Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Гипотеза о двухкомпонентной модели Ландау для обычной жидкости и фазовом переходе в турбулентное течение, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 6, 951–952

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:34:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ГИПОТЕЗА О ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ ЛАНДАУ ДЛЯ ОБЫЧНОЙ ЖИДКОСТИ И ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ В ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ

В. П. Маслов

Асимптотическое решение N -частичного уравнения Шрёдингера для бозонов приводит к спектральным сериям, отвечающим различным собственным значениям самосогласованного уравнения типа Хартри. Этим собственным значениям в частном случае, когда внешнее поле отсутствует, придается согласно концепции двухжидкостной модели Ландау смысл кинетической энергии $mv^2/2$ компоненты жидкости, увлекаемой движущимся со скоростью v капилляром. Хотя в исходной постановке никакого капилляра не рассматривалось, эта точка зрения получила ряд экспериментальных подтверждений. Таким образом, энергия жидкости обуславливается не движением всего сосуда, а молекулярными силами сцепления, которые от движущегося капилляра передаются по эстафете некоторой части прилегающей к сосуду жидкости. Вектор скорости, отвечающий решению уравнения типа Хартри вида $\exp\{imvx/h\}$, играет роль интенсивной термодинамической величины. Производные по ее компонентам от логарифма большой статистической суммы, вычисленной по указанной серии, определяют импульс коллинеарный v .

Коэффициент пропорциональности в точности отвечает понятию плотности нормальной компоненты в двухжидкостной модели Ландау. Таким образом, двухжидкостная модель Ландау адекватна строгому математическому описанию решения уравнения Шрёдингера.

Мы попытаемся применить двухжидкостную модель для описания обычной жидкости. Рассмотрим тороидальную трубу, наполненную жидкостью: d – диаметр трубы, R – диаметр тора, $R \gg d$. Предположим, что труба стала двигаться по диаметру тора (в направлении своей оси) с угловой скоростью v . Мы будем рассматривать времена меньшие тех, при которых погранслои смыкаются. В этом случае отношение ширины погранслоя Δ к радиусу трубы d обратно пропорционально корню квадратному из числа Рейнольдса, которое, в свою очередь, пропорционально скорости.

Отметим, что за очень большие времена (если турбулентность не возникает) течение станет “пуазейлевским”, и погранслой исчезнет. Но то же можно сказать и о сверхтекучей жидкости: она является сверхтекучей для “больших”, но не “очень больших” времен. Вся теория строится по сериям, переходы с которых на другие уровни малы, но за очень большие времена в гиббсовской формуле для температурного равновесия будут участвовать все собственные значения уравнения Шрёдингера, а не только принадлежащие одной серии. Значит, жидкость за очень большое время вся будет “нормальной”, т.е. течение тоже станет “пуазейлевским”.

Таким образом, разница между обычной и сверхтекучей жидкостью заключается лишь в тех временах, в которых мы рассматриваем “почти” установившийся процесс.

В нашем случае нормальную компоненту будем называть *погранслоистой*, а сверхтекучую – *невязкой*.

Согласно двухкомпонентной модели, частицы нормальной (погранслоистой) компоненты взаимодействуют с невязкой компонентой только на поверхности их соприкосновения, и в уравнении для

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

одетого потенциала погранслошной компоненты соответствующим членом можно пренебречь. Поэтому интегральное уравнение для погранслошной компоненты принимает вид (см. [1])

$$W_n(x, E) = e^{-E/\Theta} \int_{\Delta \times R \times \pi d} V(x-y) \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N_1} e^{-W_k(y, E)/\Theta} \right) dy, \quad n = 1, 2, \dots, N_1, \quad (1)$$

где N_1 – число частиц в погранслошной компоненте, $V(x-y)$ – потенциал взаимодействия между частицами, Θ – константа, $E = mv^2/2$.

Условие нормировки выглядит следующим образом:

$$e^{-E/\Theta} \int_{\Delta \times R \times \pi d} \left(\sum_{k=1}^{N_1} e^{-W_k(y, E)/\Theta} \right) dy + \sum_{k=1}^{N_2} \int_{(d-\Delta) \times R \times \pi d} e^{-W_k(y, 0)/\Theta} dy = N, \quad (2)$$

где N_2 – число частиц невязкой компоненты, а $N = N_1 + N_2$ – общее число частиц. Поскольку погранслош Δ обратно пропорционален $\sqrt{|v|}$, при достаточно большом v вариационная производная (1) по W_k меньше 1 для всех $W_n(x, E)$ таких, что

$$|W_n(x, E)| \leq \max_{x, y} V(x-y) \cdot e^{-E/\Theta} \int_{\Delta \times R \times \pi d} \sum_{k=1}^{N_1} e^{-W_k(y, E)/\Theta} dy \leq N_1 \max_x |V(x)|. \quad (3)$$

Это означает, что для таких v решение уравнений (1), (2) единственно в классе непрерывных функций, а значит, $W_k = \text{const}$, ибо такое решение имеется всегда.

С другой стороны, из эксперимента известна средняя функция распределения, и она отнюдь не константа, а значит, и одетый потенциал не константа. Следовательно, существует такая точка $v = v_0$, в которой происходит бифуркация одного решения в другое, что означает фазовый переход.

Таким образом, факт фазового перехода установлен с помощью полужемпирических рассуждений как математического, так и физического характера. Еще более бездоказательно предположение о том, что этот фазовый переход означает переход в турбулентное течение, хотя в пользу этой гипотезы свидетельствует ряд аналогий с известными фазовыми переходами первого рода.

В качестве математической гипотезы трудно даже поставить вопрос о выводе уравнений (1)–(3) из задачи статистической механики для приведенного выше мысленного эксперимента. Можно лишь в качестве первого шага высказать гипотезу о том, что система (1), (2) имеет при малых v нетривиальное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 792–795.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.04.98