Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Юров, О p -адических функциях, сохраняющих меру Хаара, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 935–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 06:28:26

УДК 511.6

О p -АДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ МЕРУ ХААРА

И. А. Юров

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – равномерно распределенная последовательность целых p -адических чисел. Статья посвящена изучению непрерывных функций, близких к дифференцируемым в p -адической метрике: последовательность $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно распределена над кольцом целых p -адических чисел; последовательности $\{f_k(\varphi_k(a_n))\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно распределены над кольцом вычетов по $\text{mod } p^k$ для всех достаточно больших k , где φ_k – канонический эпиморфизм кольца целых p -адических чисел на кольцо вычетов по $\text{mod } p^k$ и f_k – функция, индуцированная f на кольце вычетов по $\text{mod } p^k$ (т.е. $f_k(x) = f(\varphi_k(x)) \pmod{p^k}$). Эти функции могут быть использованы, например, при построении генераторов псевдослучайных чисел.

Библиография: 5 названий.

Пусть $f(x)$ – функция, заданная на множестве всех целых p -адических чисел $\mathbb{I}_p$, принимающая значения из этого множества, $\varphi_k: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^k$ – канонический эпиморфизм кольца $\mathbb{I}_p$ на кольцо вычетов $\mathbb{Z}/p^k$ по $\text{mod } p^k$, а $f_k(x)$ – функция, индуцированная $f(x)$ на $\mathbb{Z}/p^k$ (т.е. $f_k(x) = f(\varphi_k(x)) \pmod{p^k}$). Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – равномерно распределенная последовательность целых p -адических чисел.

Статья посвящена изучению непрерывных функций, близких (в некотором точно определенном далее смысле) к дифференцируемым в p -адической метрике функциям: последовательность $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно распределена над $\mathbb{I}_p$; последовательности $\{f_k(\varphi_k(a_n))\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно распределены над $\mathbb{Z}/p^k$ для всех достаточно больших k . Эти функции могут быть использованы, например, при построении генераторов псевдослучайных чисел.

Дадим точные формулировки полученных результатов.

Пусть A – пространство с заданной вероятностной мерой μ (например, μ – мера Хаара). Напомним необходимые определения теории равномерно распределенных последовательностей, следуя [1].

В данной работе рассмотрены следующие случаи:

- 1) A – компактная топологическая группа, изоморфная аддитивной группе кольца $\mathbb{I}_p$;
- 2) A – дискретная топологическая группа.

В случае 1) множества $a + p^k \mathbb{I}_p$, $k = 1, 2, \dots$, $a \in \mathbb{I}_p$, образуют базу топологического пространства A , причем $\mu(a + p^k \mathbb{I}_p) = p^{-k}$. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{I}_p$, называется *равномерно распределенной над $\mathbb{I}_p$* (см. [1]), если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \nu_N(a + p^k \mathbb{I}_p) = p^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad a_n \in \mathbb{I}_p$$

(здесь $\nu_N(U)$ – число тех $a_0, \dots, a_N$, которые лежат в U).

В случае 2) каждое подмножество из A является открытым и замкнутым одновременно $\mu(U) = |U| \cdot |A|^{-1}$. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $a_n \in A$, называется *равномерно распределенной*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \nu_N(U) = \frac{|U|}{|A|}$$

для каждого $U \subset A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1]). Измеримая функция $f: A \rightarrow A$ (т.е. $f^{-1}(U)$ μ -измеримо при μ -измеримом U) *сохраняет меру*, если $\mu(f^{-1}(U)) = \mu(U)$ для каждого измеримого множества U .

Везде далее $f(x)$ – функция, заданная на $\mathbb{I}_p$, принимающая значения из этого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [1]). Функция $f(x)$ *асимптотически сохраняет меру*, если существует натуральное число B такое, что для любого $n \geq B$ функция f_n биективна на $\mathbb{Z}/p^k$. Минимальное такое B для данной f обозначим через $B(f)$.

В дальнейшем будем говорить, что f *биективна по mod p^k* , если f_k биективна на $\mathbb{Z}/p^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [2]). Функция $f(x)$ называется *асимптотически консервативной*, если существует натуральное число P такое, что для любого $n \geq P$ из $a = b \pmod{p^n}$ следует $f(a) = f(b) \pmod{p^n}$. Минимальное такое P для данной f обозначим через $P(f)$. Если $P(f) = 1$, то будем говорить, что $f(x)$ – *консервативная функция*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [2]). Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой по mod p^k в точке $u \in \mathbb{I}_p$* , если существует натуральное число N и p -адическое число $d_k f(u)$ такие, что для любых $n > N$ и $h \in \mathbb{I}_p$

$$f(u + p^n h) = f(u) + p^n h d_k f(u) \pmod{p^{n+k}}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [2]). Функция $f(x)$ называется *равномерно дифференцируемой по mod p^k* (равномерно дифференцируемой по mod p^n), если существуют натуральное число N и функция $d_k f(u)$, заданная на $\mathbb{I}_p$ и принимающая значения из поля p -адических чисел, такие, что для любых $n \geq N$, $h \in \mathbb{I}_p$, $x \in \mathbb{I}_p$ выполняется соотношение (1). Минимальное такое N для данной $f(x)$ обозначим через $N_k(f)$.

Функции, сохраняющие меру (асимптотически сохраняющие меру), позволяют из данной равномерно распределенной над $\mathbb{I}_p$ последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ строить новые равномерно распределенные над $\mathbb{I}_p$ последовательности $\{f(a_n)\}_{n=0}^\infty$ (равномерно распределенные над $\mathbb{Z}/p^k$ последовательности $\{f_k(\varphi_k(a_n))\}_{n=0}^\infty$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$) [2, предложение 1.2].

В работах [2], [3] изучались асимптотически консервативные функции, сохраняющие меру Хаара (асимптотически сохраняющие меру Хаара). В классе асимптотически консервативных равномерно дифференцируемых по mod p функций понятия “функция f сохраняет меру” и “функция f асимптотически сохраняет меру” совпадают. В работах [2], [3] описаны сохраняющие меру Хаара функции в классе асимптотически консервативных равномерно дифференцируемых по mod p функций. В частности, получено

описание консервативных полиномиальных функций (т.е. заданных некоторым полиномом над полем p -адических чисел), сохраняющих меру Хаара.

В данной работе изучаются равномерно дифференцируемые по $\bmod p$ функции, сохраняющие меру Хаара или асимптотически сохраняющие меру Хаара, не являющиеся асимптотически консервативными. Оказалось, что в этом случае понятия “функция f сохраняет меру” и “функция f асимптотически сохраняет меру” уже не совпадают.

Теорема 1 работы описывает все равномерно дифференцируемые по $\bmod p$ функции $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$, сохраняющие меру. А. А. Нечаев построил пример равномерно дифференцируемой по $\bmod p$, асимптотически сохраняющей меру функции, которая не является асимптотически консервативной. Именно, функция, заданная полиномом $\frac{1}{2}(x_2 + x)$ при $p = 2$, асимптотически сохраняет меру. Теорема 3 описывает все равномерно дифференцируемые по $\bmod p$ функции $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$, асимптотически сохраняющие меру, которые не являются асимптотически консервативными. Оказалось, что такие функции существуют лишь при $p = 2$, а в классе полиномиальных функций приведенный выше пример представляет собой в некотором смысле единственное исключение. Именно, если $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ – асимптотически сохраняющая меру функция, заданная полиномом над полем p -адических чисел, которая не является асимптотически консервативной функцией, то $p = 2$ и $f(x) = V(\frac{1}{2}(x^2 + x))$, где $V: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ – асимптотически консервативная, сохраняющая меру функция, заданная полиномом над полем p -адических чисел.

1. Вспомогательные результаты. В этом пункте приведены вспомогательные утверждения, которые необходимы для доказательства основных результатов работы.

Через $\|\cdot\|_p$ обозначим p -адическую норму p -адического числа. Из предложения 2.12 работы [2] следует, что для равномерно дифференцируемой по $\bmod p^k$ функции f величина $\|d_k f(x)\|_p$ ограничена на множестве $\mathbb{I}_p$. Через s обозначим минимальное целое число такое, что $\|d_k f(x)\|_p \leq p^s, x \in \mathbb{I}_p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ равномерно дифференцируема по $\bmod p^k$ и $\|d_k f(x)\|_p \geq 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$. Тогда существует натуральное число $R \geq s$ такое, что для любого $i, 0 \leq i \leq p^R - 1$, функция $f_i(x) = f(i + p^R x)$ представима в виде $f_i(x) = c_i + p^{R-\varphi(i)} F_i(x)$, где

- 1) $\|d_k f(i + p^R x)\|_p = p^{\varphi(i)}, \varphi(i) \geq 0$;
- 2) $0 \leq c_i \leq p^{R-\varphi(i)} - 1$;
- 3) функция $F_i: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ консервативна, равномерно дифференцируема по $\bmod p^{k+\varphi(i)}$ и асимптотически сохраняет меру, причем

$$d_{k+\varphi(i)} F_i(x) = p^{\varphi(i)} d_k f(i) \pmod{p^{k+\varphi(i)}}, \quad x \in \mathbb{I}_p, \quad N_{k+\varphi(i)}(F_i) \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $s = 0$ из условия следует, что $\|d_k f(x)\|_p = 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$. В силу следствия 5.10 из [3] функция $f(x)$ не является асимптотически сохраняющей меру лишь потому, что $f(x)$ не биективна по $\bmod p^{N_1(f)}$. Как легко показать, существует функция $L: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ такая, что для любого $h \in \mathbb{I}_p$ $L(x + p^{N_1(f)} h) = L(x)$ и функция $f + L$ биективна по $\bmod p^{N_1(f)}$, причем $N_1(f + L) \leq N_1(f)$. Пусть R – натуральное число и $R \geq N_k(f)$. Для любого $i, 0 \leq i \leq p^R - 1$, рассмотрим функцию $\bar{F}_i: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$

$$\bar{F}_i(x) = p^{-R}(f(i + p^R x) + L(i + p^R x) - f(i) - L(i)).$$

Легко видеть, что функция $\overline{F}_i$ равномерно дифференцируема по $\text{mod } p^k$, консервативна и асимптотически сохраняет меру. Тогда

$$f(i + p^R x) = f(i) + L(i) - L(i + p^R x) + p^R \overline{F}_i(x).$$

Согласно выбору R и определению функции L имеем

$$f(i + p^R x) = f(i) \pmod{p^R} + p^R (\overline{F}_i(x) + b_i), \quad \text{где } f(i) = f(i) \pmod{p^R} + p^R b_i.$$

Свойства функции $F_i(x) = \overline{F}_i(x) + b_i$, перечисленные в 3), имеют место при любом $b_i \in \mathbb{I}_p$. Для $s = 0$ утверждение доказано.

В случае $s > 0$ рассмотрим $r \geq \max\{N_k(f), s\}$. Пусть

$$\begin{aligned} \overline{F}_i(x) &= p^{-(r-\varphi(i))} (f(i + p^r x) - f(x)), \quad i = 0, \dots, p^r - 1. \\ \|d_k f(i)\|_p &= p^{\varphi(i)}, \quad s \geq \varphi(i) \geq 0, \end{aligned}$$

Легко показать, что функция $\overline{F}_i: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ консервативна, равномерно дифференцируема по $\text{mod } p^{k+\varphi(i)}$, причем $d_{k+\varphi(i)} \overline{F}_i(x) = p^{\varphi(i)} d_k f(i) \pmod{p^{k+\varphi(i)}}$, $N_{k+\varphi(i)}(\overline{F}_i) \leq 1$. Если функция $\overline{F}_i$ не является асимптотически сохраняющей меру, то лишь потому, что $\overline{F}_i$ не биективна по $\text{mod } p^{N_1(f)}$. Из $N_1(\overline{F}_i) \leq N_{k+\varphi(i)}(\overline{F}_i)$ следует $N_1(\overline{F}_i) \leq 1$. Пользуясь тем, что для $s = 0$ утверждение доказано, представим функцию $\overline{F}_i(j + px)$ в виде

$$\overline{F}_i(j + px) = c_j(x) + p F_{i,j}(x), \quad j = 0, \dots, p-1, \quad 0 \leq c_j(i) \leq p-1,$$

где $F_{i,j}$ удовлетворяет условию 3) утверждения. Тогда

$$f(i + p^r j + p^{r+1} x) = f(i) + p^r c_j(i) + p^{r+1} F_{i,j}(x).$$

Для завершения доказательства осталось представить число $f(i) + p^r c_j(i)$ в виде $(f(i) + p^r c_j(i)) \pmod{p^{r+1}} + p^{r+1} b_{i,j}$ и заметить, что перечисленные в условии 3) свойства функции $F_{i,j}(x)$ сохраняются при добавлении к ней любой целой константы из $\mathbb{I}_p$. Утверждение доказано.

Введем дополнительные обозначения.

Положим $R(f) = 1 + \max\{N_k(f), s\}$. Пусть $R \geq R(f)$. Для $t = 0, \dots, p^R - 1$ через $M_j(t)$ обозначим множество тех i , $0 \leq i \leq p^R - 1$, для которых $\varphi(i) = j$ ($\|d_k f(i)\|_p = p^{\varphi(i)} = p^j$) и $f(i) = t \pmod{p^{R-j}}$. Пусть $r_j(t) = |M_j(t)|$, $M(t) = \bigcup_{j=0}^s M_j(t)$, $r(t) = |M(t)|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ равномерно дифференцируема по $\text{mod } p^k$ и $1 \leq \|d_k f(i)\|_p \leq p^s$. Функция f асимптотически сохраняет меру тогда и только тогда, когда

- 1) $r_0(t)p^s + \dots + r_s(t) = p^s$ для любого t , $0 \leq t \leq p^R - 1$;
- 2) величины $p^{-(n-s)}(f(x) - A) \pmod{p^s}$ образуют полную систему вычетов по $\text{mod } p^s$, в зависимости от того является ли x , $0 \leq x \leq p^n - 1$, решением сравнения $f(x) = A \pmod{p^{n-s}}$, для любых $n \geq R$ и A , $0 \leq A \leq p^{n-s} - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq A \leq p^{n-s} - 1$, $A = t \pmod{p^R}$. Для любых $n \geq R$ и $i \in M_j(t)$ число решений сравнения

$$f(x) = A \pmod{p^{n-s}} \quad (2)$$

таких, что $x = i \pmod{p^R}$, равно p^{s-j} . Общее число решений сравнения (2), лежащих в $\{0, \dots, p^n - 1\}$, равно $r_0(t)p^s + \dots + r_s(t) = p^s$. Пусть f – асимптотически сохраняющая меру функция. Тогда для любого $n \geq R \geq R(f)$ $f(x)$ биективна по $\pmod{p^n}$ и, следовательно, $r_0(t)p^s + \dots + r_s(t) = p^s$. Доказательство условия 2) и доказательство утверждения 2 в обратную сторону опущены за очевидностью.

2. Равномерно дифференцируемые по $\pmod{p}$ функции, сохраняющие меру Хаара. В этом пункте приведены необходимые и достаточные условия того, что равномерно дифференцируемая по $\pmod{p}$ функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ сохраняет меру Хаара. Из этого критерия, в частности, следует, что в классе равномерно дифференцируемых по $\pmod{p}$, асимптотически консервативных функций $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ понятия “ f сохраняет меру” и “ f асимптотически сохраняет меру” совпадают.

ТЕОРЕМА 1. *Равномерно дифференцируемая функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ сохраняет меру тогда и только тогда, когда*

- 1) $\|d_1 f(x)\|_p \geq 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$;
- 2) для любого t , $0 \leq t \leq p^R - 1$, справедливо равенство

$$r_0(t) + r_1(t)p^{-1} + \dots + r_s(t)p^{-s} = 1. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $T(a, k) = a + p^k \mathbb{I}_p$, $a = 0, \dots, p^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, – база топологического пространства $x \in \mathbb{I}_p$. Обозначим через μ меру Хаара на $\mathbb{I}_p$. Тогда $\mu(T(a, k)) = p^{-k}$. Покажем, что функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ сохраняет меру μ на $\mathbb{I}_p$ тогда и только тогда, когда

$$\mu(f^{-1}(T(a, k))) = p^{-k} \quad (4)$$

для любых $k \geq k_0$, $a = 0, \dots, p^k - 1$, где k_0 – произвольное натуральное число. Для любого открытого подмножества U из $\mathbb{I}_p$ равенство $\mu(U) = \mu(f^{-1}(U))$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено (4) для любых $k = 1, 2, \dots$, $a = 0, \dots, p^k - 1$. Действительно, пусть $U = \bigcup_{i \in J} T(a_i, k_i)$. Будем считать, что $a_i \neq a_j \pmod{p^\nu}$, $\nu = \min\{k_i, k_j\}$, для любых $i, j \in J$, $i \neq j$ (если $a_i = a_j \pmod{p^{k_i}}$ и $k_j \geq k_i$, то $T(a_j, k_j) \cup T(a_i, k_i) = T(a_i, k_i)$). Тогда $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(T(a_i, k_i))$. Но для любых $i, j \in J$, $i \neq j$,

$$f^{-1}(T(a_i, k_i)) \cap f^{-1}(T(a_j, k_j)) = \emptyset$$

(если $x \in f^{-1}(T(a_i, k_i)) \cap f^{-1}(T(a_j, k_j))$, то $f(x) \in T(a_i, k_i) \cap T(a_j, k_j)$, а это противоречит выбору a_i, a_j). Следовательно,

$$\mu(f^{-1}(U)) = \sum_{i \in J} \mu(f^{-1}(T(a_i, k_i))).$$

Однако, $T(a, w) = \bigcup_i T(a + p^{-w+k_0}i, k_0)$, $i = 0, \dots, p^{-w+k_0} - 1$, для любых $w = 1, \dots, k_0 - 1$, $a = 0, \dots, p^w - 1$. Следовательно, функция f сохраняет меру тогда и только тогда, когда $\mu(f^{-1}(T(a, k))) = p^{-k}$ для всех $k \geq k_0$, $a = 0, \dots, p^k - 1$.

Покажем, что если функция f равномерно дифференцируема по $\bmod p$ и сохраняет меру μ , то $\|d_1 f(x)\|_p \geq 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$. Действительно, пусть $u \in \mathbb{I}_p$ такое, что $\|d_1 f(x)\|_p \leq 0$. Из равномерной дифференцируемости по $\bmod p$ функции f следует, что для любого $h \in \mathbb{I}_p$ справедливо сравнение

$$f(u + p^{n-1}h) = f(u) + d_1 f(u)p^{n-1}h \pmod{p^n}, \quad n \geq N_1(f).$$

Но $\|d_1 f(x)\|_p \leq 0$, значит $f(u + p^{n-1}h) = f(u) \pmod{p^n}$ для любого $h \in \mathbb{I}_p$. Следовательно, $f^{-1}(f(u + p^n \mathbb{I}_p)) \supset u + p^{n-1} \mathbb{I}_p$ и

$$\mu(f^{-1}(f(u + p^n \mathbb{I}_p))) \geq \mu(u + p^{n-1} \mathbb{I}_p) = p^{-n+1},$$

а по условию $\mu(f^{-1}(f(u + p^n \mathbb{I}_p))) = p^{-n}$. Найдем $\mu(f^{-1}(T(a, n)))$, где $n \geq R \geq R(f)$. Пусть K – множество всех решений сравнений $f(x) = a \pmod{p^n}$, содержащихся в $\{0, \dots, p^{n+s} - 1\}$. Из равномерной дифференцируемости по $\bmod p$ функции f следует, что для любого $h \in \mathbb{I}_p$ $f(x_0 + p^{n+s}h) = a \pmod{p^n}$, $x_0 \in K$. Тогда

$$f^{-1}(T(a, n)) = \bigcup_{x \in K} T(x, n+s) \quad \text{и} \quad \mu(f^{-1}(T(a, n))) = p^{-n-s}|K|.$$

Через $\bar{a}$ обозначим наименьший неотрицательный вычет числа a по $\bmod p^R$. Покажем, что при $\|d_1 f(x)\|_p \geq 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$ выполняется соотношение $|K| = r_s(\bar{a}) + \dots + r_0(\bar{a})p^s$. Действительно, пусть $i \in M_j(\bar{a})$. Согласно утверждению 1

$$f(i + p^R x) = c_i + p^{R-\varphi(i)} g_i(x), \quad c_i = \bar{a} \pmod{p^{R-\varphi(i)}},$$

где функция $g: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ консервативна, равномерно дифференцируема по $\bmod p$ и асимптотически сохраняет меру μ . Тогда число элементов множества K таких, что $x_i \in K \cap \{0, \dots, p^{n-s} - 1\}$ и $x_i = i \pmod{p^R}$, равно $p^{R-\varphi(i)}$. Таким образом,

$$\mu(f^{-1}(T(a, n))) = p^{-n} \sum_{j=0}^s p^{-j} c_j(\bar{a}).$$

Следовательно, функция $f(x)$ сохраняет меру тогда и только тогда, когда $\|d_1 f(x)\|_p \geq 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$ и для любого t , $0 \leq t \leq p^{R(f)} - 1$, справедливо равенство (3). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть равномерно дифференцируемая по $\bmod p$ функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ асимптотически консервативна. Функция f сохраняет меру тогда и только тогда, когда f асимптотически сохраняет меру.

Доказательство следует из критерия 5.4 работы [2] и теоремы 1.

3. Равномерно дифференцируемые по $\bmod p$, асимптотически сохраняющие меру Хаара функции, которые не являются асимптотически консервативными (редукционная теорема). Пункты 3, 4 данной работы посвящены изучению равномерно дифференцируемых по $\bmod p$, асимптотически сохраняющих меру функций $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$, которые не являются асимптотически консервативными. Основным результатом п. 3 является доказательство того, что равномерно дифференцируемые

по $\text{mod } p$, асимптотически сохраняющие меру функции $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$, которые не являются асимптотически консервативными, существуют лишь при $p = 2$.

Идея доказательства состоит в следующем.

1) Для каждой равномерно дифференцируемой по $\text{mod } p$ не являющейся асимптотически консервативной функции $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ строится некоторое аффинное многообразие X над полем Ω_p (Ω_p есть алгебраическое замыкание поля p -адических чисел).

2) Если $f(x)$ асимптотически сохраняет меру, то удастся показать, что X содержится в некоторой гиперплоскости аффинного пространства над полем Ω_p соответствующей размерности, а это оказывается возможным лишь при $p = 2$.

Введем дополнительные обозначения и примем некоторые соглашения о значениях параметров функции f .

Пусть функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ равномерно дифференцируема по $\text{mod } p$ и асимптотически сохраняет меру, s – минимальное целое число такое, что $\|d_1 f(x)\|_p \leq p^s$, $x \in \mathbb{I}_p$. Пусть $\|d_1 f(x)\|_p \geq 1$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$. Параметр R выберем так, что $R \geq R(f)$ и для любого $n \geq R$ функция f биективна по $\text{mod } p^n$. Пусть $0 \leq t \leq p^R - 1$ и множество $M_s(t)$ непусто. Без ограничения общности будем считать, что $t = 0$. Элементы множеств $M_s(t)$ и $M_{s-1}(t)$ будем обозначать числами от 1 до r и от $r+1$ до $r+w$ соответственно.

Рассмотрим систему уравнений с неизвестными $(x_1, \dots, x_{r+w})$ над алгебраическим замыканием Ω_p поля p -адических чисел в случае $M_{s-1}(0) \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} f(1 + p^R x_1) - f(2 + p^R x_2) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f(1 + p^R x_1) - f(r + p^R x_r) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f(1 + p^R x_1) - f(r + w + p^R x_{r+w}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и систему уравнений с неизвестными $(x_1, \dots, x_r)$ при $M_{s-1}(0) = \emptyset$:

$$\begin{aligned} f(1 + p^R x_1) - f(2 + p^R x_2) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f(1 + p^R x_1) - f(r + p^R x_r) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем говорить, что $(x_1, \dots, x_{r+w})$ – целое решение системы (5) (соответственно $(x_1, \dots, x_r)$ – целое решение системы (6)), если каждая координата этого решения есть целое p -адическое число.

Рассмотрим случай $s \geq 2$. Пусть

$$h_i = \begin{cases} p^s d_k f(i) \pmod{p^2} & \text{при } i = 1, \dots, r, \\ p^{s-1} d_k f(i) \pmod{p^2} & \text{при } i = r+1, \dots, r+w. \end{cases}$$

Через $a(x, h)$ и $b(x, h, d)$ обозначим функции с параметрами h и d , $0 \leq h \leq p^2 - 1$, $0 \leq d \leq p - 1$, заданные на множестве целых p -адических чисел и принимающие значения из этого же множества:

$$\begin{aligned} a(x, h) &= (x_0 h) \pmod{p^2} + (x_1 h) \pmod{p^2} p^2 + \dots, \\ b(x, h, d) &= ((x_0 + d)h) \pmod{p^2} + ((x_1 + d)h) \pmod{p^2} p^2 + \dots, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{I}_p$, $x = x_0 + x_1 p^2 + x_2 p^4 + \dots$, $0 \leq x_i \leq p^2 - 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть равномерно дифференцируемая по $\text{mod } p$ функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ асимптотически сохраняет меру и $1 \leq \|d_1 f(x)\|_p \leq p^s$, $s \geq 2$. Тогда для достаточно большого R

- 1) существуют единственное число τ , $0 \leq \tau \leq s$, и единственный набор чисел $\nu_1, \dots, \nu_{r+w}$, где $0 \leq \nu_i \leq p^{s-\tau} - 1$ при $1 \leq i \leq r$, $0 \leq \nu_i \leq p^{s-\tau-1} - 1$ при $r+1 \leq i \leq r+w$, такие, что на множестве всех целых решений $(x_1, \dots, x_{r+w})$ системы (5) выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^r a(p^{\tau-s}(x_i - \nu_i), h_i) + \sum_{i=r+1}^{r+w} \sum_{j=0}^{p-1} b(p^{\tau-s+1}(x_i - \nu_i), h_i, j) = \frac{1}{2}(r + pw) = c_1;$$

- 2) существуют единственное число τ , $0 \leq \tau \leq s$, и единственный набор чисел $\nu_1, \dots, \nu_r$, где $0 \leq \nu_i \leq p^{s-\tau} - 1$ при $i = 1, \dots, r$, такие, что на множестве всех целых решений $(x_1, \dots, x_r)$ системы (6) выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^r a(p^{\tau-s}(x_i - \nu_i), h_i) = \frac{1}{2}r = c_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений

$$f(1 + p^R x_1) - f(i + p^R x_i) = 0, \quad i \in M(0) = \{0, \dots, m\}, \quad (7)$$

где $R \geq \max\{R(f), B(f)\}$. Пусть τ – минимальное натуральное число такое, что множество $M_\tau(0)$ непусто. Согласно утверждению 1

$$f(i + p^R x_i) = p^{s-\varphi(i)} \Psi_i(x_i), \quad i \in M(0),$$

где $\Psi_i(x)$ – равномерно дифференцируемая по $\text{mod } p^{1+\varphi(i)}$, консервативная, асимптотически сохраняющая меру функция, причем $N_{\varphi(i)+1}(\Psi_i) \leq 1$ и в соответствии с введенными обозначениями $\|d_1 f(i)\|_p = p^{\varphi(i)}$. Тогда существует единственный набор чисел $\nu_i \in \{0, \dots, p^{\varphi(i)-\tau} - 1\}$ такой, что $\Psi_i(\nu_i) = 0 \pmod{p^{\varphi(i)-\tau}}$. Это означает, что каждое уравнение системы (7) принимает вид $\Psi_1(x_1) - p^{s-\varphi(i)} \Psi_i(x_i) = 0$. Применяя утверждение 1 к функциям Ψ_i , получим $\Psi_i(\nu_i + p^{\varphi(i)-\tau} x_i) = p^{\varphi(i)-\tau} g_i(x_i)$, где g_i – равномерно дифференцируемая по $\text{mod } p^{1+\varphi(i)}$, $i = 1, \dots, m$, консервативная, асимптотически сохраняющая меру функция. Таким образом, целые решения системы (7) представимы в виде $(\nu_1 + p^{s-\tau} x_1, \nu_2 + p^{\varphi(i)-\tau} x_2, \dots, \nu_m + p^{\varphi(m)-\tau} x_m)$, где $m = |M(0)|$, и $(x_1, \dots, x_m)$ – целое решение системы

$$g_1(x_1) - g_i(x_i) = 0, \quad i \in M(0). \quad (8)$$

Это означает, что доказательство условия 1) утверждения 3 вытекает из того, что функция

$$F_1(x_1, \dots, x_{r+w}) = \sum_{i=1}^r a(x_i, h_i) + \sum_{i=r+1}^{r+w} \sum_{j=0}^{p-1} b(x_i, h_i, j)$$

на множестве всех целых решений системы уравнений

$$g_1(x_1) - g_i(x_i) = 0, \quad i = 2, \dots, r + w, \quad (9)$$

постоянна и ее значение равно c_1 . Для любого $A = 0, \dots, p^n - 1$ рассмотрим сравнение

$$f(x) - p^{R-\tau} A = 0 \pmod{p^{n+R-\tau}}, \quad x = 0, \dots, p^{n+R+s-\tau}. \quad (10)$$

Пусть $x_1^{(n)}, 0 \leq x_1^{(n)} \leq p^n - 1$, таково, что $f(1 + p^R(\nu_1 + p^{s-\tau} x_1^{(n)})) - p^{R-\tau} A = 0 \pmod{p^n}$ (его существование следует из биективности f по $x_1^{(n)} \pmod{p^n}$). Тогда, как легко убедиться, помимо $1 + p^R(\nu_1 + p^{s-\tau} x_1^{(n)})$ сравнение (10) имеет решения вида $i + p^R(\nu_i + p^{\varphi(i)-\tau}(x_i^{(n)} + p^n z_i))$, где $0 \leq z_i \leq p^{s-\varphi(i)} - 1$; $(x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ – целые решения системы сравнений $g_1(x_1^{(n)}) - g_i(x_i^{(n)}) = 0 \pmod{p^n}$, $0 \leq x_i^{(n)} \leq p^n - 1$, а $x_1^{(n)}$ определено выше. Согласно утверждению 2 числа

$$\alpha(i, z_i, n) = p^{-(n+R-\tau)} (f(i + p^R(\nu_i + p^{\varphi(i)-\tau}(x_i^{(n)} + p^n z_i))) - p^{R-\tau} A) \pmod{p^s}$$

образуют полную систему вычетов по $\pmod{p^s}$, $i = 1, \dots, m$, $z_i = 0, \dots, p^{s-\varphi(i)} - 1$. Это, в частности, означает, что сумма вычетов $\alpha(i, z_i, n) \pmod{p^2}$, как действительных чисел, равна $p^{s-2}(1 + \dots + p^2 - 1)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{i, z_i} \alpha(i, z_i, n) \pmod{p^2} &= \sum_{i \in M_s(0)} \alpha(i, n) \pmod{p^2} + \sum_{i \in M_{s-1}(0)} \sum_{j=0}^{p-1} \alpha(i, j, n) \pmod{p^2} \\ &+ \sum_{\substack{i \in M(0) \setminus (M_s(0) \cup M_{s-1}(0)) \\ z_i=0, \dots, p^{s-\varphi(i)}-1}} \alpha(i, z_i, n) \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из неравенства $1 + \varphi(i) \geq 2$ следует, что функции $g_i(x)$ равномерно дифференцируемы по $\pmod{p^2}$, причем $N_2(g_i) \leq 1$. Тогда при любом $n \geq 1$ справедливы сравнения

$$\begin{aligned} p^{n+R-\tau} \alpha(i, z_i, n) &= f(i + p^R(\nu_i + p^{\varphi(i)-\tau}(x_1^{(n)} + p^n z_i))) - p^{R-\tau} A \\ &= p^{R-\tau} (g_i(x_i^{(n)}) - A + p^n z_i d_2 g_i) \pmod{p^{n+R+\tau+2}}. \end{aligned}$$

По выбору $x_1^{(n)}$ $g_i(x_i^{(n)}) = A \pmod{p^n}$. Пусть $g_i(x_i^{(n)}) = A + p^n \beta_i(n) \pmod{p^{n+2}}$, где $0 \leq \beta_i(n) \leq p^2 - 1$. В соответствии с введенными обозначениями $p^{-\varphi(i)+s} d_2 f(i) = d_2 g_i = h_i \pmod{p^2}$, $i \in M(0)$. Справедливо сравнение

$$\alpha(i, z_i, n) = \beta_i(n) + z_i h_i \pmod{p^2}. \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) получим

$$\sum_{i, z_i} \alpha(i, z_i, n) \pmod{p^2} = \frac{1}{2}(p^2 - 1)p^s \sum_i p^{-\varphi(i)} = \frac{1}{2}(p^2 - 1)p^s \sum_{j=0}^{s-2} r_j(0)p^{-j}. \quad (13)$$

Из (12), (13) и условия 1) утверждения 2 получим

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M_s(0)} (c + \beta_i(n)) \pmod{p^2} &+ \sum_{i \in M_{s-1}(0)} \sum_{j=0}^{p-1} (c + \beta_i(n) + h_i j) \pmod{p^2} \\ &+ \frac{1}{2}(p^2 - 1)p^s \sum_{j=0}^{s-2} r_j(0)p^{-j} = \frac{1}{2}(p^2 - 1)p^s, \end{aligned} \quad (14)$$

где $0 \leq c \leq p^2 - 1$.

Найдем $\beta_i(n)$. Целые решения системы уравнений (8) представимы в виде

$$x_i = x_i(0) + x_i(1)p^2 + \dots + x_i(k)p^{2k} + \dots, \quad \text{где } 0 \leq x_i(j) \leq p^2 - 1.$$

Пусть

$$x_i^{(k+1)} = x_i(0) + x_i(1)p^2 + \dots + x_i(k+1)p^{2(k+1)}, \quad x_i^{(k)} = x_i(0) + x_i(1)p^2 + \dots + x_i(k)p^{2k}.$$

Так как функции $g_i(x)$ консервативны и $(x_1, \dots, x_m)$ – целое решение системы (8), справедливы сравнения

$$g_1(x_1^{(k+1)}) - g_i(x_1^{(k+1)}) = 0 \pmod{p^{2(k+2)}}, \quad g_1(x_1^{(k)}) - g_i(x_1^{(k)}) = 0 \pmod{p^{2(k+1)}}.$$

Однако, $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + p^{2(k+1)}x_i(k+1)$. Тогда из равномерной дифференцируемости по $\text{mod } p^2$ функции $g_i(x)$ следует, что

$$\beta_i(2k) = \beta_1(2k) + h_1x_1(k+1) - h_ix_i(k+1) = 0 \pmod{p^2}. \quad (15)$$

Пусть $c = -\beta_1(2k) - h_1x_1(k+1)$. Из (14) получим

$$\sum_{i \in M_s(0)} h_1x_i(k+1) \pmod{p^2} + \sum_{i \in M_{s-1}(0)} \sum_{j=0}^{p-1} h_i(x_i(k+1)+j) \pmod{p^2} = \frac{1}{2}(1-p^2)(r+pw). \quad (16)$$

Умножим обе части равенства (16) на $p^{2(k+1)}$ и просуммируем полученные уравнения по всем k . Тогда по определению функций $a(x, h)$ и $b(x, h, d)$

$$\sum_{i \in M_s(0)} a(x_i, h_i) + \sum_{i \in M_{s-1}(0)} \sum_{j=0}^{p-1} b(x_i, h_i, j) = \frac{1}{2}(r+pw) = c_1.$$

Тем самым, завершается доказательство условия 1) утверждения 3. Аналогично доказывается условие 2) утверждения 3, только в этом случае $w = 0$ и $c_2 = r/2$.

Для случая $s = 1$ рассмотрим функцию $e(x, h)$ с параметром h , $h = 0, \dots, p-1$, определенную на множестве всех целых p -адических чисел и принимающую значения из этого множества. Если $x \in \mathbb{I}_p$ и $x = x_0 + x_1p + \dots$, то

$$e(x, h) = (x_0h) \pmod{p} + (x_1h) \pmod{p}p + \dots$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть равномерно дифференцируемая по $\text{mod } p$ функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ асимптотически сохраняет меру и $1 \leq \|d_1 f(x)\|_p \leq p^s$. Тогда при достаточно большом R

- 1) при $p \neq 2$ на множестве всех целых решений $(x_0, \dots, x_r)$ системы (6) выполняется соотношение

$$\sum_{i \in M_s(0)} e(x_i, h_i) = \frac{1}{2}p = c_3;$$

- 2) при $p = 2$ на множестве всех целых решений (x_1, x_2) системы (6) выполняется соотношение $x_1 + x_2 + 1 = 0$.

Доказывается в точности как утверждение 3, только вместо функции $a(x, h)$ рассматривается $e(x, h)$ и в соотношениях (11)–(16) вместо сравнимости по $\text{mod } p^2$ используется сравнимость по $\text{mod } p$, а $\tau = 1$. В случае $p = 2$ $e(x, h) = x$ ($h_i = 1 \pmod{2}$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть равномерно дифференцируемая по $\text{mod } p$ функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ не является асимптотически консервативной и $1 \leq \|d_1 f(x)\|_p \leq p^s$. Тогда если f асимптотически сохраняет меру, то $p = 2$ и $s = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в утверждениях 3, 4, функции

$$F_1 = \sum_{i=1}^r a(x_i, h_i) + \sum_{i=r+1}^{r+w} \sum_{j=0}^{p-1} b(x_i, h_i, j), \quad F_2 = \sum_{i=1}^r a(x_i, h_i), \quad F_3 = \sum_{i=1}^r e(x_i, h_i)$$

равны c_1, c_2, c_3 соответственно на множестве всех целых решений системы уравнений, состоящей из первых $r + w$ (или r в случае 2)) уравнений системы (8).

Рассмотрим случай $F_1(x_1, \dots, x_{r+w}) = c_1$ на множестве всех целых решений системы уравнений (9). Всякое целое p -адическое число $x = x(0) + x(1)p^2 + \dots + x(k)p^{2k} + \dots$, где $0 \leq x(i) \leq p^2 - 1$, представим в виде

$$x = \sigma_1(x) + 2\sigma_2(x) + \dots + (p^2 - 1)\sigma_{p^2-1}(x),$$

$$\sigma_i(x) = y_{i,0} + p^2 y_{i,1} + \dots + p^{2k} y_{i,k} + \dots, \quad y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{при } x(j) = i, i \neq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда функция F_1 представима в виде

$$F_1 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{p^2-1} (h_i j \pmod{p^2}) z_{i,j} + \sum_{i=r+1}^{r+w} \sum_{j=1}^{p^2-1} \sum_{k=0}^{p-1} (h_i(j+k) \pmod{p^2}) z_{i,j}, \quad (17)$$

где $z_{i,j} = \sigma_j(x_i)$. Обозначив коэффициенты при $z_{i,j}$ в (17) через $a_{i,j}$, получим

$$F_1 = \sum_{i=1}^{r+w} \sum_{j=1}^{p^2-1} a_{i,j} z_{i,j}.$$

Пусть C – множество всех целых решений системы уравнений

$$g_1(x_1) - g_i(x_i) = 0, \quad i = 2, \dots, r + w,$$

$$z_{i,j} = \sigma_j(x_i), \quad i = 1, \dots, r + w, \quad j = 2, \dots, p^2 - 1, \quad (18)$$

$$z_{i,1} + \dots + (p^2 - 1)z_{i,p^2-1} = x_i, \quad i = 1, \dots, r + w. \quad (19)$$

Заметим, что соотношения (19) выполняются как на множестве C , так и на алгебраическом замыкании этого множества. Под алгебраическим замыканием некоторого подмножества аффинного пространства над полем Ω_p понимается пересечение всех замкнутых множеств (т.е. множеств, которые состоят из всех решений системы полиномиальных уравнений над полем Ω_p). Алгебраическое замыкание множества будем обозначать чертой сверху. Как легко видеть, для описания $\overline{C}$ достаточно изучить алгебраическое замыкание $\overline{D}$ множества D всех целых решений системы уравнений (9), (18). Пусть D_i , $i = 0, \dots, (p^2 - 2)(r + w)$, – множество всех целых решений системы уравнений, состоящей из первых $r + w + i - 1$ уравнений системы (9), (18). Пусть $q = (p^2 - 2)(r + w)$. Очевидно, что $\overline{D}_0 \supset \dots \supset \overline{D}_q = \overline{D}$. Покажем индукцией по i , что $\overline{D}_0 = \overline{D}_q$. Пусть

выполнено $\overline{D}_0 = \dots = \overline{D}_i$. Легко показать, что $\overline{D}_{i+1}$ совпадает с алгебраическим замыканием множества всех целых решений системы

$$\begin{aligned} g_1(x_1) - g_i(x_i) &= 0, \quad i = 2, \dots, r + w, \\ z_{\alpha, \beta} &= \sigma_{\beta}(x_{\alpha}) \end{aligned} \quad (20)$$

при соответствующих значениях индексов α и β . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} g_1(x_1) - g_i(x_i) &= 0, \quad i = 2, \dots, r + w - 1, \\ z_{\alpha, \beta} &= \sigma_{\beta}(x_{\alpha}). \end{aligned}$$

Если алгебраическое замыкание множества всех целых решений этой системы совпадает с алгебраическим замыканием множества всех целых решений системы

$$g_1(x_1) - g_i(x_i) = 0, \quad i = 2, \dots, r + w - 1,$$

то и алгебраическое замыкание множества всех целых решений системы (20) совпадает с алгебраическим замыканием множества всех целых решений системы (9). Значит, из предположения $\overline{D}_i \neq \overline{D}_{i+1}$ следует, что алгебраическое замыкание множества всех целых решений уравнения $z_{\alpha, \beta} = \sigma_{\beta}(x_{\alpha})$ не совпадает с аффинным пространством размерности 2 над полем Ω_p . Следовательно, существует полином $U(z_{\alpha, \beta}, x_{\alpha})$, $\deg U \neq 0$, зависящий от двух переменных, который равен 0 на множестве всех целых решений уравнения $z_{\alpha, \beta} = \sigma_{\beta}(x_{\alpha})$. Пусть $x_{\alpha}^{(0)} \in \mathbb{I}_p$ такое, что в последовательности $\{x_{\alpha}^{(0)}(i)\}_{i=0}^{\infty}$, где

$$x_{\alpha}^{(0)} = x_{\alpha}^{(0)}(0) + x_{\alpha}^{(0)}(1)p^2 + \dots + x_{\alpha}^{(0)}(i)p^{2i} + \dots, \quad 0 \leq x_{\alpha}^{(0)}(i) \leq p^2 - 1,$$

существует бесконечно много элементов $x_{\alpha}^{(0)}(i)$, которые не равны β . Тогда существует бесконечно много $x_{\alpha} \in \mathbb{I}_p$ таких, что $\sigma_{\beta}(x_{\alpha}) = \sigma_{\beta}(x_{\alpha}^{(0)})$. Другими словами, полином $U(\sigma_{\beta}(x_{\alpha}^{(0)}), \sigma_{\beta}(x_{\alpha}))$ имеет бесконечное число корней. Следовательно, переменная $z_{\alpha, \beta}$ принимает лишь конечное число значений из поля Ω_p . Полученное противоречие показывает, что $\overline{D}_i = \overline{D}_{i+1}$. Таким образом, $\overline{D}_0 = \overline{D}_q = \overline{D}$. Следовательно, $\overline{C}$ задано системой полиномиальных уравнений вида

$$\begin{aligned} x_i &= z_{i,1} + \dots + (p^2 - 1)z_{i,p^2-1}, \quad i = 1, \dots, r + w, \\ u_j(x_1, \dots, x_{r+w}) &= 0, \quad u_j \in \Omega_p[x_1, \dots, x_{r+w}], \quad j \in J. \end{aligned}$$

Пересечение замкнутого множества $\overline{C}$ и гиперплоскости, заданной уравнением

$$\sum_{i=1}^{r+w} \sum_{j=1}^{p^2-1} a_{i,j} z_{i,j} = c_1, \quad (21)$$

обозначим через $\overline{C}(F_1)$. Согласно утверждению 3 справедливо равенство $\overline{C} = \overline{C}(F_1)$. Пусть φ – отображение C (соответственно $\overline{C}(F_1)$) в аффинное пространство над полем Ω_p вида

$$\varphi: (x_1, \dots, x_{r+w}, z_{1,1}, \dots, z_{r+w,p^2-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{r+w}).$$

Тогда слой над точкой $(x_1^{(0)}, \dots, x_{r+w}^{(0)})$ (т.е. $\varphi^{-1}(x_1^{(0)}, \dots, x_{r+w}^{(0)})$) в $\overline{C}$ определяется системой уравнений

$$z_{i,1} + \dots + (p^2 - 1)z_{i,p^2-1} = x_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, r + w, \quad (22)$$

а в $\overline{C}(F_1)$ – системой уравнений (22), (21). Следовательно, существуют $b_i \in \Omega_p$ такие, что

$$b_i = a_{i,1}, \quad 2b_i = a_{i,2}, \quad \dots, \quad (p^2 - 1)b_i = a_{i,p^2-1}, \quad i = 1, \dots, r + w.$$

Тогда для $i = 1, \dots, r$ справедливы соотношения

$$h_i \pmod{p^2} = b_i, \quad \dots, \quad h_i(p^2 - 1) \pmod{p^2} = b_i(p^2 - 1)$$

и для $i = r + 1, \dots, r + w$

$$\sum_{k=0}^{p-1} ((1+k)h_i) \pmod{p^2} = b_i, \quad \dots, \quad \sum_{k=0}^{p-1} ((p^2-1+k)h_i) \pmod{p^2} = b_i(p^2-1).$$

Тогда $h_i \pmod{p^2} = 1$ для $i = 1, \dots, r$, а для $i = r + 1, \dots, r + w$

$$j \sum_{k=0}^{p-1} ((k+1)h_i) \pmod{p^2} = \sum_{k=0}^{p-1} ((j+k)h_i) \pmod{p^2}, \quad j = 2, \dots, p^2 - 1.$$

Если множество $M_{s-1}(0)$ непусто (т.е. $w \neq 0$), то из полученного выше противоречия следует, что не существует равномерно дифференцируемых по $\text{mod } p$, асимптотически сохраняющих меру функций, которые не являются асимптотически консервативными. Если же $M_{s-1}(0) = \emptyset$ (т.е. $w = 0$), то $h_i \pmod{p^2} = 1$ для $i = 1, \dots, r$. Пусть $a \in \mathbb{I}_p$, $\|a\|_p = 1$, $\|a - 1\|_p = 1$. Согласно выбору a соотношения $ah_i \pmod{p^2} = 1$ для $i = 1, \dots, r$ ($p^{\varphi(i)} d_1 a f(x) = ah_i \pmod{p^2}$), соответствующие функции $a f(x)$, не выполняются и, следовательно, функция $f(x)$ не является асимптотически сохраняющей меру. Случай $p \neq 2$, $s = 1$, соответствующий функции F_3 , доказывается аналогично, только вместо сравнения по $\text{mod } p^2$ используется сравнение по $\text{mod } p$. Теорема доказана.

4. Равномерно дифференцируемые по $\text{mod } p$, асимптотически сохраняющие меру Хаара функции, которые не являются асимптотически консервативными (основные результаты). В этом пункте описаны равномерно дифференцируемые по $\text{mod } p$, асимптотически сохраняющие меру функции $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$, которые не являются асимптотически консервативными. Результаты этого пункта и соответствующие результаты работ [2], [3] описывают все равномерно дифференцируемые по $\text{mod } p$ функции $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$, асимптотически сохраняющие меру. В частности, описаны все полиномы над полем p -адических чисел, которые задают асимптотически сохраняющую меру функцию, отображающую кольцо целых p -адических чисел в себя.

Пусть G – множество 2-адических функций, которые имеют следующее строение. Зафиксируем некоторое натуральное R , $R \geq 1$. Множество $\{0, \dots, 2^R - 1\}$ разобьем на два непересекающихся подмножества S_1 и S_0 (S_0 может быть пустым). Множества S_1 и S_0 разобьем на двухэлементные непересекающиеся подмножества $S_1(1), \dots, S_1(w)$ и $S_0(1), \dots, S_0(2^{R-1} - w)$. Пусть ψ – произвольное отображение S_1 в $\{0, \dots, 2^{R-1} - 1\}$

такое, что $\psi(i) = \psi(j)$ при $i, j \in S_1(\alpha)$, $i \neq j$, и $\psi(i) \neq \psi(j)$ при $i \in S_1(\alpha)$, $j \in S_1(\beta)$, $\alpha \neq \beta$. Пусть φ – произвольное отображение S_0 в $\{0, \dots, 2^{R-1} - 1\} \setminus \psi(S_1)$, обладающее теми же свойствами, что и ψ . Функция из G имеет вид

$$\begin{aligned} f(i + 2^R x) &= \psi(i) + 2^R g_i(x), \\ f(j + 2^R x) &= \psi(i) + 2^R g_i(-1 - x), & \text{если } i, j \in S_1(\alpha), \\ f(i + 2^R x) &= \varphi(i) + 2^{R-1} q_\alpha + 2^R g_i(x), \\ f(j + 2^R x) &= \varphi(i) + 2^{R-1}(1 - q_\alpha) + 2^R g_j(x), & \text{если } i, j \in S_0(\alpha), \end{aligned}$$

где $q_\alpha = 0, 1$, $g_i: \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{I}_2$ – консервативные, сохраняющие меру функции, причем $g_i(x)$ равномерно дифференцируема по mod 2^2 , $N_2(g_i) \leq 1$ при $i \in S_1$ и $g_i(x)$ равномерно дифференцируема по mod 2, $N_1(g_i) \leq 1$ при $i \in S_0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть равномерно дифференцируемая по mod p функция $f: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ не является асимптотически консервативной функцией. Функция f асимптотически сохраняет меру тогда и только тогда, когда $p = 2$ и $f \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x)$ асимптотически сохраняет меру. Из теоремы 2 и предложения 5.2 из [3] следует, что $p = 2$ и $1 \leq \|d_1 f(x)\|_2 \leq 2$. Из утверждения 1 следует, что для достаточно большого R функция $f(i + 2^R x)$ совпадает с функцией $c_i + 2^{R-\varphi(i)} g_i(x)$, где $g_i: \mathbb{I}_2 \rightarrow \mathbb{I}_2$ удовлетворяют условию 3) этого утверждения. Пусть i, j , $0 \leq i, j \leq 2^R - 1$, такие, что $\|d_1 f(i)\|_2 = \|d_1 f(j)\|_2$ и $c_i = c_j \pmod{2^{R-1}}$. Из утверждения 4 следует, что $\overline{C}$ (C – множество всех целых решений уравнения $g_i(x) - g_j(y) = 0$) совпадает с многообразием $L = \{(x, y) \mid x, y \in \Omega_p, x + y + 1 = 0\}$. Действительно, $\overline{C} \subset L$ и $\dim_{\Omega_p} \overline{C} = 1$. Пусть X_1 – многообразие такое, что $X_1 \subset \overline{C}$ и $\dim_{\Omega_p} X_1 = 1$. Тогда из $X_1 \subset \overline{C} \subset L$ в силу теоремы 1 из [4, § 6, гл. 1] (см. также [5, гл. 1, § 1, упражнение 1.10]) имеем $X_1 = \overline{C} = L$. Таким образом, $g_i(x) = g_j(-x - 1)$ для любого $x \in \mathbb{I}_p$. Это доказывает теорему в одну сторону.

Для доказательства теоремы в обратную сторону необходимо показать, что функция $f \in G$ равномерно дифференцируема по mod 2 и асимптотически сохраняет меру. Из равномерной дифференцируемости по mod 2 функции $g_i(x)$ при $i \in S_0$ (по mod 2^2 при $i \in S_1$) следует равномерная дифференцируемость по mod 2 функции f . Пусть $0 \leq A \leq 2^{n+R} - 1$. Покажем, что для любого натурального n существует единственное x , $0 \leq x \leq 2^{n+R} - 1$, такое, что $f(x) = A \pmod{2^{n+R}}$. Так как $\psi(S_1) \cup \varphi(S_0) = \{0, \dots, 2^{R-1} - 1\}$ и $\psi(S_1) \cap \varphi(S_0) = \emptyset$, найдется единственное множество $S_1(\alpha)$ или $S_0(\alpha)$ такое, что для его элементов u_1, u_2 справедливы сравнения $\varphi(u_1) = A = \varphi(u_2) \pmod{2^{R-1}}$ либо $\psi(u_1) = A = \psi(u_2) \pmod{2^{R-1}}$.

Рассмотрим случай $\{u_1, u_2\} = S_0(\alpha)$. Пусть u_1 такое, что $f(u_1) = A \pmod{2^R}$. Тогда $f(u_2) \neq A \pmod{2^R}$. Действительно,

$$f(u_1) = \varphi(u_1) + 2^{R-1} q_\alpha \pmod{2^R}, \quad f(u_2) = \varphi(u_2) + 2^{R-1}(1 - q_\alpha) \pmod{2^R}.$$

Но $f(u_1 + 2^R x) = A \pmod{2^R} + 2^R g_{u_1}(x)$ для единственного u_1 , $0 \leq u_1 \leq 2^R - 1$. В силу биективности функции $g_{u_1}(x)$ по mod 2^n существует единственное x_0 такое, что $g_{u_1}(x_0) = 2^{-R}(A - A \pmod{2^R}) \pmod{2^n}$.

Рассмотрим случай $\{u_1, u_2\} = S_1(\alpha)$. Так как u_1 и u_2 таковы, что $f(u_1) = f(u_2) = A \pmod{2^{R-1}}$, условие 1) утверждения 2 выполнено. По условию

$$f(u_1 + 2^R x) = A \pmod{2^{R-1}} + 2^{R-1} g_{u_1}(x), \quad f(u_2 + 2^R x) = A \pmod{2^{R-1}} + 2^{R-1} g_{u_2}(x),$$

где $g_{u_1}(x)$ и $g_{u_2}(x)$ – сохраняющие меру, консервативные функции. Следовательно, найдутся единственные $x, y, 0 \leq x, y \leq 2^n - 1$, такие, что

$$f(u_1 + 2^R x) = f(u_2 + 2^R y) \pmod{2^{n+R}}.$$

Пусть $y = 2^{n+1} - 1 - x$. Справедливы сравнения

$$\begin{aligned} f(u_1 + 2^R x) - f(u_2 + 2^R y) &= 2^{R-1}(g_{u_1}(x) - g_{u_2}(2^{n+1} - 1 - x)) \\ &= 2^{R-1}(g_{u_1}(x) - g_{u_2}(-x - 1) - 2^{n+1}d_2g_{u_2}(x)) \pmod{2^{n+R+1}}. \end{aligned}$$

По условию $g_{u_1}(x) = g_{u_2}(-x - 1)$ и $\|d_2g_{u_2}(x)\|_2 = 1$. Следовательно, $f(u_1 + 2^R x) - f(u_2 + 2^R y) = 2^{n+R} \pmod{2^{n+R+1}}$. Тогда из утверждения 2 следует, что функция f асимптотически сохраняет меру. Теорема доказана.

Пусть $f(x)$ – целозначный полином над полем p -адических чисел (т.е. задаваемая им функция отображает кольцо $\mathbb{I}_p$ в себя).

ТЕОРЕМА 4. *Полином $f(x)$ асимптотически сохраняет меру тогда и только тогда, когда либо $f(x)$ – асимптотически консервативный и сохраняющий меру полином, либо $p = 2$ и $f(x) = V(\frac{1}{2}(x^2 + x))$, где $V(y)$ – целозначный асимптотически консервативный полином, сохраняющий меру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что функция, соответствующая полиному $f(x)$, равномерно дифференцируема по $\text{mod } p$. Если $f(x)$ – асимптотически консервативный полином, то утверждение теоремы вытекает из следствия теоремы 1. Если $f(x)$ – асимптотически сохраняющий меру полином, который не является асимптотически консервативным, то по теореме 2 и предложению 5.2 из [3] $p = 2$ и $1 \leq \|d_1 f(x)\|_2 \leq 2, x \in \mathbb{I}_2$. Согласно условию 2) утверждения 4 значение $x_1 + x_2 + 1$ равно 0 на множестве всех целых решений уравнения $f(a + 2^R x_1) - f(b + 2^R x_2) = 0$ для подходящих a, b и R . Напомним, что в рассматриваемом случае $0 \leq a, b \leq 2^R - 1$. Для любого $x_1 \in \mathbb{I}_2$ справедливо соотношение $f(a + 2^R x_1) - f(b + 2^R(-x_1 - 1)) = 0$. Пусть $u = a + 2^R x_1, v = b + 2^R x_2, d = a + b - 2^R$. Заметим, что

$$f(u) = \bar{f}_0(0) + (u(d - u))(\bar{f}_1(0) + (u(d - u))(\bar{f}_2(0) + (\dots (u(d - u))\bar{f}_k(0) \dots))),$$

где $\bar{f}_k(u) - \bar{f}_k(0) = u(d - u)\bar{f}_{k+1}(u), k = 0, \dots, \frac{1}{2} \deg f(u), \bar{f}_0(u) = f(u)$. Следовательно, $f(u) = G(u(d - u))$, где $G(y) = \bar{f}_0(0) + \dots + \bar{f}_k y^k$. Если композиция функций $H_1: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ и $H_2: \mathbb{I}_p \rightarrow \mathbb{I}_p$ асимптотически сохраняет меру, то функции H_1 и H_2 также асимптотически сохраняют меру. Действительно,

$$|H_1(H_2(\{0, \dots, p^n - 1\}))| \leq \min\{|H_1(\{0, \dots, p^n - 1\})|, |H_2(\{0, \dots, p^n - 1\})|\}$$

для любого достаточно большого n .

Рассмотрим случаи $d = 0 \pmod{2}$ и $d = 1 \pmod{2}$. В первом случае согласно следствию 5.10 из [3] полином $u(d - u)$ не является асимптотически сохраняющим меру.

Пусть $d = 1 \pmod{2}$ и $f(u) = V(\frac{1}{2}(u^2 - du))$, где $V(y) = G(-2y)$. Так как f асимптотически сохраняет меру, то, как отмечалось выше, полиномы $V(y)$ и $\frac{1}{2}(u^2 - du)$ асимптотически сохраняют меру. Однако, $\|d_1 f(u)\|_2 \leq 2$ и $\|d_1 \frac{1}{2}(u^2 - du)\|_2 = 2$, где $u \in \mathbb{I}_2$. В силу следствия 5.10 из [3] справедливо равенство $\|d_1 V(y)\|_2 = 1$ и, следовательно, $V(y)$ – целозначный, асимптотически консервативный полином, сохраняющий меру.

Пусть полином $T_d(u) = \frac{1}{2}(u^2 - du)$ асимптотически сохраняет меру. Напомним, что $d = a + b - 2^R$, $0 \leq a, b \leq 2^R - 1$. Из условия $d \equiv 1 \pmod{2}$ следует, что $d = 1 + 2q$, где $q = -2^{R-1}, -2^{R-1} + 1, \dots, 2^{R-1} + 2$.

Если $q \geq 0$, то $d > 0$ и полином $T_d(u)$ имеет два различных корня на множестве чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$. Это противоречит тому, что $T_d(u)$ асимптотически сохраняет меру.

Если $q \leq -2$, то числа $u_0 = 2^n - 1$ и $u_1 = 2^n + 2q + 2$ принадлежат множеству $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ при любом достаточно большом натуральном n . Справедливо сравнение

$$\frac{1}{2}u_0(u_0 - d) = \frac{1}{2}u_1(u_1 - d) \pmod{2^n}.$$

Это противоречит биективности полинома $T_d(u)$ по $\text{mod } 2^n$.

Рассмотрим случай $d = -1$. Из следствия 5.10 работы [3] вытекает, что полиномы $T_{-1}(2u)$ и $T_{-1}(1 + 2u)$ асимптотически сохраняют меру. В силу утверждения 2 из сравнения

$$T_{-1}(2u) - T_{-1}(1 + 2(2^n - 1 - u)) = 2^n + 2^{n+2}u - 2^{2n+1} = 2^n \pmod{2^{n+1}}$$

следует, что полином $T_{-1}(u)$ асимптотически сохраняет меру. Это доказывает теорему в одну сторону. Доказательство теоремы в обратную сторону очевидно. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. С. Анашину за постоянное внимание и поддержку в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
- [2] Анашин В. С. Равномерно распределенные последовательности целых p -адических чисел // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 3–46.
- [3] Anashin V. Uniformly Distributed Sequences over p -adic Integers. Preprint. Moscow: Russian State University for Humanities, 1993.
- [4] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988.
- [5] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

Московский инженерно-физический институт

Поступило

31.01.95

Исправленный вариант

29.04.96