Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Бердышева, Оптимальное множество модуля непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L_2 , *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 666–674

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:23:25

УДК 517.518.834

ОПТИМАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ТОЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

Е. Е. Бердышева

Функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и компактному множеству $Q \subset [-\pi, \pi]$ сопоставим величину $\omega(f, Q) = \sup_{t \in Q} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_{L_2[-\pi, \pi]}$, являющуюся аналогом модуля непрерывности. Обозначим через $K(n, Q)$ наименьшую константу в неравенстве Джексона между наилучшим приближением функции f тригонометрическими полиномами степени $n - 1$ в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ и модулем непрерывности $\omega(f, Q)$. Из результатов Н. И. Черных следует, что $K(n, Q) \geq 1/\sqrt{2}$ и $K(n, [0, \pi/n]) = 1/\sqrt{2}$. На основании одного результата В. А. Юдина мы показываем, что если мера множества Q меньше, чем π/n , то $K(n, Q) > 1/\sqrt{2}$.

Библиография: 13 названий.

Пусть $L_2 = L_2[-\pi, \pi]$ есть пространство комплекснозначных 2π -периодических функций, суммируемых с квадратом на $[-\pi, \pi]$, рассматриваемое с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пусть T_n есть множество тригонометрических полиномов

$$g(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$$

степени не более n с комплексными коэффициентами. Для функции $f \in L_2$ обозначим через

$$E_n(f) = \inf \{ \|f - g\|_{L_2} : g \in T_{n-1} \} \quad (1)$$

наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $n - 1$. Для $\delta > 0$ величина

$$\omega(f, [0, \delta]) = \sup \{ \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_{L_2} : t \in [0, \delta] \}$$

является классическим модулем непрерывности первого порядка. *Неравенством Джексона* называется неравенство вида

$$E_n(f) \leq K \omega(f, [0, \delta]), \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Александра фон Гумбольдта, стипендия RUS/1072237 STP, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00783.

выполняющееся для всех функций $f \in L_2$ с константой K , не зависящей от f . Наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$K(n, [0, \delta]) = \sup \left\{ \frac{E_n(f)}{\omega(f, [0, \delta])} : f \in L_2 \right\} \quad (3)$$

называется *константой Джексона*; здесь и далее в аналогичных ситуациях мы полагаем, что $0/0 = 0$ и $c/0 = +\infty$ при $c > 0$. Неравенство Джексона в различных функциональных пространствах с различными модулями непрерывности имеет богатейшую историю (см., например, [1], [2]). Одним из базовых в этой тематике является следующий результат Черных [3]–[5]:

$$K(n, [0, \delta]) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\pi}{n} \leq \delta \leq \pi, \quad K(n, [0, \delta]) > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{n}. \quad (4)$$

Оценка снизу

$$K(n, [0, \delta]) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

для всех $0 < \delta \leq 2\pi$ вытекает также из более общего результата В. И. Бердышева [6].

При исследовании неравенства Джексона (2) Черных фактически решил следующую экстремальную задачу. Пусть n – натуральное число, $\Phi(n)$ – класс функций вида

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt, \quad t \in [0, \pi],$$

удовлетворяющих следующим двум свойствам:

- 1) $\varphi(t) \not\equiv 0$; $\varphi(t) \geq 0$, $t \in [0, \pi]$;
- 2) $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \cos kt \, dt \leq 0$, $k \geq n$.

Для $\varphi \in \Phi(n)$ положим $\tau(\varphi) = \pi$, если $\varphi(\pi) \neq 0$, и

$$\tau(\varphi) = \inf \{ \tau > 0 : \varphi(x) = 0 \text{ при } \tau \leq x \leq \pi \}$$

в противном случае. Обозначим

$$m(n) = \inf \{ \tau(\varphi) : \varphi \in \Phi(n) \}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Из результатов Черных [3]–[5] следует, что $m(n) = \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, и экстремальной является функция

$$\Psi_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \frac{\pi}{n} \leq t \leq \pi. \end{cases} \quad (6)$$

Более тонкую в сравнении с (5) задачу рассмотрел Юдин [7]:

$$M(n) = \inf \{ \vartheta(\varphi) : \varphi \in \Phi(n) \}, \quad \vartheta(\varphi) = \text{meas} \{ t \in [0, \pi] : \varphi(t) > 0 \}; \quad (7)$$

здесь и всюду в работе meas обозначает обычную лебеговскую меру на прямой. Юдин доказал [7], что

$$M(n) = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

и функция (6) является экстремальной. Он также построил пример другой функции, экстремальной в задачах $m(n)$ и $M(n)$.

В этой работе мы изучаем следующее обобщение задачи (2), (3). Пусть Q – компактное множество на $[-\pi, \pi]$. Введем модуль непрерывности

$$\omega(f, Q) = \sup \{ \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_{L_2} : t \in Q \}. \quad (9)$$

Аналогично (2) и (3), будем рассматривать неравенство Джексона

$$E_n(f) \leq K \omega(f, Q)$$

и константу Джексона

$$K(n, Q) = \sup \left\{ \frac{E_n(f)}{\omega(f, Q)} : f \in L_2 \right\}. \quad (10)$$

В силу свойства

$$\|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_{L_2} = \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_{L_2}$$

имеет место равенство $\omega(f, Q) = \omega(f, |Q|)$, где $|Q| = \{|q| : q \in Q\} \subset [0, \pi]$. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением компактов $Q \subset [0, \pi]$. Нетрудно видеть, что для компактов Q_1 и Q_2 на $[0, \pi]$ справедливо утверждение

$$Q_1 \subset Q_2 \implies K(n, Q_1) \geq K(n, Q_2). \quad (11)$$

Из этого свойства и результата Черных (4) вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\min \{ K(n, Q) : Q \text{ — компакт на } [0, \pi] \} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (12)$$

На основании результата Юдина (8), А. Г. Бабенко в работе [2] высказал предположение, что $K(n, Q) > 1/\sqrt{2}$ для любого замкнутого множества $Q \subset [0, \pi]$ с $\text{meas } Q < \pi/n$. В представленной работе мы доказываем, что это предположение верно. Введем величину

$$h(n) = \inf \left\{ \text{meas } Q : Q \text{ — компакт на } [0, \pi], K(n, Q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (13)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство*

$$h(n) = \frac{\pi}{n}.$$

Нижняя грань в (13) достигается на множестве $Q = [0, \pi/n]$.

При изучении величины (13) достаточно ограничиться компактными Q положительной меры. Действительно, предположим, что нижняя грань в (13) достигается на множестве Q меры нуль. Построим последовательность множеств Q_k с мерой $1/k$, содержащих Q . В силу (11) справедливо неравенство

$$K(n, Q_k) \leq K(n, Q) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

С другой стороны, из (12) следует, что

$$K(n, Q_k) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$K(n, Q_k) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и мы получаем, что нижняя грань в (13) есть нуль, даже если в определении величины (13) мы рассматриваем только множества положительной меры.

Как хорошо известно, в терминах коэффициентов Фурье

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

функции f выражения для величин (1) и (9) выглядят следующим образом:

$$E_n^2(f) = \sum_{|k| \geq n} |\hat{f}_k|^2, \quad \omega^2(f, Q) = 2 \sup_{q \in Q} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 (1 - \cos kq).$$

Положим $a_0 = |\hat{f}_0|^2$, $a_k = |\hat{f}_k|^2 + |\hat{f}_{-k}|^2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$E_n^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \quad \omega^2(f, Q) = 2 \sup_{q \in Q} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1 - \cos kq) \geq 2 \sup_{q \in Q} \sum_{k=n}^{\infty} a_k (1 - \cos kq).$$

Отсюда следует, что

$$2K^2(n, Q) = \sup \left\{ \frac{\sum_{k \geq n} a_k}{\sup_{q \in Q} \sum_{k \geq n} a_k (1 - \cos kq)} : a_k \geq 0, \sum_{k \geq n} a_k < \infty \right\}.$$

Пусть $\mathcal{M}^+(Q)$ есть множество вещественных неотрицательных борелевских мер μ на компакте Q , нормированных условием

$$\mu(Q) = \int_Q d\mu(t) = 1. \quad (14)$$

Обозначим

$$c_k(\mu) = \frac{2}{\pi} \int_Q \cos kt \, d\mu(t), \quad \mu \in \mathcal{M}^+(Q), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

В наших рассуждениях мы будем использовать две экстремальные величины:

$$\begin{aligned} \eta(n, \mu) &= \sup_{k \geq n} c_k(\mu), \\ J(n, Q) &= \frac{\pi}{2} \cdot \inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(Q)} \eta(n, \mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Юдин [7] доказал следующую лемму (здесь мы записываем ее в наших терминах).

ЛЕММА 1 (В. А. Юдин [7]). Пусть σ – неотрицательная мера Бореля на отрезке $[0, \pi]$. Предположим, что существует конечное множество $B \subset \mathbb{Z}_+$ такое, что $c_k(\sigma) \leq 0$ при $k \in \mathbb{Z}_+ \setminus B$. Тогда числовой ряд

$$\frac{c_0(\sigma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\sigma)$$

абсолютно сходится.

Изучим свойства величины (15).

ЛЕММА 2. Пусть Q – компактное множество положительной меры на отрезке $[0, \pi]$. Имеют место неравенства

$$0 \leq J(n, Q) < 1. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из нормировки (14) следует, что для любой меры $\mu \in \mathcal{M}^+(Q)$ и любого $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство $c_k(\mu) \leq 2/\pi$. Отсюда вытекает, что $J(n, Q) \leq 1$. Докажем, что, на самом деле, имеет место строгое неравенство. Достаточно привести пример меры $\mu \in \mathcal{M}^+(Q)$, для которой $\eta(n, \mu) < 2/\pi$. Рассмотрим меру $\mu_Q \in \mathcal{M}^+(Q)$, заданную следующим образом: для борелевского множества $A \subseteq Q$ положим $\mu_Q(A) = \text{meas } A / \text{meas } Q$. Докажем, что для нее выполняются неравенства $\eta(n, \mu_Q) < 2/\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Мы должны оценить

$$c_k(\mu_Q) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\text{meas } Q} \int_Q \cos kt \, dt.$$

Покажем, что $c_k(\mu_Q) < 2/\pi$ для всех $k \geq 1$. Зафиксируем k и выберем положительное число $\varepsilon < \text{meas } Q$. Пусть $t_\nu = 2\pi\nu/k$, $\nu = 0, 1, \dots, [k/2]$, – множество точек t из $[0, \pi]$, в которых функция $\cos kt$ принимает свое наибольшее значение, равное единице. Положим

$$Q_\varepsilon = Q \cap \left\{ \bigcup_{\nu=0}^l \left[t_\nu - \frac{\varepsilon}{2(l+1)}, t_\nu + \frac{\varepsilon}{2(l+1)} \right] \right\}, \quad l = \left[\frac{k}{2} \right].$$

Имеем $\text{meas } Q_\varepsilon \leq \varepsilon$ и $\text{meas}(Q \setminus Q_\varepsilon) > 0$. На множестве $Q \setminus Q_\varepsilon$ выполняется неравенство $\cos kt \leq \beta$ с некоторым $\beta < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} c_k(\mu_Q) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\text{meas } Q} \left(\int_{Q_\varepsilon} \cos kt \, dt + \int_{Q \setminus Q_\varepsilon} \cos kt \, dt \right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{\text{meas } Q} (\text{meas } Q_\varepsilon + \beta \cdot \text{meas}(Q \setminus Q_\varepsilon)) < \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Итак, $c_k(\mu_Q) < 2/\pi$ для всех $k \geq 1$. Кроме того,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k(\mu_Q) = 0$$

как предел коэффициентов Фурье функции $(\text{meas } Q)^{-1} \cdot \chi_Q$, определенной и суммируемой на $[0, \pi]$ (χ_Q обозначает характеристическую функцию множества Q). Отсюда следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{k \geq n} c_k(\mu_Q) < \frac{2}{\pi}.$$

Теперь докажем первое неравенство в (16). Предположим противное, т.е. предположим, что существует мера $\mu \in \mathcal{M}^+(Q)$, для которой $\eta(n, \mu) = \alpha < 0$. Это означает, что μ удовлетворяет условиям леммы 1 с $B = \{0, 1, \dots, n-1\}$. В силу леммы 1 ряд $c_0(\mu)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mu)$ должен сходиться. Но это невозможно, так как мы имеем оценку $c_k(\mu) \leq \alpha < 0$ при $k \geq n$. Полученное противоречие доказывает неравенство $J(n, Q) \geq 0$.

В следующей лемме указана связь задач (15) и (10).

ЛЕММА 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, Q – компактное множество положительной меры на отрезке $[0, \pi]$. Имеет место соотношение

$$2K^2(n, Q) = \frac{1}{1 - J(n, Q)}. \quad (17)$$

При этом существует мера $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^+(Q)$, на которой достигается нижняя грань в задаче (15).

Соотношение двойственности типа (17) впервые было замечено Арестовым (см. [8]). В различных ситуациях оно было доказано Бабенко, Арестовым и автором [8]–[11]. Все эти результаты получены по одной и той же схеме. Ниже для полноты изложения мы приводим доказательство в нашем случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество функций

$$\Omega(n) = \left\{ \Delta(t) = \sum_{k \geq n} a_k (1 - \cos kt) : a_k \geq 0, \sum_{k \geq n} a_k = 1 \right\}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} 2K^2(n, Q) &= \sup \left\{ \frac{1}{\sup_{t \in Q} \sum_{k \geq n} a_k (1 - \cos kt)} : a_k \geq 0, \sum_{k \geq n} a_k = 1 \right\} \\ &= \sup_{\Delta \in \Omega(n)} \frac{1}{\|\Delta\|_{C(Q)}} = \frac{1}{R(n, Q)}, \end{aligned}$$

где

$$R(n, Q) = \inf_{\Delta \in \Omega(n)} \|\Delta\|_{C(Q)}$$

есть расстояние от функции, равной тождественному нулю, до выпуклого множества $\Omega(n)$ в пространстве $C(Q)$. В силу известной теоремы двойственности (см., например, [1, п. 1.3]) и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве C на компакте (см., например, [12, п. IV.6.3])

$$\begin{aligned} R(n, Q) &= \sup \left\{ \inf_{\Delta \in \Omega(n)} w(\Delta) : w \in C^*(Q), \|w\|_{C^*(Q)} \leq 1 \right\} \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(Q)} \inf_{\Delta \in \Omega(n)} \int_Q \Delta(t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathcal{M}(Q)$ есть множество борелевских вещественных вероятностных мер μ на Q . При этом существует мера $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(Q)$, на которой достигается супремум в (18). Поскольку все функции $\Delta \in \Omega(n)$ неотрицательны, мы можем ограничиться в (18) рассмотрением только мер $\mu \in \mathcal{M}^+(Q)$. Таким образом,

$$R(n, Q) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^+(Q)} \inf_{\Delta \in \Omega(n)} \int_Q \Delta(t) d\mu(t).$$

Для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}^+(Q)$ имеем

$$\begin{aligned} \inf_{\Delta \in \Omega(n)} \int_Q \Delta(t) d\mu(t) &= \inf \left\{ \int_Q \sum_{k \geq n} a_k (1 - \cos kt) d\mu(t) : a_k \geq 0, \sum_{k \geq n} a_k = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k \geq n} a_k \int_Q (1 - \cos kt) d\mu(t) : a_k \geq 0, \sum_{k \geq n} a_k = 1 \right\} \\ &= \inf_{k \geq n} \int_Q (1 - \cos kt) d\mu(t) = 1 - \sup_{k \geq n} \int_Q \cos kt d\mu(t) \\ &= 1 - \sup_{k \geq n} \frac{\pi}{2} \cdot c_k(\mu) = 1 - \eta(n, \mu). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R(n, Q) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^+(Q)} (1 - \eta(n, \mu)) = 1 - J(n, Q).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\text{meas } Q > 0$, то константа $K(n, Q)$ конечна. Это вытекает из соотношения двойственности (17) и правого неравенства в (16).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношение двойственности (17) и левое неравенство в (16) дают еще одно доказательство формулы (12).

В следующей лемме мы укажем связь задач (13) и (7).

ЛЕММА 4. *Имеет место равенство $h(n) = M(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем неравенство

$$h(n) \geq M(n). \quad (19)$$

Пусть Q – компакт на $[0, \pi]$ такой, что $K(n, Q) = 1/\sqrt{2}$ (например, $Q = [0, \pi/n]$). Из (17) следует, что $J(n, Q) = 0$. Пусть $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^+(Q)$ есть экстремальная мера задачи (15). Определим функцию $\bar{\varphi}(t)$ как сумму абсолютно сходящегося (в силу леммы 1) ряда

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{c_0(\bar{\mu})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\bar{\mu}) \cos kt, \quad t \in [0, \pi].$$

Функция $\bar{\varphi}$ есть непрерывная четная 2π -периодическая функция. Она задает на $[0, \pi]$ борелевскую меру $\bar{\psi}$ по формуле

$$\bar{\psi}(A) = \int_A \bar{\varphi}(t) dt$$

для (борелевского) множества $A \subseteq [0, \pi]$. Распилим меру $\bar{\mu}$, заданную на Q , до борелевской меры $\bar{\bar{\mu}}$ на $[0, \pi]$, положив $\bar{\bar{\mu}}(A) = \bar{\mu}(A \cap Q)$ на борелевских множествах $A \subseteq [0, \pi]$. Эта мера обращается в нуль вне множества Q , совпадает с $\bar{\mu}$ на Q и неотрицательна на $[0, \pi]$. Для нее мы имеем

$$c_k(\bar{\bar{\mu}}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos kt d\bar{\bar{\mu}}(t) = \frac{2}{\pi} \int_Q \cos kt d\bar{\mu}(t) = c_k(\bar{\mu}) = c_k(\bar{\psi}).$$

По теореме единственности для коэффициентов Фурье–Стилтьеса (см. [13, гл. VII, § 1]) имеем $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\psi}$. Следовательно, функция $\bar{\varphi}$ неотрицательна на $[0, \pi]$ и обращается в нуль вне множества Q . Кроме того, $c_k(\bar{\mu}) \leq 0$, $k \geq n$, в силу равенства $\eta(n, \bar{\mu}) = 0$. Таким образом, $\bar{\varphi} \in \Phi(n)$. Для множества $\bar{Q} = \text{supp } \bar{\varphi} \subseteq Q$ также будем иметь $K(n, \bar{Q}) = 1/\sqrt{2}$. Далее, $\text{meas } Q \geq \text{meas } \bar{Q} \geq M(n)$ в силу определения (7). Минимизируя неравенство $\text{meas } Q \geq M(n)$ по всем компактам Q со свойством $K(n, Q) = 1/\sqrt{2}$, получаем неравенство (19).

Докажем теперь противоположное неравенство

$$h(n) \leq M(n). \quad (20)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Существует функция $\tilde{\varphi} \in \Phi(n)$, для которой

$$\text{meas}\{t \in [0, \pi] : \tilde{\varphi}(t) > 0\} < M(n) + \varepsilon.$$

Положим $\tilde{Q} = \text{supp } \tilde{\varphi}$. Имеем $\text{meas } \tilde{Q} < M(n) + \varepsilon$. Определим борелевскую меру $\tilde{\mu}$ на $\tilde{Q}$ по следующему правилу: для борелевского множества $A \subseteq \tilde{Q}$ положим

$$\tilde{\mu}(A) = \left(\int_0^\pi \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \right)^{-1} \cdot \int_A \tilde{\varphi}(\tau) d\tau.$$

Так как $\tilde{\varphi} \geq 0$, то $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+(Q)$. При этом

$$c_k(\tilde{\mu}) = \left(\int_0^\pi \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \right)^{-1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_A \tilde{\varphi}(t) \cos kt dt.$$

По определению класса $\Phi(n)$ имеем $\eta(n, \tilde{\mu}) \leq 0$. Учитывая левое неравенство в (16), получаем $J(n, \tilde{Q}) = 0$. Следовательно, $K(n, \tilde{Q}) = 1/\sqrt{2}$ и $h(n) \leq \text{meas } \tilde{Q} < M(n) + \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольным, отсюда следует неравенство (20). Лемма доказана.

Утверждение теоремы вытекает теперь из леммы 4 и результата Юдина (8).

Выражаю глубокую признательность В.В. Арестову за постоянный контакт по теме работы. Благодарю А.Г. Бабенко, который обратил мое внимание на результат В.А. Юдина (8) и высказал предположение о связи этого результата со свойствами константы Джексона. Благодарю обоих за замечания, относящиеся к оформлению работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- [2] Babenko A. G. On the Jackson–Stechkin inequality for the best L^2 -approximations of functions by trigonometric polynomials // Proc. Steklov. Inst. Mat. Suppl. 1. 2001. P. S30–S47.
- [3] Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [4] Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
- [5] Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and Function Spaces. Proc. Conf. Gdan'sk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
- [6] Бердышев В. И. О теореме Джексона в L_p // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 3–16.
- [7] Юдин В. А. Одна экстремальная задача для функции распределения // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 316–320.
- [8] Бабенко А. Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 651–664.
- [9] Арестов В. В., Попов В. Ю. Неравенства Джексона на сфере в L_2 // Изв. вузов. Матем. 1995. № 8 (399). С. 13–20.
- [10] Berdysheva E. E. Several related extremal problems for multivariate entire functions of exponential type // East J. Approx. 2000. V. 6. № 2. P. 241–260.
- [11] Arestov V. V., Babenko A. G. Continuity of the best constant in the Jackson inequality in L^2 with respect to argument of modulus of continuity // Approximation Theory: A volume dedicated to B. Sendov / ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA, 2002. P. 13–23.
- [12] Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I: General Theory. Pure and Applied Mathematics. V. 7. New York–London: Interscience Publ., 1958; Reprint. New York: John Wiley, 1988.
- [13] Stein E. M., Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton Math. Series. V. 32. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.