Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Эйдерман, Мера Хаусдорфа и емкость, ассоциированная с потенциалами Коши, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 923–934

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:09:16

УДК 517.5

МЕРА ХАУСДОРФА И ЕМКОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ПОТЕНЦИАЛАМИ КОПИ

В. Я. Эйдерман

Мы изучаем связь меры Хаусдорфа $\Lambda_h(E)$ множества $E \subset \mathbb{C}$ с аналитической емкостью $\gamma(E)$ и емкостью $\gamma^+(E)$, порождаемой потенциалами Копи с неотрицательными мерами. Показываем, что если интеграл $\int_0 t^{-3} h^2(t) dt$ расходится и h удовлетворяет дополнительному условию регулярности, то найдется плоское канторово множество E , для которого $\Lambda_h(E) > 0$, но $\gamma^+(E) = 0$. Доказательство основано на оценке величины $\gamma^+(E_n)$, где E_n – множество, возникающее на n -м шаге построения плоского канторова множества.

Библиография: 17 названий.

Введение. В данной работе мы изучаем связь меры Хаусдорфа $\Lambda_h(E)$ множества $E \subset \mathbb{C}$ с аналитической емкостью $\gamma(E)$ и емкостью $\gamma^+(E)$, порождаемой потенциалами Копи с неотрицательными мерами. Приведем необходимые определения.

Функцию $h(t)$ будем называть *измеряющей*, если она непрерывна, возрастает при $t \geq 0$ и $h(0) = 0$. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – ограниченное множество. Мера Хаусдорфа $\Lambda_h(E)$ определяется равенством

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{r_i \leq \rho} \sum_i h(r_i),$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества E не более чем счетными наборами шаров с радиусами r_i , не превосходящими ρ . Аналитической емкостью компакта $E \subset \mathbb{C}$ называется величина

$$\gamma(E) = \sup \lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)|,$$

где верхняя грань берется по функциям f , аналитическим и ограниченным по модулю единицей в $\mathbb{C} \setminus E$, $f(\infty) = 0$. Понятие аналитической емкости было введено Л. Альфорсом (1947) в связи с задачей об устранимых особенностях ограниченных аналитических функций: множество E устранимо для указанного класса функций тогда и только тогда, когда $\gamma(E) = 0$. Ряд свойств величины $\gamma(E)$ приводится, например, в [1]. Определим емкость $\gamma^+(E)$:

$$\gamma^+(E) = \sup_{\mu} \int_E d\mu,$$

Работа выполнена при частичной поддержке Королевской Академии наук Швеции, Международного научного фонда, грант МВ 6000, и Госкомвуза РФ, грант № 95-0-1.7-52.

где мера μ такова, что

$$\left| \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \right| < 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad \text{supp } \mu \subseteq E, \quad d\mu \geq 0.$$

Емкости γ и γ^+ , по-видимому, тесно связаны. Неизвестно, существует ли компакт E , для которого $\gamma^+(E) = 0$, но $\gamma(E) > 0$. Величина γ^+ изучалась, например, в [2]. Мы будем рассматривать также *ньютонову емкость*

$$C(E) = \sup_{\mu} \int_E d\mu,$$

где мера μ такова, что

$$\int_E \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} < 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{supp } \mu \subseteq E, \quad d\mu \geq 0.$$

(Здесь достаточно потребовать ограниченности потенциала лишь на множестве E , по принципу максимума он будет ограничен всюду.) Непосредственно из определений следует, что

$$C(E) \leq \gamma^+(E) \leq \gamma(E). \quad (1)$$

В силу известной теоремы Пенлеве

а) если $\gamma(E) > 0$, то $\Lambda_h(E) > 0$ при

$$h(t) = t. \quad (2)$$

С другой стороны, по теореме Фростмана

б) если

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^2} dt < \infty \quad (3)$$

и $\Lambda_h(E) > 0$, то $C(E) > 0$ (см. [3, с. 35], [1, с. 73]), а значит, ввиду (1) и $\gamma(E) > 0$.

Возникает вопрос: можно ли уменьшить зазор между условиями (2) и (3) на h в утверждениях а) и б)? Пример $E = [a, b]$ показывает, что в первом из них нельзя взять $h(t) = o(t)$, $t \rightarrow 0+$. Естественно в связи с этим исследовать необходимость условия (3). (Для емкостей, порождаемых потенциалами с положительными ядрами, аналогичный вопрос изучался автором в [4], [5].) В случае $h(t) = t$ А. Г. Витушкиным [6], затем Дж. Гарнеттом [7], были построены примеры компактов E , для которых $\Lambda_h(E) > 0$, но $\gamma(E) = 0$. Более широкий класс таких множеств описан в [8]. В [9, с. 151] Л. Д. Иванов выдвинул следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. Для всякой измеряющей функции h такой, что

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^2} dt = \infty,$$

найдется компакт E такой, что $\Lambda_h(E) > 0$ и $\gamma(E) = 0$.

В [9, с. 152–153] автор отметил, что гипотеза 1 не верна без дополнительных условий регулярности на функцию h . В [1, с. 94, теорема 2.7] также формулируется утверждение, аналогичное гипотезе 1, которое доказывается при дополнительном условии: функция $a(t) = th'(t)/h(t)$ возрастает – сравнением величин $C(E)$ и $\gamma(E)$ для плоских канторовых множеств E .

Зададим последовательность положительных чисел $\{l_j\}_{j=0}^\infty$ такую, что $2l_j < l_{j-1}$, $j \geq 1$. Возьмем некоторый отрезок $E^{(0)} \subset \mathbb{R}^1$ длины l_0 . От концов этого отрезка внутрь $E^{(0)}$ отложим отрезки $E_j^{(1)}$, $j = 1, 2$, длины l_1 . Положим $E^{(1)} = E_1^{(1)} \cup E_2^{(1)}$. Далее, на каждом отрезке $E_j^{(1)}$ аналогичным образом расположим по два отрезка $E_{j,i}^{(2)}$ длины l_2 . Объединение полученных четырех отрезков $E_{j,i}^{(2)}$ обозначим через $E^{(2)}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность множеств $E^{(n)}$, причем $E^{(n)}$ состоит из 2^n отрезков длины l_n . Положим $E_n = E^{(n)} \times E^{(n)}$. Очевидно, E_n состоит из 4^n квадратов, которые обозначим через $E_{n,j}$. Наконец, положим $E = \bigcap_{n=0}^\infty E_n$. Множество $E = E(\{l_j\})$ называется *плоским канторовым множеством*.

В [1, с. 88, теорема 2.2] утверждается, что если $E = E(\{l_j\})$ и последовательность $\{l_{j+1}/l_j\}$ не возрастает, то $C(E) = 0 \iff \gamma(E) = 0$. В [9, с. 153] указано, что в доказательстве этого утверждения есть пробел. В [10, теорема 3.9] П. Маттила показал, что и само утверждение неверно. А именно, если последовательность $\{l_{j+1}/l_j\}$ не возрастает, а измеряющая функция h такова, что $h(l_j) = 4^{-j}$, $j \geq 0$, и

$$\int_0 h^2(t) dt < \infty, \quad (4)$$

то $\gamma(E(\{l_j\})) > 0$. (Более общие результаты Маттилы приводятся в п. 2.) Это утверждение означает, что

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 < \infty \implies \gamma(E(\{l_j\})) > 0, \quad (5)$$

поскольку при $h(l_j) = 4^{-j}$ сходимость интеграла в (4) равносильна сходимости ряда в (5) (см. ниже неравенства (21); нетрудно провести и обратные оценки). В то же время известно (см., например, [3, с. 38]), что

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{4^{-j}}{l_j} < \infty \iff C(E(\{l_j\})) > 0.$$

В [10] обсуждается обратимость теоремы 3.9, но этот вопрос к настоящему времени остается открытым.

В данной работе мы рассматриваем широкий класс “регулярных” множеств (включающий, в частности, канторовы множества). Мы показываем, что при сравнении емкостей γ , γ^+ и меры Хаусдорфа таких множеств критическую роль играет сходимость интеграла в (4), а не в (3). Легко убедиться, что из (3) следует (4), обратное неверно. Таким образом, гипотеза 1 и теорема 2.7 из [1] для рассматриваемого класса множеств неверны (в силу теоремы 3.8 из [10]; подробнее см. п. 1 и п. 2). Полученные результаты, относящиеся к емкости γ^+ , в некотором смысле окончательны. Важную роль в доказательстве будет играть понятие кривизны меры, введенное М. С. Мельниковым в [11].

1. Основные результаты. В дальнейшем допускается использование одинаковых обозначений для различных постоянных.

Пусть h — измеряющая функция. Назовем компакт $E \subset \mathbb{C}$ *h -регулярным*, если существуют постоянные $0 < c_1 < c_2 < \infty$ и $r_0 > 0$ такие, что

$$c_1 h(r) \leq \Lambda_h(E \cap B(x, r)) \leq c_2 h(r), \quad x \in E, \quad 0 < r \leq r_0 \quad (6)$$

(здесь и далее $B(x, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x| < r\}$). Например, если $E = E(\{l_j\})$ – канторово множество и h такова, что $h(l_j) = 4^{-j}$, то E является h -регулярным. В случае $h(r) = r$ понятие h -регулярности совпадает с регулярностью в смысле Альфорса–Давида (см., например, [12, с. 104]).

Маттила [10] установил, что условие (4) является достаточным для положительности емкости γ h -регулярных множеств. Для полноты изложения мы приведем оригинальные формулировки из [10] в п. 2, а теперь сформулируем два прямых следствия этих результатов (теоремы 1 и 2), необходимых для изучаемой нами задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть компакт $E \subset \mathbb{C}$ является h -регулярным для такой измеряющей функции h , которая удовлетворяет условию (4) и условию удвоения $h(2r) \leq ch(r)$, $r > 0$, с некоторой постоянной $c > 1$. Тогда $\gamma^+(E) > 0$.

По-видимому, условие удвоения и первое неравенство в (6) могут быть опущены. Справедлива следующая теорема, в которой эти условия отсутствуют, но вместо положительности емкости γ^+ утверждается лишь положительность γ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Lambda_h(E) > 0$, $\Lambda_h(E \cap B(x, r)) \leq c_2 h(r)$, $x \in E$, где $0 < r \leq r_0$ и постоянная $c_2 < \infty$. Пусть выполнено условие (4). Тогда $\gamma(E) > 0$.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $E = E(\{l_j\})$ – плоское канторово множество, а измеряющая функция h такова, что $h(l_j) = 4^{-j}$, $j \geq 0$, и выполнено условие (4). Тогда $\gamma^+(E) > 0$.

Следствие 1 усиливает теорему 3.9 из [10]. Из следствия 1 вытекает импликация

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 < \infty \implies \gamma^+(E(\{l_j\})) > 0,$$

причем без дополнительного условия невозрастания последовательности $\{l_{j+1}/l_j\}$.

Рассмотрим теперь вопрос о необходимости условия (4). Основными результатами данной работы являются теоремы 3 и 4.

ТЕОРЕМА 3. Пусть измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0 \frac{h^2(t)}{t^3} dt = \infty, \quad (7)$$

$$h(t_1)t_1^{-\alpha} \geq bh(t_2)t_2^{-\alpha}, \quad 0 < t_1 \leq t_2 \leq r_0, \quad (8)$$

с некоторыми постоянными $r_0 > 0$, $b \in (0, 1)$ и $0 < \alpha < \log_3 4$. Тогда найдется h -регулярный компакт $E \subset \mathbb{C}$ такой, что $\gamma^+(E) = 0$.

Возможно, условие (8) можно ослабить. Но его нельзя отбросить: нетрудно показать, что найдется такая измеряющая функция $h(t)$, для которой выполнено условие (7) и $\Lambda_h(\mathbb{C}) = 0$, т.е. h -регулярных компактов не существует (обоснование этого факта основано на идее доказательства предложения 3.3 из [5]). Заметим, что условие регулярности (8) не является слишком ограничительным; ему удовлетворяет широкий класс измеряющих функций, содержащий и функции, для которых выполнено (4), и функции со свойством (7).

Теорема 3 выводится из следующей оценки для множеств E_n , состоящих из 4^n квадратов и описанных во введении.

ТЕОРЕМА 4. Пусть плоское канторово множество $E = E(\{l_j\})$ таково, что $l_{j+1}/l_j \leq \lambda < 1/3$. Тогда найдется постоянная c , зависящая только от λ , такая, что

$$\gamma^+(E_n) < c \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $l_{j+1}/l_j \leq \lambda < 1/3$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 < \infty \iff \gamma^+(E(\{l_j\})) > 0.$$

Оценку (9) дополняет следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Найдется абсолютная постоянная $Q > 0$ такая, что

$$\gamma(E_n) > Q \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad n \geq 1. \quad (10)$$

При $l_j = 4^{-j}$ получаем $\gamma(E_n) > Q/\sqrt{n}$, что подтверждает гипотезу 1 из [13]: если $l_j = 4^{-j}$, то $\gamma(E_n) = p_n/n$, где $p_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для сравнения приведем оценку величины $C(E_n)$, вытекающую из доказательства лемм 1.3 и 1.5 работы [5]:

$$A_1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{4^{-j}}{l_j} \right)^{-1} < C(E_n) < A_2 \left(\sum_{j=1}^n \frac{4^{-j}}{l_j} \right)^{-1}, \quad n \geq 1,$$

где A_1, A_2 – абсолютные постоянные.

Неравенства (9) и (10) позволяют выдвинуть следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть $l_{j+1}/l_j \leq \lambda < 1/3$. Найдутся постоянные Q_1, Q_2 , зависящие только от λ , такие, что

$$Q_1 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 \right)^{-1/2} < \gamma^+(E_n) \leq \gamma(E_n) < Q_2 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad n \geq 1.$$

Заметим, что единственная известная автору оценка для $\gamma(E_n)$ относится к случаю $l_j = 4^{-j}$ и принадлежит Т. Мураи [14]: $\gamma(E_n) \leq c/\log n$. Неравенство (9) в этом случае дает более слабую оценку $\gamma^+(E_n) \leq c/\sqrt{n}$. Несмотря на то что функция Альфорса для E_n представима в виде потенциала Коши, мера μ в этом представлении, по-видимому, комплексная.

2. Доказательства результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В работе [10] установлена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5 [10, с. 202, теорема 3.8]. Пусть E – такой компакт в $\mathbb{C}$, для которого найдутся ненулевая борелевская мера, сосредоточенная на E , и измеряющая функция h такие, что выполнено (4) и

$$\mu(B(z, r)) \leq h(r), \quad z \in \mathbb{C}, \quad r > 0. \quad (11)$$

Тогда $\gamma(E) > 0$.

Из справедливости неравенства $\Lambda_h(E \cap B(x, r)) \leq c_2 h(r)$ при $0 < r \leq r_0$ следует, что оно выполняется и при всех $r > 0$ (возможно, с большей постоянной c_3 вместо c_2). Возьмем теперь в качестве μ меру $\mu(F) = c_3^{-1} \Lambda_h(E \cap F)$. Поскольку (11) выполнено, теорема 2 сразу следует из теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Теорема 5 выводится в [10] из теоремы 3 Мельникова [11] (будет приведена ниже). Маттила заметил, что существует и другой способ установить аналогичное утверждение, но при дополнительном условии удвоения на мере μ :

$$\mu(B(z, 2r)) \leq c\mu(B(z, r)), \quad z \in \text{supp } \mu, \quad r > 0. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 6 [10, с. 202, теорема 3.7]. *Предположим, что h и μ удовлетворяют условиям (4), (11) и (12). Тогда операторы*

$$\mathcal{C}_{\mu, \varepsilon}(g) = \int_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta): L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$$

ограничены, причем равномерно относительно ε .

Более того, Маттила указал, что методами, изложенными в [12, гл. 7], из теоремы 6 выводится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если на компакте $E \subset \mathbb{C}$ существует ненулевая борелевская мера μ , удовлетворяющая условиям (4), (11) и (12), то $\gamma(E) > 0$.*

Заметим, что методы из [12] позволяют вывести из теоремы 6 более сильное чем предложение 2

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Величину $\gamma(E)$ можно заменить на $\gamma^+(E)$.*

Далее, как и при доказательстве теоремы 2, возьмем $\mu(F) = c_3^{-1} \Lambda_h(E \cap F)$. Условия (4), (11) выполнены, а справедливость неравенства (12) следует из (6) и условия $h(2r) \leq ch(r)$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Чтобы установить h -регулярность множества E , воспользуемся следующей оценкой величины $\Lambda_h(E)$:

$$Q_1 L \leq \Lambda_h(E) \leq Q_2 L, \quad \text{где } L = \liminf_{j \rightarrow \infty} 4^j h(l_j), \quad (13)$$

а Q_1 и Q_2 – абсолютные постоянные. Оценка (13) непосредственно следует из теоремы 3.1 работы [4], если положить $k_j = 2$, $M_1 = 2$, $M_2 = 1$. Теперь заметим, что $\Lambda_h(E \cap B(x, r)) \asymp \Lambda_h(E^r)$ (т.е. отношение этих величин заключено между двумя абсолютными положительными постоянными). Здесь $E^r = E(\{l_j^r\}_{j=0}^\infty)$ – канторово множество с $l_j^r = l_{j+j_0}$, а j_0 определяется неравенствами $l_{j_0+1} \leq r < l_{j_0}$. Поскольку

$$h(l_j^r) = 4^{-(j+j_0)} = 4^{-j} h(l_{j_0}) \asymp 4^{-j} h(r),$$

то следствие 1 вытекает из оценок (13), примененных к множеству E^r .

Проверим условие удвоения. Пусть $l_{i+1} \leq r < l_i$. Тогда $l_{i+1} < 2r < l_{i-1}$. Поэтому

$$h(2r) < 4^{-i+1} = 16 \cdot 4^{-i-1} = 16 h(l_{i+1}) \leq 16 h(r).$$

Теперь неравенство $\gamma^+(E) > 0$ следует из теоремы 1.

Положим

$$\mathcal{C}\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что последовательность $\{l_j\}$ удовлетворяет условию $l_{j+1}/l_j \leq \lambda < 1/2$, $j \geq 0$, и E_n — множество, описанное во введении. Пусть μ — произвольная (вообще говоря, комплексная) мера, сосредоточенная на E_n , такая, что $|\mathcal{C}\mu(z)| < 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus E_n$. Обозначим через ν меру, которая сосредоточена на E_n , причем $\nu(E_{n,j}) = \mu(E_{n,j})$ для любых n, j , и на каждом квадрате $E_{n,j}$ распределена равномерно. Тогда $|\mathcal{C}\nu(z)| < A$, $z \in \mathbb{C}$, где постоянная A зависит только от λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся идеей доказательства леммы 2.4 из [1, с. 90]. Положим

$$f(z) = \mathcal{C}\mu(z), \quad f_{n,j}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n,j}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

$$\varphi_{n,j}(z) = \int_{E_{n,j}} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad a_{n,j} = \mu(E_{n,j}),$$

где $\gamma_{n,j}$ — контур, однократно обходящий квадрат $E_{n,j}$ и не содержащий точку z внутри себя. Как и в лемме 2.3 из [1, с. 90], $|f_{n,j}(z)| < c_1$, $z \in \mathbb{C} \setminus E_{n,j}$, где $c_1 = c_1(\lambda)$. Это следует из того, что по теореме Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_{n,j}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + f_{n,j}(z),$$

где $V_{n,j}$ — квадрат со стороной ηl_n , $\eta = 1/(2\lambda) > 1$, концентрический с $E_{n,j}$, а z достаточно близка к $\partial E_{n,j}$. Так как $\eta l_n \leq l_{n-1}/2$, то $V_{n,j} \cap E_{n,i} = \emptyset$, $i \neq j$. Далее,

$$f'_{n,j}(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n,j}} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n,j}} \left(\int_{E_{n,j}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \right) dz$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} z \int_{E_{n,j}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = -a_{n,j}.$$

Отсюда $|a_{n,j}| \leq 2l_n/\pi$. Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Пусть j таково, что $\text{dist}(z_0, E_{n,j}) = \min_k \text{dist}(z_0, E_{n,k})$. Так как $\sum_k f_{n,k} = f$, имеем

$$\mathcal{C}\nu(z_0) = \varphi_{n,j}(z_0) + \sum_{k \neq j} g_{n,k}(z_0) + \sum_{k \neq j} f_{n,k}(z_0), \quad (14)$$

где $g_{n,k} = -f_{n,k} + \varphi_{n,k}$. Поскольку

$$\sum_{k \neq j} f_{n,k}(z) = f(z) - f_{n,j}(z),$$

то

$$\left| \sum_{k \neq j} f_{n,k}(z) \right| < c_2 = c_2(\lambda), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E_n.$$

Значит, это неравенство выполняется и в точке z_0 . Далее,

$$|\varphi_{n,i}(z_0)| < \int_0^{l_n \sqrt{2}} \frac{|a_{n,i}|}{l_n^2} \frac{d\pi r^2}{r} < c_3, \quad i = 1, 2, \dots, 4^n.$$

Осталось оценить первую сумму в (14). Очевидно, $f_{n,k}(\infty) = \varphi_{n,k}(\infty) = 0$, $f'_{n,k}(\infty) = \varphi'_{n,k}(\infty) = -a_{n,k}$. Поэтому $g_{n,k}(\infty) = g'_{n,k}(\infty) = 0$. Кроме того, функция $g_{n,k}$ аналитична и ограничена по модулю некоторой постоянной $c_4 = c_4(\lambda)$ вне квадрата $E_{n,k}$. По лемме Шварца [1, с. 13] имеем

$$|g_{n,k}(z_0)| \leq c_4 \frac{\text{diam}(E_{n,k}) \gamma(E_{n,k})}{\text{dist}^2(z_0, E_{n,k})} \leq c_5 \frac{l_n^2}{\text{dist}^2(z_0, E_{n,k})}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k \neq j} |g_{n,k}(z_0)| < c_6 l_n^2 \left(\frac{4}{l_{n-1}^2} + \frac{16}{l_{n-2}^2} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{l_1^2} \right) < c_6 \sum_{i=1}^{\infty} (4\lambda^2)^i = c_7,$$

где $c_7 = c_7(\lambda)$. Лемма 1 доказана.

Нам потребуется понятие кривизны меры, введенное в [11, с. 58].

Кривизной $c(\mu)$ положительной борелевской меры μ , заданной на плоскости $\mathbb{C}$, называется число, определяемое формулой

$$c^2(\mu) = \iiint \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z),$$

где $R(x, y, z)$ – радиус окружности, проходящей через попарно различные точки x, y, z , и $1/R^2(x, y, z) = 0$, если $x = y$, или $x = z$, или $y = z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Рассмотрим некоторую положительную меру на множестве E_n , для которой $|\mathcal{C}\mu(z)| < 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus E_n$. Пусть ν – (положительная) мера из леммы 1. Тогда (см. [15], [16])

$$\begin{aligned} A^2 \nu(E_n) &\geq \int_{E_n} \left| \int_{E_n} \frac{d\nu(x)}{x-y} \right|^2 d\nu(y) = \int_{E_n} \left| \int_{E_n} \frac{d\nu(x)}{x-y} \right| \cdot \left| \int_{E_n} \frac{d\nu(z)}{z-y} \right| d\nu(y) \\ &= \iiint_{E_n^3} \frac{1}{x-y} \frac{1}{z-y} d\nu(x) d\nu(y) d\nu(z) = \frac{1}{6} c^2(\nu). \end{aligned}$$

Положим $a_{k,j} = \nu(E_{k,j})$. Покажем, что

$$c^2(\nu) = \iiint_{E_n^3} \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\nu(x) d\nu(y) d\nu(z) > c_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{l_k^2} \sum_{j=1}^{4^k} a_{k,j}^3. \quad (15)$$

Рассмотрим некоторый квадрат $E_{k,j}$, $1 \leq k \leq n-1$. Из четырех квадратов $E_{k+1,i}$, входящих в $E_{k,j}$, выберем три, для которых величины $a_{k+1,i}$ наибольшие. Положим $S_{k,j} = \{(x, y, z) \in E_{k,j}^{(3)} : x, y, z \text{ принадлежат трем попарно различным выбранным квадратам } E_{k+1,i}\}$, $S_{n,j} = E_{n,j}^{(3)}$. Очевидно,

$$c^2(\nu) \geq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{4^k} \iiint_{S_{k,j}} \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\nu(x) d\nu(y) d\nu(z).$$

Заметим, что при $(x, y, z) \in S_{k,j}$, $k < n$, выполнено $R(x, y, z) < Ml_k$, где $M = M(\lambda)$. Это следует из того, что $\lambda < 1/3$. Назовем квадрат $E_{k,j}$ *уравновешенным*, если в нем найдутся такие три квадрата $E_{k+1,i}$, для каждого из которых $a_{k+1,i} > 0.01a_{k,j}$. Квадраты $E_{n,j}$, $j = 1, \dots, 4^n$, также будем считать уравновешенными. Нетрудно видеть, что если квадрат $E_{k,j}$ уравновешенный, то

$$\iiint_{S_{k,j}} \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\nu(x) d\nu(y) d\nu(z) > c_2 \frac{a_{k,j}^3}{l_k^2}. \quad (16)$$

Пусть теперь квадрат $E_{k,j}$ не является уравновешенным. В него входят четыре квадрата $E_{k+1,i}$. Выделим тот из них, причем только один, для которого величина $a_{k+1,i}$ наибольшая, и обозначим его через $E_{k+1,i(j)}$. Покажем, что

$$a_{k+1,i(j)} \geq 0.49a_{k,j}. \quad (17)$$

Действительно, не менее чем два из четырех квадратов $E_{k+1,i}$, входящих в $E_{k,j}$, имеют массу $a_{k+1,i} \leq 0.01a_{k,j}$. Поэтому на остальные два квадрата $E_{k+1,i}$ из $E_{k,j}$ приходится масса, не меньшая чем $0.98a_{k,j}$, откуда и следует (17).

Таким образом, каждый неуравновешенный квадрат входит в цепочку вложенных квадратов, притом только в одну:

$$E_{k_p, j_p} \subset E_{k_{p-1}, j_{p-1}} \subset \dots \subset E_{k_1, j_1},$$

где $k_{t+1} = k_t + 1$, $j_{t+1} = i(j_t)$, $t = 1, \dots, p-1$, $p \geq 2$, причем квадрат E_{k_p, j_p} уравновешенный, квадраты E_{k_t, j_t} , $t = 1, \dots, p-1$, неуравновешенные, и не существует неуравновешенного квадрата $E_{k_1-1, j}$, для которого $i(j) = j_1$. Используя (16), (17), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^p \iiint_{S_{k_t, j_t}} \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\nu(x) d\nu(y) d\nu(z) &> \iiint_{S_{k_p, j_p}} \frac{1}{R^2(x, y, z)} d\nu(x) d\nu(y) d\nu(z) \\ &> c_2 \frac{a_{k_p, j_p}^3}{l_{k_p}^2} = c_3 \frac{a_{k_p, j_p}^3}{l_{k_p}^2} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{3^{-2}}{0.49^3} \right)^N > c_3 \sum_{N=0}^{p-1} \frac{a_{k_{p-N}, j_{p-N}}^3}{l_{k_{p-N}}^2} = c_3 \sum_{t=1}^p \frac{a_{k_t, j_t}^3}{l_{k_t}^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались соотношениями

$$\frac{a_{k_{p-N}, j_{p-N}}}{a_{k_p, j_p}} \leq \frac{1}{0.49^N}, \quad \frac{l_{k_p}}{l_{k_{p-N}}} \leq \lambda^N < \frac{1}{3^N}.$$

Объединяя (16) и (18), получаем (15).

Заметим теперь, что

$$\sum_{j=1}^{4^k} a_{k,j} = \nu(E_n), \quad 1 \leq k \leq n.$$

При этом величина $\sum_{j=1}^{4^k} a_{k,j}^3$ достигает минимума, когда все слагаемые $a_{k,j}$ равны между собой, т.е. $a_{k,j} = \nu(E_n)4^{-k}$, $j = 1, \dots, 4^k$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{4^k} a_{k,j}^3 \geq 4^k (\nu(E_n)4^{-k})^3 = (\nu(E_n))^3 4^{-2k}.$$

Отсюда и из (15) имеем

$$A^2 \nu(E_n) > \frac{c_1}{6} (\nu(E_n))^3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{4^{-k}}{l_k} \right)^2,$$

т.е.

$$\mu(E_n) = \nu(E_n) < c \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{4^{-k}}{l_k} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

и теорема 4 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть измеряющая функция h удовлетворяет условию (8) с некоторыми постоянными $r_0 > 0$, $b \in (0, 1)$ и $\alpha \in (0, \log_3 4)$. Тогда для любого $l_0 \in (0, r_0]$ существуют числа $l_j > 0$ такие, что $l_j \leq \lambda l_{j-1}$, $j \geq 1$, $c \lambda = 4^{-1/\alpha} < 1/3$, и

$$b 4^{-j} h(l_0) \leq h(l_j) \leq 4^{-j} h(l_0). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $N_0 = 0$. Пусть при некотором $i \geq 0$ числа $N_1, \dots, N_i$ уже определены, и при некотором $j > N_i$ числа $l_1, \dots, l_{j-1}$ построены, причем

$$h(l_{N_i}) = 4^{-N_i} h(l_0). \quad (20)$$

Возможны два случая.

1) $h(\lambda l_{j-1}) \geq 4^{N_i-j} h(l_{N_i})$. Тогда полагаем $N_{i+1} = j$ и величину l_j определяем из равенства $h(l_j) = 4^{N_i-j} h(l_{N_i})$. Ясно, что $l_j \leq \lambda l_{j-1}$, выполнено условие (19) и имеет место (20) с индексом $i+1$ вместо i .

2) $h(\lambda l_{j-1}) < 4^{N_i-j} h(l_{N_i})$. Тогда полагаем $l_j = \lambda l_{j-1}$. Из (20) следует, что второе неравенство в (19) выполнено. Поскольку $l_j = \lambda l_{j-1}$ при $N_i + 1 \leq j < N_{i+1}$, то $l_j/l_{N_i} = \lambda^{j-N_i}$. Отсюда в силу (8) и (20) имеем

$$h(l_j) \geq b h(l_{N_i}) \left(\frac{l_j}{l_{N_i}} \right)^\alpha = b 4^{-N_i} h(l_0) \lambda^{\alpha(j-N_i)} = b 4^{-N_i} h(l_0) 4^{-(j-N_i)} = b 4^{-j} h(l_0),$$

что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Возьмем последовательность $\{l_j\}$, существование которой утверждается в лемме 2, и соответствующее канторово множество $E = E(\{l_j\})$. Покажем, что множество E является искомым. Используя (19), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4^{-k}}{l_k} \right)^2 &= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4^{-(k-1)}}{l_k} \right)^2 \geq \frac{1}{16 h(l_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{h(l_{k-1})}{l_k} \right)^2 \\ &\geq c \sum_{k=1}^{\infty} \int_{l_k}^{l_{k-1}} \frac{dh^2(t)}{t^2} = c \int_0^{l_0} \frac{dh^2(t)}{t^2} = \infty, \end{aligned} \quad (21)$$

поскольку интегралы $\int_0 t^{-3} h^2(t) dt$ и $\int_0 t^{-2} dh^2(t)$ сходятся или расходятся одновременно. Отсюда и из (9) следует, что $\gamma^+(E) = 0$. Доказательство h -регулярности множества E проводится так же, как и в следствии 1, с использованием неравенств (13) и (19).

Доказательство предложения 1 основывается на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 7 [11, с. 59, теорема 3]. Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}$

$$\gamma(E) \geq P \cdot \sup \{ (\mu(E))^{3/2} (\mu(E) + c^2(\mu))^{-1/2} \},$$

где P – абсолютная постоянная и супремум берется по всем положительным борелевским мерам μ таким, что $\text{supp } \mu \subset E$ и $\mu(B(z, r)) \leq r$ для любого диска $B(z, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть задано $r < l_0$ и число k таково, что $l_k \leq r < l_{k-1}$. Тогда каждый круг радиуса r содержит не более чем A квадратов $E_{k,j}$, где $A > 4$ – абсолютная постоянная. Обозначим

$$M = \frac{1}{A} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{4^{-j}}{l_j} \right)^2 \right)^{-1/2}.$$

В качестве μ возьмем меру такую, что $\mu(E_{n,j}) = 4^{-n} M$, $j = 1, \dots, 4^n$, которая на каждом квадрате $E_{n,j}$ распределена равномерно. Очевидно, $\mu(E) = M$. При $r < l_0$ и k таком, что $l_k \leq r < l_{k-1}$, имеем

$$\mu_z(r) := \mu(B(z, r)) \leq AM4^{-k} < l_k \leq r.$$

При $r \geq l_0$ будет $\mu_z(r) \leq M < l_1 < r$, и условие теоремы 7 выполнено.

В [8, с. 198] показано, что для любой конечной положительной борелевской меры μ на $\mathbb{C}$

$$c^2(\mu) \leq 12 \int_{\mathbb{C}} \int_0^\infty \frac{\mu_z(r)}{r^2} d\mu_z(r) d\mu(z). \quad (22)$$

Для рассматриваемой меры μ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mu_z(r)}{r^2} d\mu_z(r) &= \int_0^{l_n} \frac{\mu_z(r)}{r^2} d\mu_z(r) + \sum_{k=1}^n \int_{l_k}^{l_{k-1}} \frac{\mu_z(r)}{r^2} d\mu_z(r) + \int_{l_0}^\infty \frac{\mu_z(r)}{r^2} d\mu_z(r) \\ &< \pi^2 M^2 \left(\frac{4^{-n}}{l_n} \right)^2 + A^2 M^2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{4^{-k}}{l_k} \right)^2 + \frac{M^2}{l_0^2} < A_1, \end{aligned}$$

и в силу (22) $c^2(\mu) \leq A_2 M$. Из теоремы 7 получаем неравенство $\gamma(E) > A_3 M$, что и требовалось.

Автор признателен факультету математики университета Упсалы (Швеция) за прекрасные условия, в которых было начато данное исследование, а профессору М. Эссену за гостеприимство и поддержку этого начинания. Я благодарен также профессору П. Маттиле и профессору С. Я. Хавинсону за очень полезное обсуждение данной проблематики.

ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. В апреле 1998 года перед выходом данной работы профессор М. С. Мельников сообщил автору о диссертации Х. Толсы [17]. В этой работе показано, в частности, что имеет место усиленная версия теоремы 7 М. С. Мельникова: вместо $\gamma(E)$ можно взять $\gamma^+(E)$. При этом согласно теореме 6 для μ и h , удовлетворяющих условиям (4) и (11), выполнено $c^2(\mu) > 0$. Следовательно, в теореме 5 также можно взять γ^+ вместо γ . Отсюда сразу получается следующее усиление теорем 1 и 2: в условиях теоремы 2 выполнено $\gamma^+(E) > 0$. Если применить результат работы [17]

при доказательстве предложения 1, то получится неравенство (10) с γ^+ вместо γ . Тем самым, первое неравенство в гипотезе 2 оказывается доказанным. Вопрос о справедливости второго неравенства остается открытым. В [17] получено также другое доказательство следствия 2.

Автор благодарен М.С. Мельникову и Х. Толсе за информацию о работе [17] и обсуждение ряда открытых вопросов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Garnett J. Analytic Capacity and Measure. Lecture Notes in Math. V. 297. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1972.
- [2] Murai T. A Real Variable Method for the Cauchy Transform, and Analytic Capacity. Lecture Notes in Math. V. 1307. Berlin: Springer, 1988.
- [3] Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
- [4] Эйдерман В.Я. О сравнении меры Хаусдорфа и емкости // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 6. С. 173–188.
- [5] Эйдерман В.Я. Оценки потенциалов и δ -субгармонических функций вне исключительных множеств // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 181–218.
- [6] Витушкин А.Г. Пример множества положительной длины и аналитической емкости нуль // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 246–249.
- [7] Garnett J. Positive length but zero analytic capacity // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. P. 696–699.
- [8] Mattila P. A class of sets with positive length and zero analytic capacity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I Math. 1985. V. 10. P. 387–395.
- [9] Havin V.P., Nikolski N.K. (ed.) Linear and Complex Analysis Problem Book 3. Part 2. Lecture Notes in Math. V. 1574. Berlin: Springer, 1994.
- [10] Mattila P. On the analytic capacity and curvature of some Cantor sets with non- σ -finite length // Publ. Mat. 1996. V. 40. № 1. P. 195–204.
- [11] Мельников М.С. Аналитическая емкость: дискретный подход и кривизна меры // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 57–76.
- [12] Christ M. Lectures on Singular Integral Operators. Expository Lectures from the CBMS Regional Conference Held at the University of Montana, Missoula (M.T.), August 28–September 1, 1989. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. V. 77. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1990.
- [13] Eiderman V.Ya. Analytic capacity of Cantor sets // Proceedings of the International Conference on Potential Theory (Kouty, Czech Republic, 1994) / ed. I. Netuka et al. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1995.
- [14] Murai T. Construction of H^1 functions concerning the estimate of analytic capacity // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19. P. 154–160.
- [15] Melnikov M.S., Verdera J. A geometric proof of the L^2 -boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs // Internat. Math. Res. Notices. 1995. № 7. P. 325–331.
- [16] Mattila P., Melnikov M.S., Verdera J. The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability // Ann. of Math. (2). 1996. V. 144. № 1. P. 127–136.
- [17] Tolsa X. Curvature of Measures, Cauchy Singular Integral and Analytic Capacity. Thesis. Barcelona: Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 1998.