Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ш. Галстян, Г. А. Карагулян, О расходимости почти всюду прямоугольных частичных сумм кратных рядов Фурье ограниченных функций, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 24–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:13:10

УДК 517

О РАСХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЧАСТИЧНЫХ СУММ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С. Ш. Галстян, Г. А. Карагулян

Установлены следующие результаты, являющиеся многомерными обобщениями известных теорем:

- 1) если функция $f \in C(\mathbb{T}^m)$ не имеет интервалов постоянства в $\mathbb{T}^m$, то существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ такой, что ряд Фурье суперпозиции $F = f \circ \varphi$ расходится по прямоугольникам почти всюду;
- 2) для любой интегрируемой функции $f \in L^1(\mathbb{T}^m)$, с $|f(\mathbf{x})| \geq \alpha > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^m$, существует функция знаков $\varepsilon(\mathbf{x}) = \pm 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^m$, такая, что ряд Фурье произведения $f(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})$ расходится по прямоугольникам почти всюду.

Библиография: 5 названий.

Мы рассматриваем кратные ряды Фурье

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$$

функций $f \in L^1(\mathbb{T}^m)$, где $\mathbb{T}^m$ — m -мерный тор, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_1 x_1 + \dots + n_m x_m$.

В теории рядов Фурье известны многие результаты, в которых посредством естественных процедур, осуществляемых над функцией, получаются ряды Фурье с некоторыми свойствами. Подробный обзор таких результатов в одномерном случае сделан А. М. Олевским в [1]. В частности, отметим следующий результат Г. Бора [2], доказанный комплексными методами: для любой вещественной функции $f \in C(\mathbb{T})$ существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, такой, что ряд Фурье суперпозиции $F = f \circ \varphi$ сходится равномерно. А. А. Саакяном в [3], Ж.-П. Каханом и И. Капнельсоном в [4] даны вещественные доказательства этой теоремы. С другой стороны, Олевский [1], решив проблему Н. Н. Лузина, доказал существование такой функции $f \in C(\mathbb{T})$, что каков бы ни был гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, ряд Фурье суперпозиции $F = f \circ \varphi$ не является абсолютно сходящимся.

В кратном случае известен пример непрерывной функции на $\mathbb{T}^m$, $m \geq 2$, построенный Ч. Фефферманом в [5], ряд Фурье которой расходится всюду по прямоугольникам. Саакян в [3] установил кратный аналог теоремы Бора. А именно: для любой функции $f \in C(\mathbb{T}^m)$ существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ такой, что ряд Фурье суперпозиции $f \circ \varphi$ сходится равномерно по прямоугольникам.

В работе получены результаты отрицательного характера. Они обобщают вышеупомянутый результат Феффермана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C(\mathbb{T}^m)$ есть некоторая функция, не имеющая интервалов постоянства в $\mathbb{T}^m$. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ такой, что ряд Фурье суперпозиции $F = f \circ \varphi$ расходится почти всюду по прямоугольникам.

ТЕОРЕМА 2. Для любой интегрируемой функции $f \in L^1(\mathbb{T}^m)$ с $|f(x)| \geq \alpha > 0$, $x \in \mathbb{T}^m$, существует функция знаков $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) = \pm 1$, $x \in \mathbb{T}^m$, такая, что ряд Фурье произведения $f(x)\varepsilon(x)$ расходится почти всюду по прямоугольникам.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{T}^m)$ – некоторая функция и $1 \leq a < b \leq \infty$ – произвольные числа. Обозначим $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$,

$$S_{[a,b]}^*(x, f) = \max\{|S_{\mathbf{k}}(x, f)| : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^m, a \leq k_i \leq b\},$$

$$S^*(x, f) = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^m} |S_{\mathbf{k}}(x, f)|, \quad x \in \mathbb{T}^m,$$

где $S_{\mathbf{k}}(x, f)$ – прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции f . Обозначим также

$$\Delta_N(x, f) = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^m \int_{\delta_N^{\mathbf{k}}} f(t) dt \quad \text{при } x \in \delta_N^{\mathbf{k}}, \quad (1)$$

где N – натуральное, а δ_N – семейство полукоткрытых кубов

$$\delta_N^{\mathbf{k}} = \left[\frac{2\pi k_1}{N}, \frac{\pi(k_1+1)}{N}\right) \times \dots \times \left[\frac{2\pi k_m}{N}, \frac{\pi(k_m+1)}{N}\right), \quad (2)$$

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in I(N) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N} : 0 \leq k_i < N\}. \quad (3)$$

Очевидно, семейство $\delta_N = \{\delta_N^{\mathbf{k}}\}$ есть разбиение $\mathbb{T}^m$ на равные кубы со сторонами $2\pi/N$.

Из работы Феффермана [5] известна следующая

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < \pi$ – некоторые числа и

$$\varphi_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x_1 x_2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m, \quad m \geq 2, \quad (4)$$

$$K_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{T}^m : |x_1| > \varepsilon, |x_2| > \varepsilon\}. \quad (5)$$

Тогда

$$S_{[\varepsilon\lambda, 2\pi\lambda]}^*(x, \varphi_{\lambda}) \geq \xi(\varepsilon) \log \lambda \quad \text{при } x \in K_{\varepsilon}, \quad (6)$$

где $\xi(\varepsilon) > 0$ есть постоянная, зависящая от ε (основание логарифма равно 2).

В [5] эта лемма доказана при $\varepsilon = 0.01$. Нам следует только отметить, что это доказательство без существенного изменения проходит также для произвольного ε .

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L^1(\mathbb{T}^m)$, а $E \subset \mathbb{T}^m$ – измеримое множество, причем

$$|f(x)| \geq \alpha > 0, \quad \Delta_N(x, \chi_E) \geq \beta > 0, \quad x \in \mathbb{T}^m, \quad (7)$$

для некоторого натурального N . Тогда для любой функции $g(x) \in L^{\infty}(\mathbb{T}^m)$ с условием

$$\|g\|_{\infty} \leq \alpha\beta \quad (8)$$

существует функция $\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{T}^m$, такая, что

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \pm 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases} \quad \Delta_N(x, f\varepsilon) = \Delta_N(x, g), \quad x \in \mathbb{T}^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного натурального N и семейства чисел $h = \{h_N^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in I(N), 0 \leq h_N^{\mathbf{k}} \leq 2\pi/N\}$ определим функцию $\varepsilon(x, h)$, $x \in \mathbb{T}^m$. При $x \in \delta_N^{\mathbf{k}}$ (см. (2), (3)) возьмем

$$\varepsilon(x, h) = \begin{cases} \operatorname{sign} f(x), & x \in \delta_N^{\mathbf{k}}, \quad \frac{2\pi k_1}{N} \leq x_1 < \frac{2\pi k_1}{N} + h_N^{\mathbf{k}}, \\ -\operatorname{sign} f(x), & x \in \delta_N^{\mathbf{k}}, \quad \frac{2\pi k_1}{N} + h_N^{\mathbf{k}} \leq x_1 < \frac{2\pi(k_1+1)}{N}. \end{cases}$$

Из (7) следует, что

$$\Delta_N(x, f\chi_E\varepsilon(\cdot, h_0)) \leq -\alpha\beta, \quad \Delta_N(x, f\chi_E\varepsilon(\cdot, h_{2\pi/N})) \geq \alpha\beta, \quad x \in \mathbb{T}^m,$$

где h_0 есть семейство, состоящее из одних нулей, а $h_{2\pi/N}$ состоит из $2\pi/N$. Отсюда из соображений непрерывности относительно каждого $h_N^{\mathbf{k}}$ с учетом (1) и (8) следует, что для некоторого h'

$$\Delta_N(x, f\chi_E\varepsilon(\cdot, h')) = \Delta_N(x, g),$$

что дает нам искомую функцию $\varepsilon(x) = \chi(x)\varepsilon(x, h')$.

ЛЕММА 3. Пусть функция $h \in L^1(\mathbb{T}^m)$ удовлетворяет условию

$$\Delta_N(x, h) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^m, \quad (9)$$

для некоторого натурального N . Тогда справедливо неравенство

$$|S_n(x, h)| \leq \frac{n(\max m_i + 1)^{m+1}}{(2\pi)^{m-1}N} \|h\|_{L^1(\mathbb{T}^m)}, \quad n = (n_1, \dots, n_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$$

есть ядро Дирихле. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{i=1}^m D_{n_i}(x_i) - \prod_{i=1}^m D_{n_i}(y_i) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \left(\prod_{i=1}^{k-1} D_{n_i}(y_i) \prod_{i=k}^m D_{n_i}(x_i) - \prod_{i=1}^k D_{n_i}(y_i) \prod_{i=k+1}^m D_{n_i}(x_i) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \prod_{i=1}^{k-1} D_{n_i}(y_i) \prod_{i=k+1}^m D_{n_i}(x_i) (D_{n_i}(x_i) - D_{n_i}(y_i)) \right| \\ &\leq \left(\max n_i + \frac{1}{2} \right)^{m-1} \sum_{k=1}^m |D_{n_i}(x_i) - D_{n_i}(y_i)| \\ &\leq \left(\max n_i + \frac{1}{2} \right)^{m-1} \sum_{k=1}^m \frac{m_i(m_i+1)}{2} |x_i - y_i| \\ &\leq m(\max n_i + 1)^{m+1} \max |x_i - y_i|, \end{aligned}$$

где $\prod_{i=1}^0 = \prod_{i=m+1}^m = 1$. Отсюда в силу (9) имеем

$$\begin{aligned} |S_n(x, h)| &= \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int_{\mathbb{T}^m} \prod_{i=1}^m D_{m_i}(x_i + t_i) h(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_N}^{\mathbf{k}} \left(\prod_{i=1}^m D_{n_i}(x_i + t_i) - \prod_{i=1}^m D_{n_i}\left(x_i + \frac{2\pi k_i}{N}\right) \right) h(t) dt \right| \\ &\leq \frac{m(\max n_i + 1)^{m+1}}{N(2\pi)^{m-1}} \|h\|_{L^1(\mathbb{T}^m)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть (X, μ) есть конечное измеримое пространство, а G_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — измеримые в нем множества такие, что

$$\mu\left(G_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i\right) \geq \alpha \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i\right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

при некотором $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) \geq (1 - (1 - \alpha)^n) \mu(X). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем по индукции. Случай $n = 1$ очевиден. Предположим, что (11) имеет место при $m = k$. Отсюда ввиду (10) имеем

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} G_i\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^k G_i\right) + \mu\left(G_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^k G_i\right) \\ &\geq (1 - \alpha)(1 - (1 - \alpha)^k) \mu(X) + \alpha \mu(X) = (1 - (1 - \alpha)^{k+1}) \mu(X). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Обозначим

$$Q(\delta, n) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m : \left\{ \frac{n x_i}{2\pi} \right\} \in [0, \delta), i = 1, \dots, m \right\}, \quad (12)$$

где $0 < \delta < 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, существует последовательность натуральных чисел $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\frac{l_k^{m+2}}{\sqrt{\log l_k}} > 2 \sum_{i=k+1}^\infty \frac{1}{\sqrt{l_i}}. \quad (13)$$

Будем рассматривать множества $Q_k = Q(\delta_k, n_k)$, $k = 1, 2, \dots$, где

$$\delta_k = \frac{2}{\alpha \sqrt{\log l_k}}, \quad n_k = l_k^{m+2}. \quad (14)$$

В силу (12) и (13) грубые оценки показывают, что

$$\Delta_{n_k} \mathbf{x} > \frac{1}{\alpha \sqrt{l_k}}, \quad \chi_{Q_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^{\infty} Q_i} > \frac{1}{\alpha \sqrt{l_k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Далее по индукции мы построим функции $\varepsilon_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots$, $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^m$, такие, что

$$\varepsilon_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \pm 1, & \mathbf{x} \in E_k, \\ 0, & \mathbf{x} \notin E_k, \end{cases} \quad (16)$$

где E_k – множества, определенные равенствами

$$E_1 = \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad E_k = \bigcup_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} Q_i \setminus \bigcup_{i=N_{k+1}+1}^{\infty} Q_i \quad (17)$$

для каких-то натуральных чисел $N_1 < N_2 < \dots$. От $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем требовать также выполнение следующих неравенств:

$$S_{[k, 2\pi\lambda_k]}^* \left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^k f\varepsilon_i \right) > k, \quad \mathbf{x} \in G_k \subset \mathbb{T}^m, \quad (18)$$

$$S_{2\pi\lambda_{k-1}}^* (\mathbf{x}, f\varepsilon_k) < \frac{1}{2^k}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m, \quad (19)$$

где $\lambda_k \rightarrow \infty$ – некоторая возрастающая последовательность положительных чисел, а для множеств G_k имеем

$$\left| G_k \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{k}]^2}^{k-1} G_i \right| > \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{k}]^2}^{k-1} G_i \right| - \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1. \quad (20)$$

Начальный шаг индукции тривиален. Предположим, что (18) и (19) выполняются при $k \leq p$. Обозначим

$$R'_{p+1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m : S_{[p+1, \infty)}^* \left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^p f\varepsilon_i \right) < \infty \right\}, \quad R''_{p+1} = \mathbb{T}^m \setminus R'_{p+1}.$$

Очевидно, существуют множества $G'_{p+1} \subset R'_{p+1}$, $G''_{p+1} \subset R''_{p+1}$, числа $A_{p+1} > 0$ и $\lambda'_{p+1} \in \mathbb{N}$, $\lambda'_{p+1} > 2\pi\lambda_p$, такие, что

$$|G'_{p+1} \cup G''_{p+1}| > (2\pi)^m - \frac{1}{2^{p+2}}, \quad (21)$$

$$S_{[p+1, \infty)}^* \left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^p f\varepsilon_i \right) < A_{p+1}, \quad \mathbf{x} \in A'_{p+1}, \quad (22)$$

$$S_{[p+1, \lambda'_{p+1}]}^* \left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^p f\varepsilon_i \right) > p+2, \quad \mathbf{x} \in G''_{p+1}. \quad (23)$$

Далее возьмем натуральное $\lambda_{p+1} > \lambda'_{p+1}$ так, чтобы (см. (6))

$$(\log \lambda_{p+1})^{1/2} > 6 \max\{p+1, A_{p+1}\}, \quad (24)$$

$$\lambda_{p+1} > 2^{p+2}(2\pi)_m, \quad (25)$$

$2\pi\lambda_{p+1} + 1 = l_{N_{p+1}}$ при некотором $N_{p+1} > N_p$, а также выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^m} \operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{p+1}} \cdot e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right| &< \frac{1}{2^{p+2}(\lambda_p)^{2m+1}}, \\ \left| \int_{\mathbb{T}^m} \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{p+1}} \cdot e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right| &< \frac{1}{2^{p+2}(\lambda_p)^{2m+1}} \end{aligned} \quad (26)$$

при $\max |m_i| \leq \lambda'_{p+1}$. Справедливость неравенств (26) при достаточно большом λ_{p+1} следует из (4). Из (14), (15), (17) и (25) имеем

$$\Delta_{(2\pi\lambda_{p+1}+1)m+2}(\mathbf{x}, \chi_{E_{p+1}}) \geq \Delta_{m_{p+1}}(\mathbf{x}, \chi_{Q_{N_{p+1}} \setminus \bigcup_{i \geq N_{p+1}} Q_i}) \geq \frac{1}{\alpha \sqrt{\lambda_{p+1}}}. \quad (27)$$

Из (6) и (24) следует, что

$$\max\{S_{[p+1; 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(\mathbf{x}, \operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{p+1}}), S_{[p+1; 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(\mathbf{x}, \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{p+1}})\} \geq \frac{1}{2} \xi(\varepsilon_{p,m}) \log \lambda_{p+1} \quad (28)$$

при $\mathbf{x} \in K_{\varepsilon_{p,m}}$, где $\varepsilon_{p,m} = 2^{-p-3}(2\pi)^{1-m}$. Обозначим

$$\begin{aligned} H' &= \left\{ \mathbf{x} : S_{[p+1; 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(\mathbf{x}, \operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{p+1}}) \geq \frac{1}{2} \xi(\varepsilon_{p,m}) \log \lambda_{p+1} \right\}, \\ H'' &= \left\{ \mathbf{x} : S_{[p+1; 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(\mathbf{x}, \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{p+1}}) \geq \frac{1}{2} \xi(\varepsilon_{p,m}) \log \lambda_{p+1} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (5) и (28) имеем

$$|K_{2^{-p-3}(2\pi)^{1-m}}| > (2\pi)^m - \frac{1}{2^{p+1}}, \quad H' \cup H'' = K_{\varepsilon_{p,m}}.$$

Отсюда легко следует, что для одного из двух множеств H' или H'' , которое обозначим через H_{p+1} , имеет место неравенство

$$\left| H_{p+1} \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{p+1}]^2}^p G_i \right| > \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{p+1}]^2}^p G_i \right| - \frac{1}{2^{p+2}}. \quad (30)$$

Обозначим через ψ_{p+1} ту из функций $\operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{p+1}}$ и $\operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{p+1}}$, которая участвует в определении H_{p+1} (см. (29)). Тогда в силу неравенства (26) имеем

$$H_{p+1} = \left\{ \mathbf{x} : S_{[p+1; 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(\mathbf{x}, \psi_{p+1}) \geq \frac{1}{2} \xi(\varepsilon_{p,m}) \log \lambda_{p+1} \right\}, \quad (31)$$

$$\left| \int_{\mathbb{T}^m} \psi_{p+1}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right| \leq 2^{-p-3}(2\lambda'_{p+1} + 1)^m \quad (32)$$

при $\max |n_i| \leq \lambda'_{p+1}$. В результате применения леммы 2, полагая

$$N = (\lambda_{p+1})^{m+1}, \quad \beta = (\log \lambda_{p+1})^{-1/2} \alpha^{-1}, \quad g(x) = g_{p+1}(x) = (\log \lambda_{p+1})^{-1/2} \psi_{p+1}(x) \quad (33)$$

и учитывая (27), получим функцию $\varepsilon_{p+1}(x)$ вида (16) (где $k = p+1$) такую, что

$$\Delta_{(2\pi\lambda_{p+1}+1)^{m+2}}(x, f\varepsilon_{p+1}) = \Delta_{(2\pi\lambda_{p+1}+1)^{m+2}}(x, g_{p+1}).$$

Очевидно, можно предполагать $\|f\|_{L^1} \leq 1$. Далее, в силу (33) можно применить лемму 3 для $h = f\varepsilon_{p+1} - g_{p+1}$, $N = (2\pi\lambda_{p+1}+1)^{m+2}$. С учетом (24) при $\max n_i \leq (2\pi\lambda_{p+1}+1)^{m+1}$ получим (см. (33))

$$\begin{aligned} |S_n(x, f\varepsilon_{p+1}) - S_n(x, g_{p+1})| &= |S_n(x, h)| \\ &\leq \frac{m}{(2\pi)^{1-m}} \frac{(\max n_i + 1)^{m+1}}{(2\pi\lambda_{p+1} + 1)^{m+2}} (\|f\|_{L^1} + 1) \leq 2^{-p-2}. \end{aligned} \quad (34)$$

С другой стороны, в силу (33), (31) и (24) из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} S_{[p+1, 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(x, g_{p+1}) &= (\log \lambda_{p+1})^{-1/2} S_{[p+1, 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(x, \psi_{p+1}) \\ &\geq \frac{1}{2} \xi (2^{-p-3} (2\pi)^{1-m}) (\log \lambda_{p+1})^{1/2} \quad \text{при } x \in H_{p+1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, из (22) и (24) при $x \in H_{p+1} \cap G'_{p+1}$ имеем

$$\begin{aligned} S_{[p+1, 2\pi\lambda_{p+1}]}^* \left(x, \sum_{i=1}^{p+1} \varepsilon_i f \right) &\geq S_{[p+1, 2\pi\lambda_{p+1}]}^*(x, f\varepsilon_{p+1}) - S_{[p+1, \infty]}^* \left(x, \sum_{i=1}^p \varepsilon_i f \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \xi \left(\frac{1}{2^{p+2} (2\pi)^{m-1}} \right) (\log \lambda_{p+1})^{1/2} - A_{p+1} - \frac{1}{2^{p+1}} > p+1. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (32) следует неравенство

$$S_{\lambda'_{p+1}}(x, \psi_{p+1}) \leq \frac{1}{2^{p+2}},$$

которое вместе с (33) и (34) дает

$$S_{\lambda'_{p+1}}(x, f\varepsilon_{p+1}) \leq \frac{1}{2^{p+1}}, \quad (36)$$

и, следовательно, если $x \in G''_{p+1}$, то из (23) имеем

$$\begin{aligned} S_{[p+1, 2\pi\lambda_{p+1}]}^* \left(x, \sum_{i=1}^{p+1} \varepsilon_i f \right) &\geq S_{[p+1, \lambda'_{p+1}]}^* \left(x, \sum_{i=1}^p \varepsilon_i f \right) - S_{\lambda'_{p+1}}^*(x, f\varepsilon_{p+1}) \\ &\geq p+2 - \frac{1}{2^p} > p+1, \quad x \in G''_{p+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (35) и (37) получаем

$$S_{[p+1, 2\pi\lambda_{p+1}]}^* \left(x, \sum_{i=1}^{p+1} \varepsilon_i f \right) \geq p+1, \quad x \in H_{p+1} \cap (G'_{p+1} \cup G''_{p+1}).$$

Далее, обозначив $G_{p+1} = H_{p+1} \cap (G'_{p+1} \cup G''_{p+1})$, из (21) и (30) имеем (20) и (18) в случае $k = p+1$. Неравенство (19) (при $k = p+1$) немедленно следует из (36), если учесть, что $\lambda'_{p+1} > 2\pi\lambda_p$.

Итак, построена последовательность функций $\{\varepsilon_k(x)\}$ со свойствами (16)–(20). Из (16) и (17) следует корректность определения функции

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_k(x) \quad \text{при } x \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

на $\mathbb{T}^m$. Из (20) имеем

$$\left| G_k \setminus \bigcup_{i=t^2}^{k-1} G_i \right| > \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=t^2}^{k-1} G_i \right| - \frac{1}{2t^2} \quad \text{при } t^2 \leq k < (t+1)^2. \quad (38)$$

Покажем, что

$$\left| \bigcup_{i=t^2}^{(t+1)^2-1} G_i \right| > \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2t+1} \right) (2\pi)^m. \quad (39)$$

В том случае, когда существует $k_0 \in [t^2, (t+1)^2]$ с условием

$$\left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=t^2}^{k_0-1} G_i \right| < \frac{4}{2t^2},$$

утверждение (39) следует очевидным образом. А в противном случае ввиду (38) имеем

$$\left| G_k \setminus \bigcup_{i=t^2}^{k-1} G_i \right| > \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=t^2}^{k-1} G_i \right| - \frac{1}{2t^2} > \frac{1}{4} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=t^2}^{k-1} G_i \right|$$

и, следовательно, применив лемму 4, получаем (39), откуда следует, что для множества $G = \varinjlim_{k \rightarrow \infty} G_k$ выполнено

$$|G| = 1. \quad (40)$$

С другой стороны, если $x \in G$, то $x \in G_{n_k}$ для некоторой последовательности $n_k \rightarrow \infty$. Отсюда благодаря (18) и (19) имеем

$$\begin{aligned} S_{[n_k, 2\pi\lambda_{n_k}]}^*(x, f\varepsilon) &= S_{[n_k, 2\pi\lambda_{n_k}]}^* \left(x, \sum_{i=1}^{\infty} f\varepsilon_i \right) \\ &\geq S_{[n_k, 2\pi\lambda_{n_k}]}^* \left(x, \sum_{i=1}^{n_k} f\varepsilon_i \right) - \sum_{i=n_k+1}^{\infty} S_{[0, 2\pi\lambda_{n_k}]}^*(x, f\varepsilon_i) \geq n_k - \frac{1}{2n_k}. \end{aligned}$$

Последнее вместе с (40) завершает доказательство теоремы 2.

Следующую лемму сформулируем без доказательства. Она наглядная и легко следует из геометрических соображений.

ЛЕММА 5. Пусть $\Delta = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ есть замкнутый прямоугольник из $\mathbb{R}^m$, а $\delta_j, \omega_j \subset \prod_{i=1}^m (a_i, b_i)$, $j = 1, 2, \dots, r$, – семейство замкнутых кубов таких, что $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$, $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда существует гомеоморфизм $\tau: \Delta \rightarrow \Delta$, тождественный на границе Δ , и $\tau(\delta_i) = \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Отсюда следует

ЛЕММА 6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\Delta = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ и не имеет m -мерных интервалов постоянства. Тогда для любых чисел α_i, β_i , $i = 1, 2, \dots, r$, таких, что

$$\inf_{x \in \Delta} f(x) \leq \alpha_i < \beta_i \leq \sup_{x \in \Delta} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (41)$$

и любого семейства попарно непересекающихся кубов $\delta_j \subset \prod_{i=1}^m (a_i, b_i)$, $j = 1, \dots, r$, существует гомеоморфизм $\tau: \Delta \rightarrow \Delta$, тождественный на границе Δ , такой, что

$$\alpha_i < f(\tau(x)) < \beta_i, \quad x \in \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (41) следует существование семейства попарно непересекающихся кубов ω_i , содержащихся в $\prod_{i=1}^m (a_i, b_i)$, таких, что $\alpha_i < f(x) < \beta_i$, $x \in \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. Далее, применив лемму 5, получим гомеоморфизм $\tau: \Delta \rightarrow \Delta$ с $\tau(\delta_i) = \omega_i$, для которого очевидно будет выполняться (42).

Обозначим через Γ_0 семейство всех гомеоморфизмов тора $\mathbb{T}^m$ и пусть $\Gamma_N = \{\tau \in \Gamma_0 : \tau(\delta_k^N) = \delta_k^N, k \in I(N), \tau(x) \text{ тождественный на границах } \delta_k^N\}$ (δ_k^N определен в (2)).

Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, то обозначим $\|\mathbf{a}\| = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|$.

Для любого $\tau \in \Gamma_0$ определим

$$\omega(\delta, \tau) = \inf_{\|x - x'\| > \delta} \|\tau(x) - \tau(x')\|. \quad (43)$$

ЛЕММА 7. Пусть $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ есть возрастающая последовательность натуральных чисел таких, что N_{k+1} делится на N_k , а $\sigma_k \in \Gamma_{N_k}$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность гомеоморфизмов, причем для $\tau_n = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_1$ имеем

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tau_n\right) > \frac{2}{N_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (44)$$

Тогда существует предел

$$\tau(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x) \quad (45)$$

и $\tau(x)$ представляет собой гомеоморфизм тора $\mathbb{T}^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование предела (45) и его непрерывность очевидно следует из неравенства

$$\|\tau_{n_1}(x) - \tau_n(x)\| \leq \frac{2\pi}{N_n}, \quad x \in \mathbb{T}_m, \quad n_1 > n,$$

которое непосредственно вытекает из определения Γ_N . Нам следует только доказать, что $\tau(x)$ – взаимно-однозначное отображение.

Если $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, то $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| > 1/n$ для некоторого натурального n . Тогда из (43) и (44) следует неравенство $\|\tau_n(\mathbf{x}) - \tau_n(\mathbf{x}')\| > 2/N_{n+1}$, из которого имеем $\tau_n(\mathbf{x}) \in \delta_{\mathbf{i}}^{N_{n+1}}$, $\tau_n(\mathbf{x}') \in \delta_{\mathbf{i}'}^{N_{n+1}}$, $\overline{\delta_{\mathbf{i}}^{N_{n+1}}} \cap \overline{\delta_{\mathbf{i}'}^{N_{n+1}}} = \emptyset$, и, следовательно, $\tau(\mathbf{x}) \in \delta_{\mathbf{i}}^{N_{n+1}}$, $\tau(\mathbf{x}') \in \delta_{\mathbf{i}'}^{N_{n+1}}$. Отсюда же получаем $\tau(\mathbf{x}) \neq \tau(\mathbf{x}')$. Теперь предположим, что $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^m$ — любая точка. Имеем $\mathbf{y} \in \delta_{\mathbf{i}_k}^{N_k}$, $k = 1, 2, \dots$. Из (43) и (44) видно, что $\text{diam } \tau^{-1}(\overline{\delta_{\mathbf{i}_k}^{N_k}}) < 1/k$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(\overline{\delta_{\mathbf{i}_k}^{N_k}}) = \mathbf{x}, \quad \tau(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Итак, доказано, что $\tau(\mathbf{x})$ есть гомеоморфизм.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\delta^N(\alpha)$ семейство полуоткрытых кубов

$$\delta_{\mathbf{i}}^N(\alpha) = \left[\frac{2\pi i_1}{N}, \frac{2\pi(i_1 + \alpha)}{N} \right) \times \dots \times \left[\frac{2\pi i_m}{N}, \frac{2\pi(i_m + \alpha)}{N} \right), \quad \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) \in I(N),$$

где $0 < \alpha \leq 1$ — некоторое число. Заметим, что при $\alpha = 1$ это есть семейство δ^N (см. (2), (3)). Очевидно, можно предположить $|f(\mathbf{x})| \leq 1$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^m$.

В дальнейшем мы будем выбирать последовательности $N_k \rightarrow \infty$, $N_k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \rightarrow 1$, $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, 2, \dots$, так, что α_k рационально и семейство $\delta^{N_{k+1}}$ разбивает $\delta^{N_k}(\alpha_k)$, т.е. каждое множество из семейств $\delta^{N_k}(\alpha_k)$ представимо в виде объединения кубов $\delta_{\mathbf{i}}^{N_{k+1}}$, $\mathbf{i} \in I(N_{k+1})$.

Искомый гомеоморфизм $\tau(\mathbf{x})$ получится в виде предела (45), где $\tau_n(\mathbf{x}) = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_0$ с $\sigma_0 \in \Gamma_0$, $\sigma_i \in \Gamma_{N_i}$, $i = 1, 2, \dots$, и будет выполняться неравенство (44).

Итак, нам предстоит построить последовательности N_k , α_k и σ_k с изложенными выше свойствами, а также последовательность ступенчатых функций $Q_k(\mathbf{x})$ с интервалами постоянств $\delta_{\mathbf{i}}^{N_k}$, $\mathbf{i} \in I(N_k)$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$f(\tau_n(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}) + R_n(\mathbf{x}), \quad (46)$$

$$S^* \left(\mathbf{x}, \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \right) \leq A_n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m, \quad (47)$$

$$S_{[n, 2\pi\lambda_n]}(\mathbf{x}, Q_n) > 2A_n, \quad \mathbf{x} \in G_n,$$

где

$$\begin{aligned} |R_n(\mathbf{x})| &\leq 2^n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m, \\ |R_n(\mathbf{x})| &\leq (4\pi\lambda_n + 1)^{-m}, \quad \mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{i} \in I(N_n)} \delta_{\mathbf{i}}^{N_n}(\alpha_n), \end{aligned} \quad (48)$$

$$(2\pi\alpha_n)^m > (2\pi)^m - \frac{1}{2^n(4\pi\lambda_n + 1)^m}, \quad (49)$$

$A_n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ – последовательности чисел, а $G_n \in \mathbb{T}^m$, $n = 1, 2, \dots$, – измеримые множества с

$$\left| G_n \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{n}]^2}^{n-1} G_i \right| > \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{n}]^2}^{n-1} G_i \right| - \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1 \quad (50)$$

($[\cdot]$ есть целая часть). Построение будем вести по индукции. Начальный шаг тривиален. Предположим, что имеет место представление (46) с изложенными выше соотношениями в случае $n = k$. Так как $\sum_{i=1}^k Q_i$ есть ступенчатая функция, то имеем

$$S^* \left(x, \sum_{i=1}^k Q_i \right) \leq A_{k+1}, \quad x \in \mathbb{T}^m,$$

для некоторого числа $A_{k+1} > 0$. Обозначим

$$\mu_k = \inf_{i \in I_{N_k}} \sup_{x \in \delta_i^{N_k}} |R_k(x)|.$$

Из условия на функцию $f(x)$ и соотношения (46) следует, что $\mu_k > 0$. Выберем $\lambda_{k+1} > \lambda_k$ такое, что

$$\lambda_{k+1} > 2^{k-2}(2\pi)^{m-1}(k+1), \quad \frac{1}{2}\mu_k \xi \left(\frac{1}{2^{k-2}(2\pi)^{m-1}} \right) \log \lambda_{k+1} > 3A_{k+1}, \quad (51)$$

где ξ есть функция из леммы 1. При $x \in K_{2-k-3(2\pi)^{1-m}}$ из (6) и (51) вытекает, что величина

$$\max \{ S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(x, \operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{k+1}}), S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(x, \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{k+1}}) \}$$

оценивается снизу через $3A_{k+1}/\mu_k$. Обозначив

$$H' = \left\{ x \in \mathbb{T}^m : S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(x, \operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{k+1}}) > \frac{3A_{k+1}}{\mu_k} \right\},$$

$$H'' = \left\{ x \in \mathbb{T}^m : S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(x, \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{k+1}}) > \frac{3A_{k+1}}{\mu_k} \right\},$$

имеем

$$H' \cup H'' \supset K_{2-k-3(2\pi)^{1-m}}, \quad |K_{2-k-3(2\pi)^{1-m}}| > (2\pi)^m - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Отсюда следует, что для одного из двух множеств H' и H'' , которое обозначим через G_{k+1} , имеет место неравенство

$$\left| G_{k+1} \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{k+1}]^2}^k G_i \right| > \frac{1}{2} \left| \mathbb{T}^m \setminus \bigcup_{i=[\sqrt{k+1}]^2}^k G_i \right| - \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Обозначим через $\psi_{k+1}(x)$ ту из функций $\mu_k \operatorname{Re} \varphi_{\lambda_{k+1}}$ или $\mu_k \operatorname{Im} \varphi_{\lambda_{k+1}}$, которая естественным образом связана с G_{k+1} . Итак, имеем

$$G_{k+1} = \{ x \in \mathbb{T}^m : S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(x, \psi_{k+1}) > 3A_{k+1} \}. \quad (52)$$

Далее, учитывая рациональность числа α_k , можно выбрать N_{k+1} так, чтобы семейство $\delta^{N_{k+1}}$ разбивало $\delta^{N_k}(\alpha_k)$ и выполнялось неравенство

$$\sup_{i \in I_{N_{k+1}}} \sup_{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \delta_i^{N_{k+1}}} |\psi_{k+1}(\mathbf{x}') - \psi_{k+1}(\mathbf{x}'')| \leq \frac{1}{(4\pi\lambda_{k+1} + 1)^m}. \quad (53)$$

Пусть α_{k+1} такое рациональное число, что

$$\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}(4\pi\lambda_{k+1} + 1)^m}\right)^{1/m} < \alpha_{k+1} < 1. \quad (54)$$

Из (46) следует, что $R_k(\mathbf{x})$ непостоянна ни на каком интервале. Отсюда, применив лемму 6 в каждом интервале $\delta_i^{N_k}$, получим такой гомеоморфизм $\sigma_{k+1} \in \Gamma_{k+1}$, что

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{x} \in \delta_i^{N_{k+1}}(\alpha_{k+1})} \psi_{k+1}(\mathbf{x}) &\leq \inf_{\mathbf{x} \in \delta_i^{N_k}(\alpha_{k+1})} R_k(\sigma_{k+1}(\mathbf{x})) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \delta_i^{N_{k+1}}(\alpha_{k+1})} R_k(\sigma_{k+1}(\mathbf{x})) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \delta_i^{N_{k+1}}(\alpha_{k+1})} \psi_{k+1}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (55)$$

Определим

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(\mathbf{x}) &= \psi_{k+1}(\text{centre } \delta_i^{N_{k+1}}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \delta_i^{N_{k+1}}, \\ R_{k+1}(\mathbf{x}) &= R_k(\sigma_{k+1}(\mathbf{x})) - Q_{k+1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Из (53)–(55) следует, что

$$|\psi_{k+1}(\mathbf{x}) - Q_{k+1}(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{(4\pi\lambda_{k+1} + 1)^m}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m,$$

а также условия (48), (49) при $n = k+1$, и поэтому с учетом (52) при $\mathbf{x} \in G_{k+1}$ получаем

$$S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(\mathbf{x}, Q_{k+1}) \geq S_{[k+1, 2\pi\lambda_{k+1}]}^*(\mathbf{x}, \psi_{k+1}) - 1 \geq 3A_{k+1} - 1 > 2A_{k+1}.$$

Таким образом, построена последовательность гомеоморфизмов $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$, $\sigma_n \in \Gamma_n$, со свойствами (46)–(50). Докажем, что предел $\tau(\mathbf{x})$ (см. (45)) является искомым гомеоморфизмом. Во-первых, в силу (46) заметим, что

$$f(\tau(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^n Q_k(\mathbf{x}) + P_n(\mathbf{x}), \quad (56)$$

где

$$P_n(\mathbf{x}) = R_n(\sigma_{n+1}(\sigma_{n+2}(\dots(\mathbf{x})\dots))).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} |P_n(\mathbf{x})| &\leq 2^n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^m, \\ |P_n(\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda_n + 1)^m}, \quad \mathbf{x} \in \bigcup_{i \in I(N_n)} \delta_i^{N_n}(\alpha_n). \end{aligned} \quad (57)$$

С другой стороны, из (49) и определения $\delta_{\mathbf{i}}^N(\alpha)$ имеем

$$\left| \bigcup_{\mathbf{i} \in I(N_n)} \delta_{\mathbf{i}}^{N_n}(\alpha_n) \right| \geq (2\pi)^m - \frac{1}{2^n(4\pi\lambda_n + 1)^m}. \quad (58)$$

Из (57), (58) вытекает неравенство

$$S_{[0, 2\pi\lambda_n]}^*(x, P_n) \leq 2, \quad x \in \mathbb{T}^m. \quad (59)$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2 (см. (38)–(40)), с учетом (50) можно убедиться, что множество $G = \varliminf_{n \rightarrow \infty} G_n$ имеет полную меру. С другой стороны, если $x \in G$, то $x \in G_{k_n}$ для некоторой последовательности $k_n \rightarrow \infty$. Из (47), (56) и (59) имеем

$$\begin{aligned} S_{[k_n, 2\pi\lambda_{k_n}]}^*(x, f(\tau(x))) &\geq S_{[k_n, 2\pi\lambda_{k_n}]}^*(x, Q_{k_n}) - S^*\left(x, \sum_{i=1}^{k_n-1} Q_i\right) - S_{[0, 2\pi\lambda_{k_n}]}^*(x, P_{k_n}) \\ &\geq 2A_{k_n} - A_{k_n} - 2 > A_{k_n} - 2. \end{aligned}$$

Итак, теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Олевский А. М. Модификации функций и ряды Фурье // УМН. 1984. Т. 40. № 3. С. 157–193.
- [2] Bohr H. Über einen Satz von J. Pal // Acta Sci. Math. (Szeged). 1935. V. 7. P. 129–135.
- [3] Саакян А. А. Интегральные модули гладкости и коэффициенты Фурье у суперпозиции функций // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 4. С. 597–608.
- [4] Kahane J.-P., Katznelson Y. Series de Fourier des fonctions bornées // Studia Pure Math. / ed. P. Erdős. Mem. Paul Turan. Budapest: Akad. Kiadó, 1983. P. 395–410.
- [5] Fefferman Ch. On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191–195.

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН Армении

Поступило
21.11.96