Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веснин, Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лебелля, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 17–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:53:27

УДК 514.132

ОБЪЕМЫ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ ЛЁБЕЛЛЯ

А. Ю. Веснин

В 1931 г. Ф. Лёбелль построил первый пример замкнутого ориентируемого трехмерного гиперболического многообразия. В данной работе изучаются свойства замкнутых трехмерных гиперболических многообразий, являющихся обобщениями классического примера Лёбелля. Получены явные формулы объемов этих многообразий в терминах функции Лобачевского.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В работе рассматриваются классическое многообразие Лёбелля и его естественные обобщения. Получены явные формулы объемов этих многообразий в терминах функции Лобачевского.

Напомним [1, с. 164], что в 1890 г. Клейн, вдохновленный некоторыми примерами Клиффорда, поставил проблему описания всех связных компактных римановых многообразий постоянной кривизны. Согласно теореме Киллинга–Хопфа [2, с. 88] каждое такое многообразие изометрично факторпространству X/Γ , где X одно из пространств постоянной кривизны (S^3 , E^3 или $\mathbb{H}^3$), а Γ является ко-компактной дискретной группой изометрий пространства X , действующей без неподвижных точек. Следуя Киллингу, такие многообразия принято называть *пространственными формами Клиффорда–Клейна*.

В случае отрицательной кривизны примеры пространственных форм Клиффорда–Клейна долгое время не были известны [3, с. 294]: “В отношении гиперболической геометрии мы только подчеркнем, что замкнутая гиперболическая пространственная форма с конечной мерой объема до сих пор, по-видимому, еще не найдена”.

Положительно отвечая на вопрос о существовании пространственных форм Клиффорда–Клейна постоянной отрицательной кривизны, в 1931 г. Ф. Лёбелль [4] построил первый пример замкнутого ориентируемого трехмерного гиперболического многообразия. Это многообразие было получено склеиванием восьми экземпляров прямоугольного 14-гранника, верхнее и нижнее основания которого являются правильными шестиугольниками, а боковая поверхность состоит из двенадцати пятиугольников, подобно додекаэдру.

Работа выполнена при поддержке GARC–KOSEF (Центр глобального анализа, Сеульский национальный университет) и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01410.

В [5] дан алгебраический подход к описанию классического многообразия Лёбелля и построено бесконечное семейство обобщающих его замкнутых гиперболических многообразий $L(n)$ как ориентируемых, так и неориентируемых. Каждое *многообразие Лёбелля* $L(n)$ получено склеиванием восьми экземпляров прямоугольного $(2n + 2)$ -гранника, верхнее и нижнее основания которого являются правильными прямоугольными n -угольниками, а боковая поверхность состоит из $2n$ прямоугольных пятиугольников. Такой подход, тесно связанный с раскраской граней многогранника в четыре цвета, дает простой способ построения замкнутого ориентируемого гиперболического 3-многообразия из восьми экземпляров произвольного прямоугольного многогранника в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$.

Группы изометрий многообразий Лёбелля изучались в [6] и [7]. В частности, описана полная группа изометрий классического многообразия Лёбелля.

Напомним, что согласно теореме Тёрстона–Ёргенсена [8] число гиперболических 3-многообразий заданного конечного объема всегда конечно. В [9] многообразия Лёбелля обсуждались как пример, демонстрирующий, что эти числа не ограничены в совокупности. А именно, для любого целого N можно указать не меньше чем N попарно негомеоморфных многообразий Лёбелля, имеющих один и тот же объем. Другие интересные примеры компактных гиперболических 3-многообразий равных объемов рассмотрены в [10] и [11].

В силу теоремы жесткости Мостова объем гиперболического 3-многообразия является его топологическим инвариантом. В связи с этим в последние годы значительно вырос интерес к вычислению объемов многообразий. Отметим, в частности, известную компьютерную программу SnapPea [12], с помощью которой возможно приближенное вычисление объемов многообразий, описанных в терминах хирургии Дэна.

Точное вычисление объемов многообразий наталкивается на значительные трудности. Если гиперболическое 3-многообразие описано посредством отождествления граней его фундаментального многогранника, мы приходим к проблеме вычисления объема многогранника в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. Первые результаты в этом направлении принадлежат Н. И. Лобачевскому, и объемы, найденные явно для некоторых семейств многогранников [13]–[15], выражаются через функцию Лобачевского $\Lambda(x)$:

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \log |2 \sin \theta| d\theta.$$

Цель настоящей работы – получить точную формулу объема многообразий Лёбелля в терминах функции Лобачевского (теорема 5). В частности, это позволяет найти объем классического многообразия Лёбелля (следствие 1) и асимптотику значений объемов (следствие 2).

2. Построение многообразий. В этом пункте мы напомним развитый в [5] подход к построению гиперболических 3-многообразий из прямоугольных многогранников.

Пусть R – ограниченный прямоугольный многогранник в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. Напомним, что согласно теореме Андреева [16] каждый плоский трехвалентный граф, не имеющий треугольных и четырехугольных граней, может быть реализован как остов некоторого ограниченного прямоугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$. Обозначим через G группу, порожденную отражениями в гранях R . Для каждой вершины многогранника R ее стабилизатор в группе G изоморфен восьми-элементной абелевой группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^3$, которая может быть рассмотрена как векторное пространство над

полем $\text{GF}(2)$. Чтобы описать построение многообразия из восьми экземпляров многогранника R , мы рассмотрим эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$.

ЛЕММА 1 [5]. Пусть группа G порождена отражениями в гранях прямоугольного многогранника R в $\mathbb{H}^3$. Ядро $\text{Кер } \varphi$ эпиморфизма $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых трех гранях многогранника R , имеющих общую вершину, являются линейно независимыми в группе $\mathbb{Z}_2^3$, рассматриваемой как векторное пространство.

Заметим, что в векторном пространстве $\mathbb{Z}_2^3$ можно указать четверки таких элементов, что каждые три из них линейно независимы. Без ограничения общности далее можем считать, что эти элементы имеют вид $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$ и $\delta = \alpha + \beta + \gamma = (1, 1, 1)$.

ЛЕММА 2 [5]. Пусть группа G порождена отражениями в гранях прямоугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$. Если эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ переводит порождающие группы G в элементы α , β , γ и δ группы $\mathbb{Z}_2^3$, то ядро $\text{Кер } \varphi$ не содержит меняющих ориентацию элементов.

Как видим, если эпиморфизм φ удовлетворяет условиям лемм 1 и 2, то группа $\text{Кер } \varphi$ состоит из изометрий пространства Лобачевского и не содержит элементов конечного порядка и меняющих ориентацию элементов. Таким образом, $M = \mathbb{H}^3 / \text{Кер } \varphi$ является замкнутым ориентируемым гиперболическим 3-многообразием. Сопоставим каждой грани многогранника R элемент группы $\mathbb{Z}_2^3$, в который при эпиморфизме φ отображается отражение в этой грани. Такое соответствие удобно представлять как раскраску граней многогранника R в цвета – элементы группы $\mathbb{Z}_2^3$. Тогда раскраска граней, определяемая эпиморфизмом, удовлетворяющим условиям лемм 1 и 2, является четырехцветной раскраской в цвета α , β , γ и δ , такой, что смежные грани окрашены в разные цвета, т.е. является четырехцветной раскраской карты в классическом граф-теоретическом смысле. И обратно, каждая четырехцветная раскраска граней ограниченного прямоугольного многогранника R в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ определяет замкнутое ориентируемое гиперболическое многообразие, склеиваемое из восьми экземпляров многогранника R .

Отметим, что классическое многообразие Лёбелля [4] может быть получено указанным выше способом. Ниже мы опишем его как одно из следующего бесконечного семейства многообразий.

Рассмотрим комбинаторную треугольную призму $ABCA'B'C'$ и дополнительное ребро DE с вершинами D и E на сторонах BB' и CC' соответственно.

По теореме Андреева [16] для любого целого $n \geq 5$ комбинаторный шестигранник $ABCA'B'C'DE$ может быть реализован в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ таким образом, что двугранные углы при ребрах AA' , BD и EC' равны π/n , $\pi/4$ и $\pi/4$ соответственно, а все остальные двугранные углы являются прямыми. Обозначим такой шестигранник через $P(n)$.

Рассмотрим группу, порожденную отражениями в гранях $P(n)$. Элементы этой группы, оставляющие ребро AA' неподвижным, образуют группу диэдра $\mathbb{D}_n$ порядка $2n$. Под действием группы $\mathbb{D}_n$ из $2n$ экземпляров шестигранника $P(n)$ мы получим $(2n+2)$ -гранник $R(n)$ с прямыми двугранными углами. При этом верхнее и нижнее основания многогранника $R(n)$ являются n -угольниками, а боковая поверхность состоит из двух циклов пятиугольников. В частности, $R(5)$ является прямоугольным додекаэдром,

а $R(6)$ является прямоугольным 14-гранником, который был использован Ф. Лёбеллем в [4]. Обозначим через $G(n)$ группу, порожденную отражениями в гранях $R(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi_n: G(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$, ядро которого $\text{Ker } \varphi_n$ не содержит элементов конечного порядка. Гиперболическое многообразие $L(n) = \mathbb{H}^3 / \text{Ker } \varphi_n$ назовем *многообразием Лёбелля*. Если при этом образы отражений в верхнем и нижнем n -угольных основаниях многогранника $R(n)$ совпадают, то будем говорить, что $L(n)$ есть *стандартное многообразие Лёбелля*.

Заметим, что многообразие $L(n)$ зависит от эпиморфизма φ_n и не определяется однозначно по n . Согласно введенному определению классическое многообразие Лёбелля, построенное в [4], является стандартным для $n = 6$.

Как было отмечено выше, построение ориентируемого многообразия Лёбелля тесно связано с существованием четырехцветной раскраски граней соответствующего многогранника. Эта связь позволяет дать конструктивное доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Для любого целого $n \geq 5$ существует ориентируемое многообразие Лёбелля $L(n)$.*

Отметим, что первый пример замкнутого неориентируемого гиперболического 3-многообразия, построенный в 1980 г. Н. Аль-Джубоури [17], является многообразием Лёбелля, соответствующим случаю $n = 5$.

Построение неориентируемых многообразий Лёбелля и задающих их эпиморфизмов в группу $\mathbb{Z}_2^3$ также имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Каждое такое многообразие связано с раскраской граней соответствующего многогранника в более чем четыре цвета (которые также являются элементами группы $\mathbb{Z}_2^3$), гарантирующей выполнение условий леммы 1. Это позволяет дать конструктивное доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2 [5]. *Для любого целого $n \geq 5$ существует неориентируемое многообразие Лёбелля $L(n)$.*

3. Объемы многообразий. Объемы многообразий Лёбелля частично изучались в [8], где, используя неарифметичность и естественно-максимальность группы $G(n)$ при почти всех n , установлено следующее свойство.

ТЕОРЕМА 3 [8]. *Для любого целого N существует не менее чем N попарно негомеоморфных многообразий Лёбелля с равным объемом.*

Ниже мы получим явную формулу для объема многообразий Лёбелля.

Рассмотрим многообразие Лёбелля $L(n)$, $n \geq 5$. По построению

$$\text{vol}(L(n)) = 8 \cdot \text{vol}(R(n)) = 8 \cdot 2n \cdot \text{vol}(P(n)), \quad (1)$$

где через $P(n)$ обозначен шестигранник $ABC A' B' C' DE$. Заметим, что для вычисления объема многогранника $P(n)$ могут быть использованы результаты работы [14].

В самом деле, рассматривая модель пространства $\mathbb{H}^3$ в шаре, можем считать, что треугольник ABC получен в результате отсечения идеальной вершины K – общей точки продолжений прямых $A'A$, DB и EC , пересекающихся во внешности шара. Аналогично, можем считать, что треугольник $A'B'C'$ получен в результате отсечения идеальной

вершины L – общей точки продолжений прямых AA' , DB' и EC' , пересекающихся во внешности шара. Рассмотрим “идеальный” тетраэдр, вершинами которого являются точки K и L во внешности шара и конечные вершины D и E . Отметим, что в тетраэдре $KLDE$ только три двугранных угла при ребрах KL , KD и LE не являются прямыми. Такой тетраэдр является ортосхемой в терминологии [14]. Следовательно, шестигранник $P(n)$ является дважды усеченной полной ортосхемой, и для вычисления его объема может быть использована следующая формула.

ТЕОРЕМА 4 [14]. *Обозначим через $R = R(\alpha, \beta, \gamma)$ полную ортосхему в $\mathbb{H}^3$ с острыми диэдральными углами α, β, γ . Объем $\text{vol}(R)$ ортосхемы R может быть найден по следующей формуле:*

$$\text{vol}(R) = \frac{1}{4} \left(\Lambda(\alpha + \delta) - \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta\right) + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right),$$

где

$$0 \leq \delta = \arctg \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \alpha \cos \gamma} < \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Для шестигранника $P(n)$ мы имеем $\alpha = \gamma = \pi/4$ (углы при ребрах BD и EC') и $\beta = \pi/n$ (угол при ребре AA'). Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{vol}(P(n)) &= \frac{1}{4} \left(2\Lambda\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) - 2\Lambda\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \delta\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(2\Lambda\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right) + 2\Lambda\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \delta\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Напомним [13], [15], что для функции Лобачевского имеет место следующее тождество:

$$\Lambda(2x) = 2\Lambda(x) + 2\Lambda\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Используя это свойство для случая $x = \delta - \pi/4$, из формулы (3) получаем

$$\text{vol}(P(n)) = \frac{1}{4} \left(2\Lambda\left(2\delta - \frac{\pi}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \delta\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right). \quad (4)$$

Обозначим $\theta = \pi/2 - \delta$. Тогда согласно (4) имеем

$$\text{vol}(P(n)) = \frac{1}{4} \left(2\Lambda(\theta) + \Lambda\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right). \quad (5)$$

Теперь найдем величину θ . Поскольку $\alpha = \gamma = \pi/4$ и $\beta = \pi/n$, подставляя в (2), имеем

$$\delta = \arctg \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1},$$

и используя тригонометрические формулы, получим, что

$$\delta = \arccos \frac{1}{2 \cos(\pi/n)}.$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{2 \cos(\pi/n)}. \quad (6)$$

Таким образом, из (1), (5) и (6) получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $L(n)$, $n \geq 5$, является многообразием Лёбелля. Тогда

$$\text{vol}(L(n)) = 4n \left(2\Lambda(\theta) + \Lambda\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

где θ определяется формулой (6).

Напомним [5], что классическое многообразие Лёбелля $\mathcal{L}$ из [4] может быть представлено в виде $\mathcal{L} = \mathbb{H}^3 / \text{Кег } \varphi_6$, где эпиморфизм $\varphi_6: G(6) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ соответствует такой четырехцветной раскраске граней 14-гранника $R(6)$, при которой верхнее и нижнее шестиугольные основания раскрашиваются в один и тот же цвет; причем такая раскраска единственна с точностью до подстановки на множестве цветов. Следовательно, классическое многообразие Лёбелля $\mathcal{L}$ является стандартным многообразием Лёбелля при $n = 6$, и мы получаем явную формулу для вычисления его объема.

СЛЕДСТВИЕ 1. Гиперболический объем $\text{vol}(\mathcal{L})$ классического многообразия Лёбелля $\mathcal{L}$, построенного в [4], определяется следующей формулой:

$$\text{vol}(\mathcal{L}) = 24 \left(2\Lambda(\theta) + \Lambda\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \Lambda\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

где $\theta = \pi/2 - \arccos(1/\sqrt{3})$. При этом $\text{vol}(\mathcal{L}) = 48.184368 \dots$

4. Асимптотика объемов. Теорема 5 позволяет получить асимптотику объемов многообразий Лёбелля $L(n)$.

Как видно из (6), если $n \rightarrow \infty$, то $\theta \rightarrow \pi/6$. В силу непрерывности функции $\Lambda(x)$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Для объемов многообразий Лёбелля $L(n)$ имеет место следующая асимптотика:

$$\text{vol}(L(n)) \sim 10V_3^{\max} n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Напомним, что величина $V_3^{\max} = 2\Lambda(\pi/6) = 1.014 \dots$ есть максимальный объем трехмерного симплекса в $\mathbb{H}^3$, который достигается на правильном идеальном тетраэдре.

В контексте изучения гиперболических орбифолдов малого объема большой интерес представляет величина $\text{vol}(M)/|\text{Isom}(M)|$, где $\text{vol}(M)$ обозначает объем гиперболического многообразия M , а $|\text{Isom}(M)|$ обозначает порядок его группы изометрий.

Группы изометрий классического многообразия Лёбелля и стандартных ориентируемых многообразий Лёбелля были вычислены в [6] и [7]. Как показано в [5], стандартное ориентируемое многообразие Лёбелля $L(n)$ существует только при $n = 3k$, $k \geq 2$, и единственно в каждом из этих случаев. Согласно [6] группа изометрий $\text{Isom}(L(n))$ стандартного ориентируемого многообразия Лёбелля $L(n)$ изоморфна полупрямому произведению

$$\text{Isom}(L(n)) = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \lambda(\mathbb{D}_n \lambda \mathbb{Z}_2), \quad (8)$$

где $\mathbb{D}_n$ обозначает группу диэдра порядка $2n$.

Таким образом, из (7) и (8) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Для стандартных ориентируемых многообразий Лёбелля $L(n)$ имеет место следующая асимптотика:

$$\frac{\text{vol}(L(n))}{|\text{Isom}(L(n))|} \sim \frac{5}{16} V_3^{\max}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $V_3^{\max} = 2\Lambda(\pi/6) = 1.014 \dots$ – максимальный объем гиперболического трехмерного симплекса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 147–259. М.: ВИНТИ, 1988.
- [2] Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
- [3] Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.: ОНТИ НКТП, 1936.
- [4] Löbell F. Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford–Kleinischer Räume negativer Krümmung // Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig. Math.-Phys. Kl. 1931. V. 83. P. 168–174.
- [5] Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля // Сиб. матем. ж. 1987. Т. 28. № 5. С. 50–53.
- [6] Mednykh A. D., Vesnin A. Yu. On three-dimensional hyperbolic manifolds of Löbell type // Complex Analysis and Applications'85. Sofia, 1986. P. 440–446.
- [7] Медных А. Д. Группы автоморфизмов трехмерных гиперболических многообразий // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 1. С. 40–44.
- [8] Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия с общим фундаментальным многогранником // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 6. С. 29–32.
- [9] Gromov M. Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen // Lecture Notes in Math. V. 842. Berlin: Springer, 1981. P. 40–53.
- [10] Apanasov B. N., Gutsul I. S. Greatly symmetric totally geodesic surfaces and closed hyperbolic 3-manifolds which share a fundamental polyhedron // Topology'90 / ed. B. Apanasov, W. Neumann, A. Ried and L. Siebenmann. Berlin: de Gruyter, 1992. P. 37–53.
- [11] Zimmermann B. A note on hyperbolic 3-manifolds of the same volume // Monatsh. Math. 1994. V. 117. P. 139–143.
- [12] Weeks J. SnapPea, Version 5/18/92. A program for the Macintosh to compute hyperbolic structures on 3-manifolds.
- [13] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–146.
- [14] Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
- [15] Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
- [16] Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 1. С. 445–447.
- [17] Al-Jubouri N. K. On nonorientable hyperbolic 3-manifolds // Chinese Quart. J. Math. 1980. V. 31. P. 9–18.