Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Булитко, О рекурсивно сжимаемых множествах, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 9–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:22:51

УДК 517.1

О РЕКУРСИВНО СЖИМАЕМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. К. Булитко

Изучаются классы рекурсивно сжимаемых и несжимаемых множеств, как и некоторые другие классы, возникающие в связи с одной простейшей теоретико-рекурсивной моделью упаковки массивов данных. Получены некоторые новые критерии полноты множеств.

Библиография: 8 названий.

Проблема упаковки данных часто возникает в практике информационных преобразований. Целью является сжатие объема массива данных при сохранении возможности эффективного восстановления исходного массива A по сжатому массиву B .

В настоящей заметке мы рассмотрим некоторые результаты, вытекающие из следующей простейшей модели, не имеющей, впрочем, практического значения. Рассматриваем только одномерные бесконечные массивы $A[0 : \infty]$, состоящие из 0 и 1, т.е. $A[i] \in \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Такой массив A , очевидно, можно представить множеством, для которого A является характеристической функцией. Модель, которую мы имеем ввиду, соответствует следующему условию: если массив B является более плотной упаковкой массива A , то множество A можно свести по Тьюрингу к множеству B , причем начальный сегмент множества A длины l , $l \in \mathbb{N}$, восстанавливается по более короткому начальному сегменту множества B . Для уточнения этого условия далее мы будем рассматривать множества и использовать понятие относительной рекурсивности с ограниченным доступом к оракулу [1] (однако мы не предполагаем знакомства с этой работой). Кроме того, здесь мы не будем касаться вопросов существования и качества алгоритмов упаковки-сжатия, а также вопросов качества алгоритмов распаковки.

Рассматриваемая модель близка по духу к моделям сжатия информации, опирающимся на понятие сложности разрешения КР (Марков, Ловеланд). Теорема 2 ниже является по существу модификацией известной теоремы Барздиня. А первое предложение теоремы 4 аналогично хорошо известному результату о том, что алгоритмически случайные последовательности образуют множество полной меры в обычном метрическом пространстве бесконечных 01-последовательностей.

В работе [2] Соловьёв рассматривает сводимость конечными автоматами бесконечных 01-последовательностей. Это приводит к иным уточнениям понятия сжимаемости и иным результатам. Однако, прослеживаются и некоторые параллели. Например, понятию жесткой последовательности из [2] у нас соответствует понятие рекурсивно не сжимаемого множества, а понятие плотно упакованной последовательности может быть

в некоторой мере представлено процедурой нетривиального сжатия множества с сохранением его степени неразрешимости. Конечно, эти аналогии достаточно отдаленные, поскольку, с одной стороны, Соловьёв рассматривает чрезвычайно сильную с точки зрения теории рекурсии сводимость. С другой стороны, в [2] сводящий конечный автомат $\mathfrak{A}$ при построении начального сегмента длины n множества A , сводимого им к множеству B , может использовать информацию о начальном сегменте длины $n + c$ множества B для некоторой константы c , определяемой автоматом $\mathfrak{A}$.

Неопределяемые понятия и обозначения взяты из [3]. Пусть $\mathcal{T}$ обозначает класс всех тотальных функций $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, а $\mathcal{T}^+$ состоит из всех неубывающих функций $f \in \mathcal{T}$ с бесконечным $\text{Val } f$; I – тождественная функция; A^σ есть множество A , если $\sigma = 1$, и $\bar{A}$ в противном случае. Если B – конечное непустое множество, то $\max(B)$ ($\min(B)$) обозначает максимальный (минимальный) элемент B ; $\max(\emptyset) = \min(\emptyset) = 0$. Запись $A \leq_f B$ обозначает существование $z, x_0 \in \mathbb{N}$ таких, что $A \leq_z^T B$ и $x \in A^\sigma \iff (\exists u, v) (\langle x, \sigma, u, v \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \bar{B} \ \& \ (x_0 \leq x \implies \max(D_u \cup D_v) \leq f(y)))$ для каждого $\sigma \in \{0, 1\}$ и x, y , удовлетворяющих $x \leq y$;

$$x \prec y = \begin{cases} x - y, & \text{если } y \leq x, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$|A|$ обозначает мощность множества A . Наконец, $\|w\|$ обозначает длину слова w , и если w – последовательность $w(0)w(1)\dots w(n)\dots$, то $w|_m^n \stackrel{\text{df}}{=} w(m)w(m+1)\dots w(n)$, где $m \leq n$. Характеристическую функцию произвольного множества A обозначаем через $\mathcal{C}_A$ и рассматриваем как бесконечную 01-последовательность $\mathcal{C}_A(0)\mathcal{C}_A(1)\mathcal{C}_A(2)\dots$. Всякий начальный отрезок $\mathcal{C}_A|_0^n$ этой последовательности называем *сегментом*.

Ясно, что A – рекурсивное множество, если

$$A \leq_f B \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) < \infty.$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{T}^+$. Мы скажем, что A есть Γ -сжимаемое, если существует функция $h \in \Gamma$ такая, что $(\exists B \subseteq \mathbb{N})(A \leq_{(I \prec h)} B)$, иначе множество A есть Γ -несжимаемое. Рекурсивно сжимаемым множеством (РСМ) называется Γ -сжимаемое множество, когда Γ есть множество всех неубывающих общерекурсивных функций с бесконечным множеством значений.

ЛЕММА 1. $(A \text{ есть } \Gamma\text{-сжимаемое множество}) \iff (\bar{A} \text{ есть } \Gamma\text{-сжимаемое множество})$.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 2. Пусть R – рекурсивное множество, $R \cap A$ бесконечно, и $(\exists X \subseteq R) \exists z (A \cap R \leq_{(I \prec h)}^z X)$, где $h \in \mathcal{T}^+$ рекурсивная функция, и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R \cap \{h(n), \dots, n\}| = \infty.$$

Тогда A есть РСМ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{R}$ конечно, то доказывать нечего.

Будем обозначать i -й в порядке возрастания элемент произвольного бесконечного множества B через $B(i)$. Пусть q' будет рекурсивной функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) $|\{h(q'(n)), \dots, q'(n)\} \cap R| \geq 2n + 1$;
- 2) $n \neq m \implies \{h(q'(n)), \dots, q'(n)\} \cap \{h(q'(m)), \dots, q'(m)\} = \emptyset$.

По условию леммы такая функция q' , очевидно, существует. Теперь определим множество L и функцию q так: $R(q(n)) = \min(R \cap \{h(q'(n)), \dots, q'(n)\})$, $L = \{R(q(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что L , $R \setminus L$ – бесконечные рекурсивные множества. Рассмотрим множества $R_- = R \setminus L$, $\bar{R}_+ = \bar{R} \cup L$ и определим функции $e_+ : \bar{R} \rightarrow \bar{R}_+$, $e_- : R \rightarrow R_-$ следующими равенствами: $e_+(\bar{R}(n)) = \bar{R}_+(n)$, $e_-(R(n)) = R_-(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обе e_+ и e_- – рекурсивные функции на их областях определения. Кроме того, если определить $\alpha(P, n)$ как число элементов множества L , которое не превышает $P(n)$ (P – бесконечное множество), то

$$e_+(\bar{R}(n)) \leq \bar{R}(n - \alpha(\bar{R}, n)) \leq \bar{R}(n) - \alpha(\bar{R}, n).$$

Также $e_-(R(n)) \leq R(n + \alpha(R, n))$.

Получаем $\bar{R} \cap A \leq_m^H e_+(\bar{R} \cap A)$, где если $n \in \bar{R}$, то $H(n) = e_+(n)$, иначе $H(n) = a$ для некоторого фиксированного элемента R . Таким образом, $H(\bar{R}(n)) \leq \bar{R}(n) - \alpha(\bar{R}, n)$.

С другой стороны, мы можем перестроить сводящее множество W_z , определяя сведение $A \cap R \leq_{(I \leftarrow h)}^z X$ так, что $D_u \cup D_v \subseteq R$ для любой $\langle x, i, u, v \rangle \in W_z$. Действуя таким образом, мы получаем сведение $A \cap R \leq_{(I \leftarrow h)}^{z'} e_-(X)$, где $W_{z'} = \{\langle x, i, u', v' \rangle \mid (\exists u, v) (D_{u'} = e_-(D_u) \ \& \ D_{v'} = e_-(D_v) \ \& \ \langle x, i, u, v \rangle \in W_z \ \& \ (x_0 \leq x \implies \max(D_u \cup D_v) \leq I(x) - h(x))\}$. Давайте оценим $\max(D_{u'} \cup D_{v'})$, когда $\langle x, i, u', v' \rangle \in W_{z'}$ для данных x, i . Если $R(n) \leq I(x) - h(x)$, то $|R_- \cap \{R(n) + 1, \dots, x\}| \geq 2\alpha(R_-, n)$. Тогда $R(n + 2\alpha(R_-, n)) \leq x$. Отсюда и из $e_-(R(n)) \leq R(n + \alpha(R_-, n))$ следует, что $e_-(R(n)) \leq R(n + \alpha(R_-, n)) \leq x - \alpha(R_-, n)$.

Наконец, $A \leq_{(I \leftarrow h')} e_+(A) \cup e_-(X)$, где $h'(n) = \max(\{\alpha(\bar{R}, k) \mid R(k) \leq n\} \cup \{\alpha(R, s) \mid R(s) \leq n\})$.

Напомним, что множество называется иммунным, если оно не включает никакого бесконечного рекурсивно перечислимого подмножества.

ТЕОРЕМА 1. Если A – рекурсивно несжимаемое множество, то как A , так и $\bar{A}$ являются иммунными. Обращение этого утверждения ложно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает непосредственно из предыдущих лемм. Достаточно заметить, что для каждого рекурсивного множества $R \subseteq A$ и любого множества X имеем $R \leq_o X$, где $o(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{N}$.

Теперь построим по шагам пример такого множества A , что противоречит обращению первого утверждения леммы. Пусть R обозначает множество $\{2^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и пусть уже определен сегмент $\mathcal{C}_A^{2n}$ характеристической функции $\mathcal{C}_A$ множества A . Длину сегмента $\mathcal{C}_A^{2n}$ обозначим через d_{2n} .

Шаг $2n$. Если $W_n \cap R$ – конечное множество, то положим $d_{2n+1} = d_{2n}$, $\mathcal{C}_A^{2n+1} = \mathcal{C}_A^{2n}$ и переходим к следующему шагу. Иначе, находим первые два элемента $x, y \in W_n \cap R$ такие, что $d_{2n} < x < y$, и полагаем $\mathcal{C}_A^{2n+1}(y) = 1$, $d_{2n+1} = y$, $\mathcal{C}_A^{2n+1}(z) = 0$ для всех $d_{2n} < z < d_{2n+1}$. Переходим к следующему шагу.

Шаг $2n+1$. Если $W_n \cap \overline{R}$ является конечным множеством, то полагаем $d_{2n+2} = d_{2n+1}$, $\mathcal{C}_A^{2n+2} = \mathcal{C}_A^{2n+1}$ и переходим к следующему шагу. В противном случае найдем первые два элемента $x, y \in W_n \cap \overline{R}$ такие, что $d_{2n+1} < x < y$ и положим $\mathcal{C}_A^{2n+2}(y) = 1$, $d_{2n+2} = y$, $\mathcal{C}_A^{2n+2}(z) = 0$ для всех $d_{2n+1} < z < d_{2n+2}$. Переходим к следующему шагу.

Положим $\mathcal{C}_A = \bigcup_n \mathcal{C}_A^n$. Ясно, что оба множества A и $\overline{A}$ являются иммунными. Теперь определим $X = \{\sqrt{x} \mid x \in R \cap A\}$. Имеем $X \subseteq R$ и $R \cap A \leq_h X$, где $h = \lambda n. \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Таким образом, A есть РСМ по лемме 2.

Следующее утверждение является вариантом известной теоремы Барздина, а доказательство – модификацией соответствующей конструкции [4].

ТЕОРЕМА 2. *Для любых рекурсивно перечислимого множества (РПМ) A и $\varepsilon > 0$ существует множество B , для которого $A \leq_{[\log_2^{1+\varepsilon}]} B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть нерекурсивное РПМ A . Пусть рекурсивная 1-1-функция f перечисляет A . Фиксируем некоторые числа $k, n_0 \in \mathbb{N}$, зависящие от ε . Определенно мы можем включить информацию о начальном сегменте $\mathcal{C}_A|_0^{2 \exp n_0}$ в программу z , сводя A к B .

Определим $t_n = \max\{x \mid f(x) < 2 \exp n^k\}$, $n > n_0$, и построим $\mathcal{C}_B$ как катенацию 01-кодов чисел $f(t_n)$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$. Здесь 01-код $f(t_n)$ есть слово $01\nu(1) \dots 1\nu(i) \dots 1\nu(m)0$, где $\nu(1) \dots \nu(m)$ – бинарная запись $f(t_n)$. 01-код $f(t_n)$ назовем $(n; n_0)$ -блоком $\mathcal{C}_B$. Очевидно, что длины блоков не убывают.

Чтобы вычислить $\mathcal{C}_A(x)$ при $x > 2 \exp n_0^k$, определим сначала $n(x) = \mu v(x < 2 \exp v^k)$. Затем раскодируем $f(t_{n(x)})$, выделяя $(n(x); n_0)$ -й блок в $\mathcal{C}_B$. Затем мы вычисляем $f(0), \dots, f(p)$ до тех пор, пока не обнаружится $f(p) = f(t_{n(x)})$. Если $x \in \{f(0), \dots, f(p)\}$, полагаем $\mathcal{C}_A(x) = 1$, в противном случае $\mathcal{C}_A(x) = 0$.

Так как длина $(n(x); n_0)$ -блока последовательности $\mathcal{C}_B$ не превышает $2n^k(x) + 2$ и $n(x) \leq \log_2^{1/k}(x + 1)$, то длина использованного начального сегмента последовательности $\mathcal{C}_B$ не больше чем $\sum_{i=1}^{n(x)} 2(i^k + 1)$, т.е. не больше чем $3[\log_2^{1/k} x]^{k+1}$ почти всюду. Учитывая произвольность k , можно избавиться от множителя 3. Это и дает объявленную оценку.

Иногда естественно представлять данное РПМ в виде объединения рекурсивных множеств, являющихся “рекурсивными вариациями” элементов некоторого рекурсивно перечислимого множества. Более строго, мы скажем, что РПМ A имеет *кусочно рекурсивное f -растянутое представление* для рекурсивной функции $f \in \mathcal{T}^+$, если существуют рекурсивная одноместная функция r , частично рекурсивная двухместная φ и РПМ W_e такие, что

- i) $(\forall x \in f(W_e))((W_{r(x)} \text{ рекурсивно}) \ \& \ (x \text{ есть минимальный элемент } W_{r(x)}))$;
- ii) $(\forall x \in f(W_e)) \forall y (\mathcal{C}_{W_{r(x)}}(y) = \varphi(x, y))$;
- iii) $A = \bigcup_{x \in f(W_e)} W_{r(x)}$.

Далее, если $h \in \mathcal{T}^+$, то $(h)^{-1}$ обозначает функцию $\lambda y. (\mu x (h(x) > y))$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если A имеет f -растянутое кусочно рекурсивное представление и $\varepsilon > 0$, то существует множество B такое, что $A \leq_{\log_2^{1+\varepsilon} \circ (f)^{-1}} B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что для определения верно ли $x \in A$, нам достаточно определить, какие числа из множества $\{0, \dots, (f)^{-1}(x)\}$ принадлежат множеству W_e . Теперь используем теорему 2.

До сих пор мы занимались бинарными 01-массивами, содержащими рекурсивно перечислимое множество единиц. Можно свести k -значный массив $F: \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$, когда $\{x \mid F(x) > 0\}$ рекурсивно перечислимо, к рассмотренному выше случаю путем следующего кодирования. Пусть $w(i)$ будет бинарным кодом числа $i \in \{0, \dots, k-1\}$ и $\|w(i)\| = z(k)$, где $z(k) = \mu z(\log_2 k \leq z)$. Тогда мы представляем массив F множеством $A \in \mathcal{C}_A|_0^{(n+1)z(k)-1} = w(F(0))w(F(1)) \dots w(F(n)), n \in \mathbb{N}$.

Если $\{x \mid F(x) \neq 0\}$ рекурсивно перечислимо, то A также РПМ. Поэтому в соответствии с теоремой 2 мы можем сжать $\mathcal{C}_A|_0^x$ в $\log_2^{1+\varepsilon}(x)$ раз, получая множество B . Наконец, раскодируя B , мы получаем k -значный массив G , сжимающий F в $\log_2^{1+\varepsilon}$ раз.

Такое же обобщение верно и для следствия 1.

Если w является 01-словом, то $K(w)$ обозначает его сложность по Колмогорову [5]. Мы пишем $f \preceq h$, если $\exists c \forall x (f(x) \leq h(x) + c)$.

ЛЕММА 3. Если $A \leq_h B$, то $K(\mathcal{C}_A|_0^n) \preceq h(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \leq_h^z B$ для подходящего числа z . Тогда программу для вычисления $\mathcal{C}_A|_0^n$ можно составить из простой управляющей программы P' , программы $P''(n)$, вычисляющей $\mathcal{C}_B|_0^{h(n)}$, и программы P_z для перечисления W_z . Программа P' находит четверки $\langle x, i, u, v \rangle \in W_z$ с помощью P_z и строит $\mathcal{C}_A|_0^n$, проверяя $D_u \subseteq B$ & $D_v \subseteq \overline{B}$ с помощью программы $P''(n)$. Учитывая $\|P'\| + \|P_z\| = \text{const}$ & $K(\mathcal{C}_B|_0^{h(n)}) \preceq h(n)$, мы получаем требуемую оценку.

Обозначим через $\mathcal{T}^+(C)$ класс всех рекурсивных в C тотальных неубывающих функций с бесконечным множеством значений. Понятно, что $\mathcal{T}^+(C) \subseteq \mathcal{T}^+$ и класс $\mathcal{T}^+(\emptyset)$ -несжимаемых множеств совпадает с классом рекурсивно несжимаемых множеств.

ТЕОРЕМА 3. Если $\underline{C}' \leq d_T(B)$, то существует $\mathcal{T}^+(C)$ -несжимаемое множество $A \in d_T(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 2$ – фиксированное натуральное число и $p(x)$, $x \in \mathbb{N}$, – программа, которая для произвольного слова удаляет его начало длины x , если это возможно, и выдает пустое слово Λ иначе. Ясно, что $p(x)$ можно выбрать таким образом, что для некоторого числа x_0 верно $\|p(x)\| \leq x$, как только $x \geq x_0$.

Теперь по определению p имеем $K(\sigma\tau) \geq K(\tau) - (\|p(\|\sigma\|)\| + c)$ для некоторой постоянной $c \in \mathbb{N}$ и любых слов σ, τ . Фиксируем эту постоянную c .

Опираясь на это неравенство, лемму 3 и оракул B , можно диагональной процедурой построить $\mathcal{T}^+(C)$ -несжимаемое множество A . Строим характеристическую функцию искомого множества как бесконечную 01-последовательность σ по шагам.

Положим $\sigma_0 = \Lambda$. Пусть после $(n-1)$ -го шага мы имеем начальный сегмент σ_n последовательности σ . Зададим σ_{n+1} как $\sigma_n \psi_n \tau$, где $\psi_n = 01^{\|\sigma_n\|+1}0(\mathcal{C}_B(n))$ и конечная последовательность τ выбрана следующим образом.

Пусть $f(n) = \|\sigma_n \psi_n\|$. С оракулом B проверим условие $\mathfrak{A}$: существует такое $x \in \mathbb{N}$, что

- 1) $\min\{x, \varphi_n^C(x + f(n))\} > 2f(n) + c + m$;
- 2) $(\forall y \leq x + f(n))(\forall z \leq y)(y \in W_n^C \text{ \& } \varphi_n^C(z) \leq \varphi_n^C(y))$.

Если это условие удовлетворено, то мы выберем первое такое число x . (Это возможно, так как множество таких x перечислимо с оракулом C , а по условию теоремы всякое перечислимое в C множество рекурсивно относительно B . В частности, проблема непустоты перечислимого множества разрешима с этим оракулом.)

После этого мы имеем возможность выбрать с оракулом B первое слово τ длины x , удовлетворяющее условию $K(\tau) > \|\tau\| - m$. Действительно, как хорошо известно [5], количество слов τ длины x и сложности $K(\tau)$, которая больше чем $x - m$, больше чем $2^x(1 - 2^{1-m})$. А так как любое перечислимое множество сводимо к B , можно вычислять $K(\tau)$ с оракулом B .

Если условие $\mathfrak{A}$ не удовлетворено, мы полагаем $\tau = \Lambda$.

Полученную бесконечную 01-последовательность σ рассматриваем как характеристическую функцию множества A .

Покажем $A \in d_T(B)$. Действительно, $A \leq_T B$, так как A построено с оракулом B . А благодаря возможности находить под слова ψ_n , $n \in \mathbb{N}$, в $\mathcal{C}_A$ мы можем вычислить $\mathcal{C}_B$.

Из построения вытекает, что $A \leq_{(I \leftarrow \varphi_l^C)} X$ ложно для каждой $\varphi_l^C \in \mathcal{T}^+$ и каждого $X \subseteq \mathbb{N}$. Действительно, если $\varphi_l^C \in \mathcal{T}^+$, тогда по лемме 3 существует такое k , что $(\forall x \geq k)(K(\mathcal{C}_A|_0^x \leq x + k - \varphi_l^C(x))$. Перейдем к произвольному индексу n функции $\varphi_n^C(x) = \varphi_l^C(x) \leftarrow k$. На шаге n слово τ было выбрано так, что

$$\begin{aligned} K(\sigma_n \psi_n \tau) &\geq K(\tau) - (\|p(\|\sigma_n \psi_n\|)\| + c) > \|\tau\| - (m + c + \|\sigma_n \psi_n\|) \\ &= \|\sigma_n \psi_n\| + \|\tau\| - (m + c + 2\|\sigma_n \psi_n\|) \geq \|\sigma_n \psi_n \tau\| \leftarrow \varphi_n^C(\|\sigma_n \psi_n \tau\|), \end{aligned}$$

так как $\varphi_n^C(\|\sigma_n \psi_n \tau\|) \geq 2\|\sigma_n \psi_n\| + m + c$ в соответствии с условием $\mathfrak{A}$. Рассуждение завершает стандартное соображение о бесконечности множества индексов любой функции из $\mathcal{T}^+$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *В степени всякого множества B , для которого $\emptyset' \leq_T B$, найдется рекурсивно несжимаемое множество.*

Было бы интересно описать все степени рекурсивно несжимаемых множеств.

Рассмотрим естественную задачу существования и описания степеней, которые включают $\mathcal{T}^+$ -несжимаемые множества, иначе говоря, — абсолютно несжимаемые множества. Обозначим класс абсолютно несжимаемых множеств через ANC .

ТЕОРЕМА 4. *Почти все (для обычной меры в пространстве бесконечных 01-последовательностей) множества $\mathcal{T}^+$ -несжимаемы. Существует такое $\mathcal{T}^+$ -несжимаемое множество A , что $\underline{A}' = \underline{A}''$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мартин-Лёф доказал [6], что для почти всех бесконечных 01-последовательностей w существуют такие натуральные m , что $\exists^\infty n(K(w|_0^n) > n - m)$. Отсюда и из леммы 3 вытекает, что почти все множества натуральных чисел $\mathcal{T}^+$ -несжимаемы.

Чтобы получить второе утверждение, сначала построим непустой $\Pi_1^{\emptyset'}$ -класс 01-последовательностей, каждая из которых представляет абсолютно несжимаемое множество. Тогда требуемое будет следовать из релятивизованного результата Джокуша-Соара (см. [7, теорема 1]).

Назовем (e, m) -правильной всякую такую 01-последовательность σ , что для нее найдется множество $\{\sigma_1, \dots, \sigma_e\}$ различных начальных ее отрезков с условием $K(\sigma_i) \geq \|\sigma_i\| - m$.

Определим предикат $\mathfrak{R}_m(n, k, \alpha) \iff$ (доля (k, m) -правильных 01-последовательностей среди всех 01-последовательностей длины n не меньше α).

Теперь построим рекурсией относительно $\emptyset'$ функции $\psi_m(n), \varepsilon_m(n)$.

Значение $\varepsilon_m(n+1)$ равно максимальному числу α среди чисел $\varepsilon_m(n), f(\psi_m(n))$, для которого $\mathfrak{R}_m(n+1, \psi_m(n), \alpha) = 1$. Здесь f – указанная далее вычислимая функция.

Значение $\psi_m(n+1)$ равно $\psi_m(n)$, если $\varepsilon_m(n+1) < f(\psi_m(n))$, а иначе равно максимальному числу $a \in \{\psi_m(n), \psi_m(n) + 1\}$, для которого $\mathfrak{R}_m(n+1, a, \varepsilon_m(n+1)) = 1$.

Положим $f(k) = 1 - 2^{-k-2}$, $\psi_m(0) = 0$, $\varepsilon_m(0) = 1/2$.

Очевидно, ψ_m, ε_m – тотальные неубывающие функции, вычислимые относительно $\underline{\varnothing}'$ с бесконечными областями значений. Последнее вытекает из вышеупомянутого результата Мартин-Лёфа. Действительно, для любых $p \in \mathbb{N}$, $e \in [0, 1)$ найдется такое число $n_{p,e} \in \mathbb{N}$, что верно утверждение $\mathfrak{R}_m(n_{p,e}, p, e)$.

Объявленный выше $\Pi_1^{\underline{\varnothing}'}$ -класс определяется как

$$\{X \mid \forall n \text{ (начальный сегмент } \mathcal{C}_X \text{ длины } n \text{ является } (\psi_m(n), m)\text{-правильной)}\}.$$

Этот класс непуст, так как $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n < 1$.

Существуют ли степени абсолютно несжимаемых множеств с более низкой верхней оценкой неразрешимости, чем в этой теореме?

Определим сводимость $\leq_{T+}$ следующим образом:

$$A \leq_{T+} B \iff (\exists f \in \mathcal{T}^+)(A \leq_{(I \leftarrow f)} B \vee A \leq_I B).$$

Это отношение сводимости, так как его рефлексивность и транзитивность очевидны, как и включение $\leq_{T+} \subseteq \leq_T$. Заметим сразу же, что $\leq_{T+}$ -степень произвольного нерекурсивного множества A состоит из множеств, сводящихся к A с точной границей I . Из полученных выше, а также известных результатов вытекает, что частичный порядок L_{T+} , индуцированный сводимостью $\leq_{T+}$ на множествах ее степеней неразрешимости соответственно, имеет необычные свойства. Например:

ТЕОРЕМА 5. 1) Множество максимальных в L_{T+} степеней несчетно.

2) Не существует минимальных нерекурсивных степеней в L_{T+} .

3) $\leq_{T+}$ -степень креативного множества A не максимальна в $d_T(A)$.

4) Существуют пары множеств, тьюринговы степени которых не превосходят $\underline{\varnothing}'$, не имеющие точной верхней грани в L_{T+} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) есть следствие того, что всякое абсолютно несжимаемое множество имеет максимальную степень и каждая степень не более чем счетна.

Чтобы доказать утверждение 2) рассмотрим произвольное нерекурсивное множество A . Множество $2A \doteq \{2a \mid a \in A\}$ также нерекурсивно. Ясно, что $2A \leq_{I \leftarrow \lambda x.[x/2]} B$, но $A \not\leq_{T+} 2A$ из-за нерекурсивности A .

Утверждение 3) следует из леммы 2. Действительно, всякое РПМ рекурсивно сжимаемо.

4) Возьмем рекурсивно несжимаемое множество A и рассмотрим его как сочленение $B \oplus C$, где $B \doteq \{a \mid 2a \in A\}$, $C \doteq \{a \mid 2a + 1 \in A\}$. Они тоже рекурсивно несжимаемы в силу леммы 2. Если бы они имели верхнюю грань в нашей L_{T+} , то их сочленение также очевидно было бы рекурсивно сжимаемо.

Ниже $KR_B(n)$ обозначает $KR(\mathcal{C}_B(0) \dots \mathcal{C}_B(n))$, где $KR(\cdot)$ – сложность по Ловеланду–Маркову [8].

ТЕОРЕМА 6. Пусть A есть РПМ.

Тогда $(A \text{ является } T\text{-полным}) \iff \exists B(\exists t \in \mathcal{T}^+)(B \not\subseteq \varnothing \ \& \ B \leq_{T^+} A \ \& \ t \leq_T A \ \& \ t \preceq \text{KR}_B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B \leq_h A$, $h \leq I$, то (см. [1]) $\text{KR}_B(n) \leq c + \text{KR}_A(h(n))$, т.е. $\text{KR}_B(n) \leftarrow c \leq \text{KR}_A(n)$ для некоторого $c \in \mathbb{N}$ и почти всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует такая функция $f \in \mathcal{T}^+$, что $f \leq_T A$ и $f \leq \text{KR}_A$. Как показано в [1], A является полным множеством.

Обратно, если A полно и для некоторого множества B верно $B \leq_{\mathcal{T}^+} A$, то $\text{KR}_B \leq_T A$. Выберем $B = \{2x \mid x \in A\}$. Тогда $B \leq_{\lambda x.([x/2]+1)} A$ очевидно. Поэтому в качестве t можно выбрать KR_B .

СЛЕДСТВИЕ 3. РПМ A не является полным тогда и только тогда, когда $B \not\leq_{wt} A \vee \text{KR}_B \not\leq_T A$ для каждого рекурсивного множества B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A РПМ, не являющееся полным, и $B \leq_{wt} A$. Тогда существует рекурсивная 1-1-функция $g \in \mathcal{T}^+$ такая, что $B \leq_g A$. Имеем

$$y \in g(B) \iff y \in \text{Val } g \ \& \ g^{-1}(y) \in B.$$

Следовательно, $g(B) \leq_I A$. Кроме того, ясно, что $\text{KR}_B \preceq \text{KR}_{g(B)} \circ g$. Тогда существует такое число c , что $\text{KR}_B(n - \mu k(g(n - k) \leq n)) \leftarrow c \leq \text{KR}_{g(B)}(n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из $\text{KR}_B \leq_T A$ вытекает существование рекурсивной в A функции, которая минорирует $\text{KR}_{g(B)}$. Это противоречит теореме 4.

Обратно, если A полное РПМ, то $A \leq_{wt} A$ и $\text{KR}_A \leq_T A$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Булитко В. К. Субтьюринговы сводимости ограниченной сложности // Изв. вузов. Матем. 1992. № 1. С. 27–37.
- [2] Соловьёв В. Д. Структура распределения информации в бесконечной последовательности // Дискретная матем. 1996. Т. 8. № 2. С. 97–107.
- [3] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [4] Барздин Я. М. Сложность программ, распознающих принадлежность натуральных чисел, не превышающих n , рекурсивно перечислимому множеству // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. № 6. С. 1249–1252.
- [5] Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия “количество информации” // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1. № 1. С. 3–11.
- [6] Martin-Löf P. Complexity oscillations in infinite binary sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 1971. V. 19. № 3. P. 225–230.
- [7] Jockusch C. G., Soare R. I. Π_1^0 -classes and degrees of theories // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 173. P. 33–56.
- [8] Loveland D. W. A variant of the Kolmogorov concept of complexity // Inform. and Control (Shenyang). 1969. V. 15. P. 510–526.