} \varphi \beta f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r \psi p^t} [d_1, d_2]^{p^t}$$

и

$$\bar{c}^{p^{t+l} \overline{\varphi}} = x^{-p^k f(\alpha) p^{t+l} \overline{\varphi}} c^{\beta f(\alpha) p^{t+l} \overline{\varphi}} [b, a^{p^t}]^{r \psi p^{t+l} \overline{\varphi}} \bar{b}^{p^k (f(\alpha) - 1) p^{t+l} \overline{\varphi}} [d_1, d_2]^{p^{t+l} \overline{\varphi}}.$$

Отсюда

$$c^{\beta f(\alpha)p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})} \equiv x^{-f(\alpha)p^{s+l}\bar{\varphi}} b^{(f(\alpha)-1)p^{s+l}\bar{\varphi}} \pmod{([b, a^{p^t}]^{p^t})D'^{p^t}}. \quad (5)$$

Шаг 2. Вычислив порядок элементов в (5) (учитывая, что $f(\alpha) - 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$), легко понять, что если $\bar{\varphi} \not\equiv \varphi \pmod{p^{\min(m, t, u)}}$, то порядок левой части (5) больше порядка правой, а это невозможно. Заметим, что если P – группа типа (С.б), то $m < t$, а если (С.а), то $a^{p^m} = 1$, т.е. m исключается из рассуждений. Таким образом, мы доказали, что если $\bar{P}$ и P изоморфны, то $\bar{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(t, u)}}$ или $\bar{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(m, u)}}$.

Шаг 3. Теперь докажем, что если $\bar{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(t, u)}}$ и $\bar{P}, P$ – группы типа (С.а) или $\bar{\varphi} \equiv \varphi \pmod{p^{\min(m, u)}}$ и $\bar{P}, P$ – группы типа (С.б), то $\bar{P}$ и P изоморфны.

Сначала найдем в P элементы $\hat{a}, \hat{b}$ и $\hat{c}$ такие, что $\langle \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \rangle$ изоморфна $\bar{G}$. Для этого необходимо найти числа α, β, r, ψ (возможно равные 1) такие, что если положить $\hat{a} = a^\alpha b^r d_1$, $\hat{b} = b^\beta a^{p^t} \psi d_2$, где $\alpha, \beta \not\equiv 0 \pmod{p}$, $d_1, d_2 \in D$, и определить $\hat{c}$ из равенства $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{b}^{p^k} \hat{c}$, то будут выполняться условия

$$\hat{a}^{p^s} = \hat{c}^{p^m}, \quad (6)$$

если P – группа типа (С.б), или $|\hat{a}| = p^s$, если P – группа типа (С.а), и

$$(\hat{b}^{p^k} \hat{c})^{p^t} = \hat{c}^{p^{t+l}\bar{\varphi}}. \quad (7)$$

Кроме того, если $\alpha \neq 1$, то для корректного определения элемента $\hat{c}$ необходимо, чтобы $[\hat{a}, \hat{b}] \cdot \hat{b}^{-p^k} \in \langle \hat{c} \rangle$. Рассуждая, как и при выводе формулы (2), получаем, что для этого достаточно выполнения

$$f(\alpha) - 1 \equiv 0 \pmod{p^t}, \quad (8)$$

где $f(\alpha)$ – число такое, что $[a^\alpha, b] = [a, b]^{f(\alpha)}$.

Из леммы 18 следует, что $C_P(\langle \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \rangle) \cong D \cong \bar{D}$. Таким образом, группа $\langle \hat{a} \rangle \langle \hat{b} \rangle \langle \hat{c} \rangle * C_P(\langle \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \rangle) = P$ действительно изоморфна группе $\bar{P}$.

Пусть сначала $\min(m, t, u) = u$ и $\hat{a} = a, \hat{b} = b^\beta d^r$, где d – элемент максимального порядка из D .

Рассуждая так же, как и в доказательстве формулы (5), получаем, что из равенства

$$c^{\beta p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})} = (d^r)^{-p^{s+l}\bar{\varphi}} \quad (9)$$

следует (7). Если P – группа типа (С.а), то подходящие r и β существуют, так как $|c^{p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})}| = |(d^r)^{p^{s+l}}|$.

Если P – группа типа (С.б), то кроме (7) необходимо доказать и (6). Заметим, что (6) следует из $c^{p^m} = \hat{c}^{p^m}$, которое, в свою очередь, следует из равенства

$$c^{p^{m(\beta-1)}} = d^r p^{k+m} \quad (10)$$

(для типа (С) $|c^{p^m}| > |d^{p^{k+m}}|$), так как согласно (2) $\hat{c} = d^{-r} p^k c^\beta$. Существование подходящих r и β (что равносильно существованию “решения системы уравнений” (9), (10)) обеспечивает следующая

ЛЕММА 19. Если a, b, c, d, e – элементы одной циклической p -группы, $|a| > |b|$, $|d| \geq |c|$, $\gamma \not\equiv 0 \pmod{p}$, то существуют числа r и β такие, что $\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$, $a^{\beta-\gamma} = b^r$, $c^\beta = d^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проведем индукцией по $|b|$. Если $|b| = 0$, то $\beta = \gamma$, а r легко найти из второго уравнения. Пусть $|b| \neq 0$ и $|a| = p^i$. По предположению индукции “уравнение” $a^{\beta-\gamma} \equiv b^r \pmod{\langle z \rangle}$, где $z \in \langle a \rangle$ и $|z| = p$, “имеет решение”. Следовательно, существует число α такое, что $a^{\bar{\beta}-\gamma} = b^r$, где $\bar{\beta} = \beta + \alpha p^{i-1}$, и число $\bar{r} \equiv r \pmod{p^{i-1}}$ такое, что $c^{\bar{\beta}} \cdot d^{\bar{r}} = e$. Так как $|b| < p^{i-1}$, выполняется $a^{\bar{\beta}-\gamma} = b^{\bar{r}}$. Что и требовалось доказать.

Продолжим доказательство теоремы 2.

Шаг 4. Если $\min(m, t, u) = m$ и $\bar{P}, P$ – группы типа (С.б), то повторяем предыдущие рассуждения, полагая a^{p^t} вместо d .

Шаг 5. Пусть теперь $\min(t, u) = t$ (значит, $t < k$), $\bar{P}$ и P – группы типа (С.а) и $\hat{a} = a^\alpha$, $\hat{b} = b$, где $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$. Как и выше, необходимо найти α такое, что выполняются (7) и (8). Рассуждая так же, как и в доказательстве формулы (5), получаем, что из равенства

$$c^{f(\alpha)p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})} = \hat{b}^{(f(\alpha)-1)p^{s+l}\bar{\varphi}} \quad (11)$$

следует (7). Заметим, что $|c^{p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})}| \leq |\hat{b}^{p^{s+l}}| = p^k$ и $f(\alpha) \equiv \alpha \pmod{p^k}$, так как $[b, a^\alpha] = [b, a]^\alpha [b, a, a]^{\binom{\alpha}{2}} \dots [4]$. Поэтому соотношение (11) можно заменить на

$$c^{\alpha p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})} = \hat{b}^{(\alpha-1)p^{s+l}\bar{\varphi}}. \quad (12)$$

Для выполнения (12) подходящее α , очевидно, существует. При этом $\alpha - 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$, а так как $t < k$, имеет место $f(\alpha) - 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$.

7), 8) Группы типа (D) рассматриваются аналогично. На первом шаге, предполагая, что $\bar{a} = a^\alpha b^r d_1$ и $\bar{b} = b^\beta x$, где $x = a^{p^t \psi} d_2$ и $d_1, d_2 \in D$ в силу (2), (3) и $(b^{p^k} c)^{p^t} = c^{p^t} c^{p^{t+l}\varphi}$, получаем

$$\begin{aligned} (\bar{b}^{p^k} \bar{c})^{p^t} &= c^{p^t} c^{(p^{t+l}\varphi)\beta f(\alpha)} [b, a^{p^t}]^{r\psi p^t} [d_1, d_2]^{p^t}, \\ \bar{c}^{p^t} &= x^{-p^k f(\alpha)p^t} c^{\beta f(\alpha)p^t} [b, a^{p^t}]^{r\psi p^t} \bar{b}^{p^k(f(\alpha)-1)p^t} [d_1, d_2]^{p^t}, \\ \bar{c}^{p^{t+l}\bar{\varphi}} &= x^{-p^k f(\alpha)p^{t+l}\bar{\varphi}} c^{\beta f(\alpha)p^{t+l}\bar{\varphi}} [b, a^{p^t}]^{r\psi p^{t+l}\bar{\varphi}} \bar{b}^{p^k(f(\alpha)-1)p^{t+l}\bar{\varphi}} [d_1, d_2]^{p^{t+l}\bar{\varphi}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из $(\bar{b}^{p^k} \bar{c})^{p^t} = \bar{c}^{p^t} \bar{c}^{p^{t+l}\bar{\varphi}}$ следует

$$c^{\beta f(\alpha)p^{t+l}(\varphi-\bar{\varphi})} \equiv x^{-f(\alpha)(p^s+p^{s+l})\bar{\varphi}} \bar{b}^{(f(\alpha)-1)(p^s+p^{s+l})\bar{\varphi}} \pmod{\langle [b, a^{p^t}]^{p^{t+l}} \rangle D'^{p^{t+l}}} \quad (13)$$

(это аналог формулы (5)).

На втором шаге, вычислив порядок элементов в (13) (с учетом $f(\alpha) - 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$), получим, что из $\bar{\varphi} \not\equiv \varphi \pmod{p^{\min(m, t, u)}}$ следует $\bar{P} \not\cong P$.

На третьем шаге, взяв $\hat{a} = a$, $\hat{b} = b^\beta d^r$, где d – элемент максимального порядка из D , найдем r и β такие, что выполняется

$$\hat{a}^{p^s} = \hat{c}^{p^{m+l}}, \quad (14)$$

если P типа (D.b), и

$$(\widehat{b}^{p^k} \widehat{c})^{p^t} = \widehat{c}^{p^t} \widehat{c}^{p^{t+l} \overline{\varphi}}. \quad (15)$$

Рассуждая, как и при выводе формулы (13), заключаем, что (15) следует из

$$c^{\beta p^{t+l}(\varphi - \overline{\varphi})} = d^{-(p^s + p^{s+l}) \overline{\varphi}},$$

и если P – группа типа (D.a), то подходящие r и β , очевидно, существуют. Если же P – группа типа (D.b), то необходимо доказать и выполнение (14), что следует из

$$c^{p^{m+l}(\beta-1)} = d^{r p^{k+m+l}}.$$

Тогда существование подходящих r и β обеспечивает лемма 19.

На четвертом шаге повторяем предыдущие рассуждения, полагая a^{p^t} вместо d .

На пятом шаге положим $\widehat{a} = a^\alpha$, $\widehat{b} = b$. Рассуждая, как и при выводе формулы (13), получаем, что (15) следует из

$$c^{f(\alpha) p^{t+l}(\varphi - \overline{\varphi})} = \widehat{b}^{(f(\alpha)-1)(p^s + p^{s+l}) \overline{\varphi}}.$$

Отсюда вытекает существование подходящего α .

9), 10) Группы типа (E) рассматриваются аналогично. Так как $(\overline{b}^{p^k} \overline{c})^{p^t} = \overline{c}^{p^{t-l} \overline{\varphi}}$, вместо (5) нужно использовать

$$c^{\beta f(\alpha) p^{t+l}(\varphi - \overline{\varphi})} \equiv x^{-f(\alpha) p^{s-l} \overline{\varphi}} \overline{b}^{(f(\alpha)-1) p^{s-l} \overline{\varphi}} \pmod{\langle [b, a^{p^t}]^{p^{t-l}} \rangle D'^{p^{t-l}}},$$

вместо (7) – формулу $(\overline{b}^{p^k} \overline{c})^{p^t} = \overline{c}^{p^{t-l} \overline{\varphi}}$, которая следует из $c^{\beta p^{t-l}(\varphi - \overline{\varphi})} = d^{-p^{s-l} \overline{\varphi}}$.

На пятом шаге роль t играет $t-l$, а роль (12) – $c^{\alpha p^{t-l}(\varphi - \overline{\varphi})} = \overline{b}^{(\alpha-1) p^{s-l} \overline{\varphi}}$. Теорема доказана.

Автор выражает признательность В.В. Сергейчуку, привлечшему внимание к работе [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сергейчук В.В. О классификации метабелевых p -групп // Матричные задачи. Киев: ИМ АН УССР, 1977. С. 150–161.
- [2] Leong Y. K. Odd order nilpotent groups of class two with cyclic centre // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1974. V. 17. P. 142–153.
- [3] Leong Y. K. Finite 2-groups of class two with cyclic centre // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1978. V. 27. P. 125–140.
- [4] Финогонов А.А. Конечные p -группы с циклическим коммутантом // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 2. С. 233–240.
- [5] Huppert B. Endliche Gruppen. I. Grundlehren Math. Wiss. V. 134. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [6] Cooper C. D. H. Power automorphisms of a group // Math. Z. 1968. V. 107. P. 335–336.