Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Денисова, Полиномиальные по скорости интегралы динамических систем с двумя степенями свободы и торическим конфигурационным пространством, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 37–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 02:33:47

УДК 517.9+531.01

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПО СКОРОСТИ ИНТЕГРАЛЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И ТОРИЧЕСКИМ КОНФИГУРАЦИОННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Н. В. Денисова

В работе рассматриваются динамические системы с двумя степенями свободы с торическим конфигурационным пространством, допускающие полиномиальные первые интегралы по скорости. В работе получены конструктивные критерии существования условных линейных и квадратичных интегралов на двумерном торе. Кроме того, показано, что при некоторых дополнительных условиях степень “неприводимого” интеграла геодезического потока на торе не превосходит 2.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В работе рассматриваются динамические системы с двумя степенями свободы, конфигурационным пространством которых является двумерный тор $\mathbb{T}^2$, допускающие полиномиальные первые интегралы по скорости. Это эквивалентно полной интегрируемости системы. Полиномиальные интегралы представимы в виде многочленов по скоростям с гладкими и однозначными коэффициентами на конфигурационном пространстве. Полиномиальный интеграл F наименьшей степени, независимый от интеграла энергии, называют *неприводимым*. Полиномы по скоростям, которые являются интегралами лишь для некоторых фиксированных значений полной энергии, называют *условными* полиномиальными интегралами.

В работе [1] Биркгоф исследовал локально наличие условных интегралов, являющихся полиномами не выше второй степени по скоростям. Оказалось, что наличие условного линейного интеграла связано со “скрытыми” циклическими координатами, а наличие условного квадратичного интеграла позволяет разделить канонические переменные. В п. 3 и п. 4 данной работы приведены глобальные варианты этих утверждений для случая, когда конфигурационным пространством системы является двумерный тор.

В п. 5 уточнен результат работы [2] о полиномиальных интегралах степени ≥ 2 геодезических потоков на двумерном торе.

Задача о полиномиальных интегралах степени ≤ 2 рассматривалась в работах [3], [4]. В [5] показано, что натуральная механическая система на двумерном торе с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

не может иметь неприводимых интегралов третьей и четвертой степени: в этом случае обязательно имеются интегралы первой и второй степени соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00747.

В [6] рассматривалась задача о наличии полного набора независимых полиномиальных интегралов системы с торическим пространством положений $\mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi\}$, кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad a_{ij} = \text{const},$$

и потенциалом $V: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в виде тригонометрического полинома. Показано, что тогда обязательно существуют n независимых интегралов, степени которых ≤ 2 .

2. Метрика. В работе [2] рассматривался двумерный тор с римановой метрикой

$$ds^2 = \frac{(dx_1^2 + dx_2^2)}{2\Lambda}, \quad (1)$$

где Λ – положительная функция от $x_1, x_2 \bmod 2\pi$.

Заметим, что риманову метрику на торе не всегда можно привести к виду (1). В работе [4] отмечено, что на торе глобальные конформные координаты могут не существовать. Однако, как указано в [7], в подходящих угловых переменных $x_1, x_2 \bmod 2\pi$ на $\mathbb{T}^2$ метрику можно привести к следующей форме:

$$ds^2 = \frac{M}{2}(a dx_1^2 + 2b dx_1 dx_2 + c dx_2^2), \quad (2)$$

где функция $M: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ положительна, a, b, c – вещественные постоянные такие, что $ac - b^2 > 0$. Для того чтобы получить метрику (2), надо воспользоваться теоремой об униформизации [8], согласно которой компактная риманова поверхность рода один конформно эквивалентна фактор-пространству комплексной плоскости $\mathbb{C}$ по некоторой решетке P . Если $a = c$ и $b = 0$, то решетка P будет ортогональной и x_1, x_2 – обычные конформные координаты на $\mathbb{T}^2$.

3. Условные линейные интегралы. Рассмотрим необратимую динамическую систему с двумя степенями свободы, конфигурационным пространством которой является двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$. Пусть функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{M}{2}(a\dot{x}_1^2 + 2b\dot{x}_1\dot{x}_2 + c\dot{x}_2^2) + \alpha\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - V. \quad (3)$$

Здесь $M > 0, \alpha, \beta, V$ – функции от угловых координат x_1, x_2 ; a, b и c – вещественные постоянные. Уравнения Лагранжа с лагранжианом (3) имеют интеграл энергии

$$M(a\dot{x}_1^2 + 2b\dot{x}_1\dot{x}_2 + c\dot{x}_2^2) + 2V = 2h.$$

Следуя Биркгофу [1, гл. II], выполним замену времени $t \mapsto \tau$ по формуле $d\tau = M^{-1} dt$. Обозначим штрихом дифференцирование по τ .

Предположим, что нас интересуют лишь движения $x_1(t), x_2(t)$ с фиксированным запасом энергии h . Для простоты записи положим $h = 0$ (в противном случае можно заменить V на $V - h$). Траектории таких движений, параметризованные новым временем τ , найдутся из системы уравнений Биркгофа:

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\frac{\lambda}{\Delta}(bx_1' + cx_2') - \frac{1}{\Delta}\left(c\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} - b\frac{\partial\gamma}{\partial x_2}\right), \\ x_2'' &= \frac{\lambda}{\Delta}(ax_1' + bx_2') - \frac{1}{\Delta}\left(-b\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} + a\frac{\partial\gamma}{\partial x_2}\right), \\ \lambda &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial\beta}{\partial x_1}, \quad \gamma = MV, \quad \Delta = ac - b^2 > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

дополненных энергетическим соотношением

$$ax_1'^2 + 2bx_1'x_2' + cx_2'^2 + 2\gamma = 0. \quad (5)$$

Используем (4) и (5) для решения задачи о наличии условных интегралов в виде полиномов не выше второй степени по скоростям. Эта задача была рассмотрена В. В. Козловым [9, гл. VIII] для случая $a = c = 1, b = 0$. Распространим этот результат на общий случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что система имеет условный линейный интеграл на энергетической поверхности $H = h$, где $h > \max V$. Тогда на пространстве положений можно так выбрать угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ и сделать замену времени $dt = \xi(\varphi_1, \varphi_2) d\tau$, чтобы траектории с запасом полной энергии h описывались лагранжевой системой, у которой*

- а) *кинетическая энергия – квадратичная форма по φ_1' и φ_2' с постоянными коэффициентами a, b и c ;*
- б) *2-форма гироскопических сил имеет вид $\lambda(\varphi_1)d\varphi_1 \wedge \varphi_2$;*
- в) *потенциал не зависит от переменной φ_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$lx_1' + mx_2' + n \quad (6)$$

– условный линейный интеграл. Дифференциалы dl, dm и dn однозначны на $T^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$. Вычислим в силу системы (4) производную интеграла (6):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l}{\partial x_1} x_1'^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial x_2} + \frac{\partial m}{\partial x_1} \right) x_1'x_2' + \frac{\partial m}{\partial x_2} x_2'^2 + \left(\frac{1}{\Delta}(am - bl)\lambda + \frac{\partial n}{\partial x_1} \right) x_1' \\ & + \left(\frac{1}{\Delta}(bm - cl)\lambda + \frac{\partial n}{\partial x_2} \right) x_2' + \frac{1}{\Delta}(bm - cl) \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - \frac{1}{\Delta}(am - bl) \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Функция (6) – интеграл уравнений (4) на энергетической поверхности (5), поэтому старшая форма многочлена (7) должна делиться на энергию системы. Отсюда получаем, что

$$c \frac{\partial l}{\partial x_1} - a \frac{\partial m}{\partial x_2} = 0, \quad 2b \frac{\partial l}{\partial x_1} - a \left(\frac{\partial l}{\partial x_2} + \frac{\partial m}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (8)$$

Продифференцируем первое уравнение (8) по x_1 , а второе по x_2 , получим уравнение на функцию l :

$$c \frac{\partial^2 l}{\partial x_1^2} - 2b \frac{\partial^2 l}{\partial x_1 \partial x_2} + a \frac{\partial^2 l}{\partial x_2^2} = 0. \quad (9)$$

Представим функцию l в виде ряда Фурье

$$\sum_{u,v} [l]_{uv} \exp(i(ux_1 + vx_2)),$$

где $[l]_{uv}$ – коэффициенты Фурье. Решая (9) методом Фурье, получим, что точки (u, v) целочисленной решетки удовлетворяют алгебраическому уравнению $cu^2 - 2buv + av^2 = 0$. Поскольку метрика положительно определена, то $u = v = 0$. Таким образом, $l \equiv \text{const}$; $l = l_0$. Аналогично доказывается, что $m \equiv m_0 = \text{const}$.

Приравнивая нулю коэффициенты при x'_1 и x'_2 в формуле (7), получим

$$\frac{\partial n}{\partial x_1} = -\frac{1}{\Delta}(am - bl)\lambda, \quad \frac{\partial n}{\partial x_2} = -\frac{1}{\Delta}(bm - cl)\lambda.$$

Форма dn однозначна, поэтому

$$(cl_0 - bm_0)\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + (-bl_0 + am_0)\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0. \quad (10)$$

Приравнивая нулю (7), получим аналогичное соотношение для потенциала:

$$(cl_0 - bm_0)\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + (-bl_0 + am_0)\frac{\partial \gamma}{\partial x_2} = 0. \quad (11)$$

Если выражения $cl_0 - bm_0$ и $-bl_0 + am_0$ рационально несоизмеримы (типичная ситуация), то из (10) и (11) вытекает постоянство функций λ , γ и тогда предложение 1 доказано. Пусть

$$\frac{cl_0 - bm_0}{-bl_0 + am_0} = \frac{p}{q},$$

причем целые числа p и q взаимно просты. Из (10) и (11) легко выводится, что $\lambda = \chi \times (qx_1 - px_2)$, $\gamma = \psi(qx_1 - px_2)$, где функции χ и ψ 2π -периодичны. Выполним линейное преобразование $\varphi_1 = qx_1 - px_2$, $\varphi_2 = rx_1 + sx_2$ с целыми r, s , удовлетворяющими соотношению $qs + pr = 1$. По теореме Безу ввиду взаимной простоты p и q такие числа r и s существуют. Переменные $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ – искомые.

4. Условные квадратичные интегралы. Теперь рассмотрим обратимый случай, когда $\alpha = \beta = 0$. Разложим потенциал γ в ряд Фурье

$$\sum_{u,v} [\gamma]_{uv} \exp(i(ux_1 + vx_2)).$$

Спектром функции γ назовем подмножество целочисленной решетки:

$$S_\gamma = \{w = (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : [\gamma]_{uv} \neq 0\}.$$

Оно переходит в себя при отражении $w \mapsto -w$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $h > \max V$ и система имеет условный квадратичный интеграл с однозначными коэффициентами. Тогда на пространстве положений можно так выбрать угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ и сделать замену времени $dt = \xi(\varphi_1, \varphi_2) d\tau$, чтобы траектории движений с запасом полной энергии h описывались лагранжевой системой, у которой

- а) кинетическая энергия – квадратичная форма по φ'_1 и φ'_2 с постоянными коэффициентами a, b и c ;
- б) спектр S_γ лежит на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат в метрике, обратной исходной.

ЗАМЕЧАНИЕ. В типичном случае спектр S_γ лежит на одной прямой и тогда условный квадратичный интеграл сводится к линейному условному интегралу.

Для доказательства предложения снова воспользуемся уравнениями (4), полагая $\lambda \equiv 0$. Предположим, что уравнения (4) имеют квадратичный интеграл

$$\frac{1}{2}(Ax_1'^2 + 2Bx_1'x_2' + Cx_2'^2) + f \quad (12)$$

на поверхности (5). Выпишем члены третьей степени по скоростям в выражении для производной интеграла (12) по новому времени τ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_1} x_1'^3 + \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) x_1'^2 x_2' + \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_1} \right) x_1' x_2'^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_2} x_2'^3. \quad (13)$$

Так как (12) – условный интеграл, то этот полином (13) должен делиться на полную энергию, т.е. его можно представить в виде:

$$(Kx_1' + Lx_2')(ax_1'^2 + 2bx_1'x_2' + cx_2'^2). \quad (14)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x_1' и x_2' в (13) и (14):

$$\begin{aligned} Ka &= \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_1}, & 2Kb + La &= \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_2}, \\ Lc &= \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_2}, & 2Lb + Kc &= \frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$ac \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) = bc \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial C}{\partial x_2}, \quad ac \left(\frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial A}{\partial x_1} + ba \frac{\partial C}{\partial x_2}.$$

Эти уравнения можно представить в следующей форме:

$$2c \frac{\partial(aB - bA)}{\partial x_1} - a \frac{\partial(aC - cA)}{\partial x_2} = 0, \quad 2a \frac{\partial(cB - bC)}{\partial x_2} + c \frac{\partial(aC - cA)}{\partial x_1} = 0. \quad (15)$$

Продифференцируем второе уравнение (15) по x_1 , а первое по x_2 и вычтем из второго уравнения первое; получим уравнение, аналогичное (9):

$$c \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (aC - cA) - 2b \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (aC - cA) + a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (aC - cA) = 0.$$

Для решения этого уравнения также воспользуемся методом Фурье. Тогда

$$aC - cA = k_2, \quad k_2 = \text{const}. \quad (16)$$

Используя (16), из уравнений (15) получим еще два равенства

$$cB - bC = k_1, \quad bA - aB = k_3, \quad (17)$$

где k_2, k_3 – вещественные постоянные. Заметим, что из равенств (16) и (17) вытекает соотношение

$$ak_1 + bk_2 + ck_3 = 0. \quad (18)$$

Используя интеграл энергии (5), квадратичный интеграл (12) можно преобразовать к виду, в котором коэффициенты A , B и C будут удовлетворять равенствам (16) и (17). Дифференцируя еще раз интеграл (12) в силу системы (4) и приравнявая нулю коэффициенты при x'_1 и x'_2 , получим соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{A}{\Delta} \left(c \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - b \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right) + \frac{B}{\Delta} \left(-b \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + a \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \frac{B}{\Delta} \left(c \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - b \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right) + \frac{C}{\Delta} \left(-b \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + a \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Следовательно, для функции γ получим следующее уравнение:

$$(cB - bC) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} + (aC - cA) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial x_2} + (bA - aB) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} = 0,$$

или

$$k_3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial x_2} + k_1 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} = 0.$$

Применяя метод Фурье, получим

$$k_3 v^2 + k_2 v u + k_1 u^2 = 0$$

для всех $(u, v) \in S_\gamma$. Введем новую переменную $\operatorname{tg} \vartheta = v/u$, где ϑ – угол между лучом, проходящим через вершину $(u, v) \in S_\gamma$, и горизонтальной координатной осью. Тогда

$$k_3 \operatorname{tg}^2 \vartheta + k_2 \operatorname{tg} \vartheta + k_1 = 0. \quad (19)$$

В случае $k_3 = 0$ (т.е. $b/a = B/A$ согласно (17)) уравнение (19) становится линейным. С учетом (18) получаем

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{k_1}{k_2} = \frac{b}{a}.$$

В этом случае спектр S_γ лежит на одной прямой, проходящей через начало координат. Подсчитаем дискриминант квадратного уравнения (19):

$$D = \left(k_2 + \frac{2b}{a} k_3 \right)^2 + \frac{4(ac - b^2)}{a^2} k_3^2.$$

Если $D = 0$ (т.е. $k_3 = k_2 = 0$), то из (18) или (19) следует равенство $k_1 = 0$. Тогда из (16) и (17) имеем

$$\frac{a}{c} = \frac{A}{C}, \quad \frac{b}{a} = \frac{B}{A}, \quad \frac{b}{c} = \frac{B}{C},$$

т.е. интеграл (12) пропорционален интегралу энергии (5), что противоречит его неприводимости.

Рассмотрим теперь случай, когда $D > 0$, тогда у квадратного уравнения (19) есть два различных корня $\operatorname{tg} \vartheta_1$ и $\operatorname{tg} \vartheta_2$. Пусть

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{v_1}{u_1}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{v_2}{u_2}. \quad (20)$$

Это – случай, когда спектр S_γ лежит на двух прямых. Рассмотрим условие ортогонального пересечения полученных прямых в обратной метрике:

$$\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$cu_2u_1 - bu_2v_1 + av_2v_1 - bu_1v_2 = 0. \quad (21)$$

Разделим (21) на u_1u_2 и, учитывая (20), получим

$$a \operatorname{tg} \vartheta_1 \operatorname{tg} \vartheta_2 - b(\operatorname{tg} \vartheta_1 + \operatorname{tg} \vartheta_2) + c = 0.$$

По теореме Виета

$$a \frac{k_1}{k_3} + b \frac{k_2}{k_3} + c = 0,$$

что эквивалентно соотношению (18).

Заметим, что если выполняются отношения $k_2/k_3 \in \mathbb{Q}$ и $k_1/k_3 \in \mathbb{Q}$, то обе прямые проходят через начало координат и целочисленные точки на плоскости, откуда следует наличие неприводимого квадратичного интеграла.

5. Полиномиальные интегралы степени выше 2. В работе [2] рассматривалась задача о полиномиальных интегралах геодезических потоков на двумерном торе для метрики (2), у которой $a = c$ и $b = 0$. Установлено, что если M – тригонометрический многочлен (спектр M конечен) и если геодезический поток допускает дополнительный неприводимый интеграл, полиномиальный по импульсам, то его степень не превосходит 2. Оказывается, этот результат можно распространить на случай произвольных метрик (2), если снова предположить, что конформный множитель M является тригонометрическим многочленом.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что имеется полиномиальный по скоростям интеграл F , независимый от интеграла энергии. Тогда*

- 1) *если степень F нечетна, то спектр функции M лежит на одной прямой, проходящей через начало координат;*
- 2) *если степень F четна, то спектр функции M лежит на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат в метрике, обратной исходной.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если уравнения геодезических на торе с метрикой (2), где M – тригонометрический многочлен, допускают дополнительный полиномиальный интеграл F , то найдется независимый от интеграла энергии полиномиальный интеграл степени ≤ 2 . Причем, если степень F нечетна, то существует линейный интеграл.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В типичной ситуации нет ортогональных прямых, проходящих через начало координат и целочисленные точки на плоскости. Поэтому наличие неприводимого квадратичного интеграла может быть лишь в исключительных случаях.

Теорема 1 доказывается методом работы [2]. Для этого приведем квадратичную форму

$$a\dot{x}_1^2 + 2b\dot{x}_1\dot{x}_2 + c\dot{x}_2^2 \quad (22)$$

к сумме квадратов $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$ с помощью линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad |\Gamma| \neq 0.$$

В общем случае это преобразование не является автоморфизмом тора $\mathbb{T}^2$, и поэтому q_1, q_2 – конформные координаты на накрывающей тор плоскости. В этих переменных метрика (2) имеет конформный вид

$$ds^2 = \frac{\widetilde{M}}{2}(dq_1^2 + dq_2^2).$$

Если

$$M = \sum_{w=(u,v)} [M]_w \exp(i(w, x)), \quad w = (u, v),$$

– тригонометрический многочлен, то

$$\widetilde{M} = \sum_{w=(u,v)} [M]_w \exp(i(\Gamma^T w, q)) \quad (23)$$

будет конечной тригонометрической суммой, уже не периодической по переменным q_1, q_2 . Суммы вида (23) играют роль рядов Фурье и с ними можно оперировать по тем же правилам, что и с обычными рядами Фурье.

Используя метод [2], на целочисленные векторы $w \neq 0$ из (23) получаются те же геометрические соотношения, но только обычная евклидова метрика заменена на метрику (22). Анализ этих соотношений несколько усложняется (например, в отличие от [2] для анализа интеграла нечетной степени приходится вводить присоединенные вершины для спектра функции $\widetilde{M}$). Однако, в итоге снова получаем, что спектр функции M лежит на одной или двух прямых, ортогональных в метрике, двойственной (2).

Автор выражает благодарность В.В. Козлову за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
- [2] Козлов В. В., Денисова Н. В. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 12. С. 49–64.
- [3] Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
- [4] Бабенко И. К., Нехорошев Н. Н. О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики с нетривиальным квадратичным интегралом // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 643–652.
- [5] Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функцион. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 4. С. 64–65.
- [6] Козлов В. В., Трещёв Д. В. Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). № 1. С. 119–138.
- [7] Козлов В. В. О периодических траекториях заряда в магнитном поле // Регулярная и хаотическая динамика. (в печати).
- [8] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
- [9] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995.