Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Дубинский, О задаче продолжения с наименьшим коаналитическим уклонением, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 45–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:22:54

УДК 517.957+517.57

О ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ С НАИМЕНЬШИМ КОАНАЛИТИЧЕСКИМ УКЛОНЕНИЕМ

Ю. А. Дубинский

Рассматривается задача о нахождении такого продолжения функции с единичной окружности внутрь круга, чтобы оно наименее уклонялось от подпространства Соболева аналитических функций. Найдена математическая модель указанной задачи и установлена ее корректность.

Библиография: 4 названия.

Введение. Пусть $K = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости z , $S = \{z : |z| = 1\}$ – его граница, и $f_0(s) : s \rightarrow \mathbb{C}^1$ – некоторая функция.

В рамках теории соболевских пространств $W_p^1(K)$ рассматривается задача о нахождении такого продолжения граничной функции $f_0(s)$ внутрь круга K , которое наименее уклоняется от подпространства Соболева аналитических функций $\mathcal{O}_p^1(K) \subset W_p^1(K)$, $p > 1$. Более точно, среди всевозможных функций $f(z) : K \rightarrow \mathbb{C}^1$, таких, что $f(z) \in W_p^1(K)$, $f(z)|_S = f_0(s)$, определяется та функция (наилучшее продолжение), для которой минимально “коаналитическое уклонение”

$$\mu_p(f) = \|f(z) - f_a(z)\|_{W_p^1(K)}^p,$$

где через $f_a(z)$ обозначена аналитическая составляющая функции $f(z)$, соответствующая разложению $L_p(K) = \mathcal{O}_p(K) \oplus \partial_z \dot{W}_p^1(K)$.

Математической моделью поставленной задачи является краевая задача для включения

$$-\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a) \in \mathcal{O}_{p'}^{-1}(K), \quad f(z)|_S = f_0(s), \quad s \in S,$$

$$P^+ \left(|\nabla(f - f_a)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial n} (f - f_a) \right) \Big|_S = 0,$$

где $\Delta_p(u) \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ есть p -лапласиан, $\mathcal{O}_{p'}^{-1}(K) = (\mathcal{O}_p^1(K))^*$ – пространство аналитических функционалов, P^+ – проектор на подпространство функций на единичной окружности S , ряд Фурье которых состоит только из экспонент с положительными частотами, т.е. на подпространство функций вида

$$f(\Theta) = \sum_{n \geq 0} f_n \exp(in\Theta)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00621.

(Θ – полярный угол); наконец, $\partial/\partial n$ – дифференцирование по нормали к S .

Устанавливается корректность поставленной задачи и, тем самым, корректность исходной задачи о существовании такого продолжения функции $f_0(s)$, которое имеет в W_p^1 -норме наименьшую коаналитическую часть $f_{ca}(z) \equiv f(z) - f_a(z)$.

В случае $p = 2$ и “чисто” градиентной метрики, т.е. для $\mu_2(f) = \|\nabla(f - f_a)\|_{L_2(K)}^2$, наилучшим продолжением, как оказывается, является гармоническое продолжение.

Интересно отметить, что в случае кольца картина иная. В этом случае гармоническое продолжение граничных функций не совпадает с продолжением, имеющим наименьшее коаналитическое уклонение.

1. Разложение пространства Лебега в прямую сумму аналитического и коаналитического подпространств.

1.1. Пространство $\mathcal{O}_p(K)$. Базисность системы z^n , $n = 0, 1, \dots$. Результаты данного подпункта носят вспомогательный характер.

Пусть

$$L_p(K) = \left\{ f(z) : K \rightarrow \mathbb{C}^1, \|f\|_p^p = \iint_K |f|^p dx dy < \infty \right\}$$

– пространство Лебега в круге K . Далее, обозначим через $\mathcal{O}_p(K)$ подпространство Бергмана аналитических в круге K функций из L_p , т.е.

$$\mathcal{O}_p(K) = \{f(z) \in L_p(K) : \partial_{\bar{z}} f(z) \equiv 0\},$$

где, как обычно, $\partial_{\bar{z}}$ – оператор Коши–Римана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система мономов z^n , $n = 0, 1, \dots$, является базисом Фурье в $\mathcal{O}_p(K)$, т.е. любая функция $f(z) \in \mathcal{O}_p(K)$ представима в виде сходящегося в L_p -норме ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1)$$

где

$$c_n = \frac{\langle f(z), \bar{z}^n \rangle_K}{\|z^n\|_2^2} = \frac{n+1}{\pi} \iint_K f(z) \bar{z}^n dx dy. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу аналитичности

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n e^{in\Theta} \quad (3)$$

при любом фиксированном $\rho \in (0, 1)$ имеем

$$c_n \rho^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\Theta}) e^{-in\Theta} d\Theta$$

или, что то же,

$$c_n \rho^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \bar{z}^n d\Theta.$$

Интегрируя последнее равенство по мере $\rho d\rho$, немедленно получаем, что c_n определяется формулой (2) и, тем самым, ряд (1) является рядом Фурье функции $f(z)$ в пространстве $L_p(K)$.

Заметим далее, что при каждом $\rho \in (0, 1)$ ряд (3) сходится к $f(z)$ равномерно и, следовательно, в силу известной L_p -оценки частичных сумм ряда Фурье (см., например, [1, с. 594])

$$\left\| \sum_{n=0}^N c_n z^n \right\|_{L_p(0, 2\pi)} \leq M_p \|f(z)\|_{L_p(0, 2\pi)}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $M_p > 0$ – постоянная, зависящая только от $p > 1$. Тем самым, в соответствии с классической теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ряд (1) сходится к функции $f(z)$ в норме $L_p(K)$.

Предложение 1 доказано.

1.2. Формула $L_p(K) = \mathcal{O}_p(K) \oplus \partial_z \mathring{W}_p^1(K)$. С полученным разложением (1), (2) естественно связать оператор, действующий из пространства $L_p(K)$ в пространство $\mathcal{O}_p(K)$. Именно, каждой функции $f(z) \in L_p(K)$ сопоставим аналитическую функцию, определяемую рядом

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где коэффициенты c_n вычислены по формулам (2).

Подставляя в этот ряд формулы (2), легко видеть, что

$$f_a(z) = \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{f(w) du dv}{(1 - z\bar{w})^2}, \quad w = u + iv,$$

т.е. отображение $f(z) \mapsto f_a(z)$ есть классический ограниченный проектор Бергмана на подпространство $\mathcal{O}_p(K)$ (см., например, обзоры [2] и [3]). Для замкнутости изложения мы приводим доказательство этого факта в п. 5.

Будем называть функцию $f_a(z) \in \mathcal{O}_p(K)$ *аналитической частью* исходной функции $f(z) \in L_p(K)$. Функцию $f_{ca}(z) = f(z) - f_a(z)$ назовем *коаналитической частью* функции $f(z)$.

Таким образом, пространство $L_p(K)$ разлагается в прямую сумму

$$L_p(K) = \mathcal{O}_p(K) \oplus \mathcal{O}_p^\perp(K),$$

где по определению

$$\mathcal{O}_p^\perp(K) = \{q(z) \in L_p(K) : q(z) = f(z) - f_a(z), f(z) \in L_p(K)\}$$

– подпространство коаналитических функций.

Из предложения 1 ясно, что $q(z) \in \mathcal{O}_p^\perp(K)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle q(z), z^n \rangle_K = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Наша ближайшая цель – описать подпространство $\mathcal{O}_p^\perp(K)$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива формула*

$$\mathcal{O}_p^\perp(K) = \partial_z \mathring{W}_p^1(K), \quad \partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

где $\mathring{W}_p^1(K)$ – пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на границе круга. Более точно, функция $q(z) \in \mathcal{O}_p^\perp(K)$ тогда и только тогда, когда существует (единственная) функция $r(z) \in \mathring{W}_p^1(K)$ такая, что $q(z) = \partial_z r(z)$. При этом выполнена оценка

$$\|r(z)\|_p + \|\nabla r(z)\|_p \leq M \|q(z)\|_p,$$

где $M > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна. Действительно, если $q(z) = \partial_z r(z)$, где $r(z) \in \mathring{W}_p^1(K)$, то, интегрируя по частям, имеем

$$\langle q(z), z^n \rangle_K = \langle \partial_z r(z), z^n \rangle_K = -\langle r(z), \partial_{\bar{z}} z^n \rangle_K = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Это значит, что $q(z) \in \mathcal{O}_p^\perp(K)$.

Обратно, пусть функция $r(z)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) r(z) &= q(z), \quad z \in K, \\ r(z)|_S &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

которое в полярных координатах ρ, Θ формально имеет вид

$$r(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n(\rho) e^{in\Theta}, \tag{6}$$

где

$$r_n(\rho) = \begin{cases} 2 \int_0^\rho \eta^n q_{n-1}(\eta) d\eta \rho^{-n}, & n > 0, \\ -2 \int_\rho^1 \eta^n q_{n-1}(\eta) d\eta \rho^{-n}, & n \leq 0, \end{cases}$$

а $q_n(\rho)$ – соответствующая проекция $q(z)$ в разложении в ряд Фурье по угловой переменной Θ .

Легко видеть, что условия “ортогональности” (4) эквивалентны равенствам

$$\int_0^1 \rho^n q_{n-1}(\rho) d\rho = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда немедленно следует, что $r_n(1) = 0$ для всех $n = 0, \pm 1, \dots$. Тем самым, ряд (6) является формальным решением задачи Дирихле (5)

$$\Delta r(z) = \partial_{\bar{z}} q(z), \quad r|_S = 0,$$

и, следовательно, в соответствии с известной теорией L_p -оценок решений коэрцитивных эллиптических задач имеет место оценка

$$\|\nabla r(z)\|_p + \|r(z)\|_p \leq M \|q(z)\|_p,$$

где $M > 0$ – постоянная.

Это означает, что частичные суммы ряда (6), являясь, очевидно, неформальными решениями задачи (5) (при соответствующих правых частях), сходятся в W_p^1 -норме и, тем самым, определяют искомое решение.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно подсчитать, что в интегральной форме решение имеет вид

$$r(z) = \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{\bar{z} - \bar{\zeta}}, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

2. Коаналитическое уклонение. Постановка основной задачи. Как вытекает из п. 1, всякая функция $f(z) \in W_p^1(K)$ представляется как функция из $L_p(K)$ в виде суммы аналитической и коаналитической составляющих: $f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z)$. Поэтому естественно считать ее коаналитическую составляющую $f_{ca}(z)$ определенной характеристикой неаналитичности самой функции $f(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Мерой неаналитичности* или, что то же, *коаналитическим уклонением функции* $f(z) \in W_p^1(K)$ назовем число

$$\begin{aligned} \mu_p(f) &= \|f_{ca}(z)\|_{W_p^1(K)}^p \equiv \|\nabla(f - f_a)\|_{L_p}^p + \|f - f_a\|_{L_p}^p \\ &\equiv \iint_K \left(\left| \frac{\partial}{\partial x}(f - f_a) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y}(f - f_a) \right|^2 \right)^{p/2} + |f - f_a|^p dx dy. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно, давая это определение, мы должны показать, что если $f(z) \in W_p^1(K)$, то ее аналитическая часть $f_a(z)$ (а, значит, и коаналитическая часть) также принадлежат пространству $W_p^1(K)$. Действительно, если

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

то

$$f'_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^{n-1}, \quad (7)$$

где

$$c_{n-1} = \frac{n(n+1)}{\pi} \iint_K f(z) \bar{z}^n dx dy.$$

Переходя к полярным координатам ρ, Θ и интегрируя по частям по угловой переменной, получим, что

$$c_{n-1} = \frac{n+1}{\pi} \iint_K g(z) \bar{z}^{n-1} dx dy,$$

где

$$g(z) \equiv -i \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \Theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \Theta \right) \bar{z}^2 e^{i\Theta} \in L_p(K).$$

Тем самым, $c_{n-1} = (n+1)g_{n-1}/n$, где g_{n-1} — коэффициенты Фурье функции $g_a(z)$ в разложении по системе $z^n, n = 0, 1, \dots$, т.е.

$$g_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

(ряд сходится в норме $L_p(K)$).

Рассматривая этот ряд как ряд Фурье функции $g_a(\rho e^{i\Theta})$, $\rho \in (0, 1)$, по системе экспонент и применяя классический результат Марцинкевича к последовательности $\lambda_n = (n+1)/n$ (см., например, [4, с. 345]), получаем, что ряд (7) также сходится в $L_p(K)$, что и требуется.

Таким образом, определение меры неаналитичности корректно.

С учетом этого определения обратимся к постановке задачи продолжения функции $f_0(s) \in W_p^{1/p'}(S)$ внутрь единичного круга.

ЗАДАЧА. Среди всевозможных продолжений $f(z) \in W_p^1(K)$, $f(z)|_S = f_0(s)$, найти то, которое имеет наименьшее коаналитическое уклонение $\mu_p(f)$.

Иными словами, ставится задача минимизации $\|f_{ca}(z)\|_{W_p^1(K)}^p \rightarrow \min$, где $f(z) \in W_p^1(K)$ – всевозможные продолжения фиксированной функции $f_0(s) \in W_p^{1/p'}(S)$.

Получим математическую модель поставленной задачи. Действительно, как известно, в точке минимума вариация функционала $\mu_p(f)$ равна 0, т.е. для любой функции $\varphi(z) \in \dot{W}_p^1(K)$ имеем

$$\begin{aligned} L(f)\varphi \equiv \iint_K (|\nabla(f - f_a)|^{p-2} \nabla(f - f_a) \nabla(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a) \\ + |f - f_a|^{p-2} (f - f_a) (\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a)) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varphi(z) \in \dot{W}_p^1(K)$ – произвольная функция.

Выберем в (8) в качестве $\varphi(z)$ любую функцию вида $\varphi(z) = \partial_z r(z)$, где $r(z) \in \dot{W}_p^2(K)$. Тогда, интегрируя по частям, немедленно получим

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2} (f - f_a), \varphi(z) - \varphi_a(z) \rangle_K \\ \equiv \iint_K (-\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2} (f - f_a)) \overline{\varphi(z)} dx dy = 0, \end{aligned}$$

ибо в выбранном случае $\varphi_a(z) \equiv 0$.

Отсюда, предполагая (временно), что выражение в квадратных скобках суммируемо со степенью $p' = p/(p-1)$ и учитывая плотность выбранных функций $\varphi(z)$ в $\mathcal{O}_p^\perp(K)$, приходим к включению

$$-\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2} (f - f_a) \in \mathcal{O}_{p'}(K). \quad (9)$$

Для вывода граничного условия положим теперь в тождестве (8) произвольно $\varphi(z) \in \dot{W}_p^1(K)$. Тогда, интегрируя по частям, придем к равенству

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2} (f - f_a), \varphi(z) - \varphi_a(z) \rangle_K \\ + \int_S |\nabla(f - f_a)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial n} (f - f_a) (\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a) dS = 0 \end{aligned}$$

или, учитывая только что выведенное включение (9) и условие $\varphi|_S = 0$, к равенству

$$\int_S |\nabla(f - f_a)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial n} (f - f_a) \bar{\varphi}_a dS = 0. \quad (10)$$

В частности, фиксируя индекс $n = 0, 1, \dots$, выберем $\varphi(z) \equiv \varphi_n(z) = R(\rho) \exp(in\Theta)$, где $R(\rho) \in C_0^\infty(0, 1)$ такова, что

$$\int_0^1 R(\rho) \rho^{n+1} d\rho \neq 0.$$

Тогда (10) немедленно приводит к набору условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(|\nabla(f - f_a)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \right)_{\rho=1} e^{-in\Theta} d\Theta = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Это означает, что в разложении (вообще говоря, в смысле обобщенных функций) периодической функции

$$\left(|\nabla(f - f_a)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \right)_{\rho=1}$$

в ряд Фурье по угловой переменной все слагаемые, отвечающие положительным частотам, равны 0.

Если обозначить через $P^+ : L_{p'}(-\pi, \pi) \rightarrow L_{p'}^+(-\pi, \pi)$ проектор на подпространство периодических функций, разлагающихся в ряд по $\exp(in\Theta)$, $n = 0, 1, \dots$, то полученное условие принимает вид

$$P^+ \left(|\nabla(f - f_a)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial n}(f - f_a) \Big|_{\varrho=1} \right) = 0, \quad (11)$$

что и требовалось.

Таким образом, в итоге находим, что решение $f(z)$ поставленной задачи удовлетворяет дифференциальному включению (9) и граничным условиям

$$f(z)|_S = f_0(s), \quad s \in S, \quad (12)$$

и (11), последнее из которых носит проекционный характер.

Напомним, однако, что эта модель получена нами при дополнительном условии $-\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a) \in L_{p'}(K)$. В общем случае этого включения может не быть и, строго говоря,

$$L(f) \equiv -\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a) \in W_{p'}^{-1}(K),$$

т.е. является функционалом над пространством $\dot{W}_p^1(K)$. Этот функционал можно, очевидно, представить в виде $L(f) = L_a(f) + L_{ca}(f)$, где аналитический функционал $L_a(f)$ действует по формуле

$$L_a(f)\varphi_a(z) = \iint_K (|\nabla(f - f_a)|^{p-2} \nabla(f - f_a) \nabla \overline{\varphi_a} + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a) \overline{\varphi_a}) dx dy,$$

а коаналитический функционал $L_{ca}(f)$ – по аналогичной формуле, в которой $\varphi_a(z)$ заменяется на $\varphi(z) - \varphi_a(z)$. Поскольку $L_{ca}(f) = 0$, то $L(f) = L_a(f)$, т.е. оператор $-\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a)$ определяет на решении $f(z)$ функционал, который можно отождествить с функционалом над подпространством аналитических функций $\mathcal{O}_p^1(G)$. Будем обозначать сказанное включением

$$-\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a) \in \mathcal{O}_{p'}^{-1}(K). \quad (13)$$

В конечном итоге математическая модель задачи о наилучшем продолжении граничной функции $f_0(s) \in W_p^{1/p'}(S)$ составляет задачу о решении включения (13) при условиях (12), (11). Последнее условие понимается в смысле теории следов обобщенных функций со значениями в пространстве $W_{p'}^{-1}(-\pi, \pi)$.

3. Существование и единственность наилучшего продолжения. Имеет место основная

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $f_0(s) \in W_p^{1/p'}(S)$ существует единственное решение $f(z) \in W_p^1(K)$ задачи (11)–(13) или, что то же, задачи минимизации коаналитического уклонения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство как существования, так и единственности решения проводится в рамках идей теории монотонных операторов.

Существование. Сведем, прежде всего, задачу к случаю нулевой функции на границе. Именно, пусть $h(z) \in W_p^1(K)$ – какое-либо фиксированное продолжение функции $f_0(s)$, т.е. $h(z)|_S = f_0(s)$. Положим $u(z) = f(z) - h(z)$. Тогда функция $u(z) \in \mathring{W}_p^1(K)$ удовлетворяет интегральному тождеству (см. (8)) $L(u + h)\varphi(z) = 0$, где $\varphi(z) \in W_p^1(K)$, $\varphi(z)|_S = 0$, произвольна.

Пусть $\varphi^1(z), \varphi^2(z), \dots$ – базисная система в пространстве $\mathring{W}_p^1(K)$. Приближенное решение $u^N(z)$, $N = 1, 2, \dots$, ищем в виде

$$u^N(z) = C_N^1 \varphi^1(z) + \dots + C_N^N \varphi^N(z),$$

где неизвестные постоянные $C_N^1, \dots, C_N^N$ определяются из нелинейной системы моментных уравнений Галёркина

$$L(u^N + h)\varphi^j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

В силу свойства монотонности оператора L система (14) однозначно разрешима. При этом для коаналитических составляющих $u_{ca}^N(z)$ имеем оценку

$$\|u_{ca}^N(z)\|_{W_p^1(K)} \leq M, \quad (15)$$

где $M > 0$ – постоянная, не зависящая от N .

Нетрудно заметить, что и для аналитических составляющих $u_a^N(z)$ справедлива аналогичная оценка. Действительно, из оценки (15) и точных неравенств между нормами функций в круге K и их следов на окружности S следует, что для всех N

$$\|u_{ca}^N(z)|_S\|_{W_p^{1/p'}(S)} \leq M \|u_{ca}^N(z)\|_{W_p^1(K)} \leq M_1,$$

$M_1 > 0$ – постоянная. Отсюда, учитывая, что $u_a^N(z)|_S + u_{ca}^N(z)|_S = 0$, находим, что и

$$\|u_a^N(z)|_S\|_{W_p^{1/p'}(S)} \leq M_2,$$

где $M_2 > 0$ не зависит от N .

Остается заметить, что в силу известных L_p -оценок теории эллиптических задач

$$\|u_a^N(z)\|_{W_p^1(K)} \leq M_3 \|u_a^N(z)|_S\|_{W_p^{1/p'}(S)} \leq M_4,$$

где $M_4 > 0$ – постоянная, ибо всякая аналитическая функция является и гармонической (комплекснозначной) функцией.

Таким образом, в конечном итоге получаем оценку

$$\|u^N(z)\|_{W_p^1(K)} \leq M_5,$$

где $M_5 > 0$ не зависит от N .

Далее обычными рассуждениями устанавливаем, что предельная точка $u(z)$ последовательности $u^N(z)$ удовлетворяет интегральному тождеству (14). Существование решения доказано.

Единственность. Действительно, пусть $f(z) \in W_p^1(K)$ и $g(z) \in W_p^1(K)$ – два решения задачи (11)–(13). Тогда, исходя из тождества (8), стандартно получим, что их коаналитические составляющие равны, т.е. $f_{ca}(z) \equiv g_{ca}(z)$. Отсюда, учитывая, что $(f(z) - g(z))|_S = 0$, получаем, что $f_a(z)|_S = g_a(z)|_S$. Следовательно, $f_a(z) \equiv g_a(z)$, $z \in K$, и тем самым, $f(z) \equiv g(z)$, $z \in K$. Единственность, а вместе с ней и теорема 2 полностью доказаны.

4. Случай градиентной метрики. В качестве конкретного примера рассмотрим случай среднеквадратичного коаналитического уклонения в “чисто” градиентной метрике

$$\mu_2(f) = \iint_K |\nabla(f(z) - f_a(z))|^2 dx dy.$$

Математическая модель этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &\in \mathcal{O}_2^{-1}(K), \\ f(z)|_S &= f_0(s), \quad P^+\left(\frac{\partial}{\partial n}(f - f_a)|_S\right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Эта задача имеет единственное решение $f(z) \in W_2^1(K)$ для любой функции $f_0(s) \in W_2^{1/2}(S)$. Более того, решение может быть найдено стандартно методом Фурье в полярных координатах. Элементарный, но довольно длинный подсчет показывает, что решением оказывается обычное гармоническое продолжение, т.е. решение задачи Дирихле

$$\Delta f(z) = 0, \quad f(z)|_S = f_0(s), \quad s \in S. \quad (17)$$

Мы не станем проводить этот подсчет, а докажем непосредственно эквивалентность этих задач.

Предложение 2. Тождество

$$\langle \nabla(f - f_a), \nabla(\varphi - \varphi_a) \rangle_K = \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle_K \quad \forall \varphi(z) \in \mathring{W}_2^1(K) \quad (18)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$P^+((f - f_a)|_S) = 0. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что (18) достаточно установить для функций $\varphi(z)$, гладких и финитных в круге K . Имеем, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned}\langle \nabla(f - f_a), \nabla(\varphi - \varphi_a) \rangle_K &= \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle_K - \langle \nabla(f - f_a), \nabla \varphi_a \rangle_K - \langle \nabla f_a, \nabla \varphi \rangle_K \\ &= \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle_K - \int_S (f - f_a) \frac{\partial}{\partial n} \varphi_a ds,\end{aligned}$$

ибо $\Delta f_a = 0$ и $\Delta \overline{\varphi_a} = 0$ в K . Это значит, что тождество (18) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\int_S (f - f_a) \frac{\partial}{\partial n} \varphi_a ds = 0.$$

Выбрав теперь последовательность функций $\varphi(z) \equiv \varphi(\varrho e^{i\Theta}) = q(\varrho) \exp(in\Theta)$, $n = 0, 1, \dots$, где $q(\varrho) \in C_0^\infty(0, 1)$ и такова, что

$$\int_0^1 q(\varrho) \varrho^{n+1} d\varrho \neq 0,$$

немедленно получаем, что

$$\int_0^{2\pi} (f - f_a) \exp(in\Theta) d\Theta = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Это значит, что выполнено (19). Обратное очевидно.

Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f(z) \in W_2^1(K)$ – решение задачи минимизации

$$\mu_2(f) \rightarrow \inf.$$

Тогда выполнено (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\langle \nabla(f - f_a), \nabla(\varphi - \varphi_a) \rangle_K = \langle f - f_a, \Delta \varphi \rangle_K + \int_S (f - f_a) \frac{\partial}{\partial n} (\varphi - \varphi_a) ds = 0. \quad (20)$$

Выберем в качестве функции $\varphi(z)$ решение задачи

$$\Delta \varphi(z) = z^n, \quad \varphi(z)|_S = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Это будет последовательность

$$\varphi(z) = \frac{1}{4(n+1)}(|z|^2 - 1)z^n,$$

для которой

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} (\varphi(z) - \varphi_a(z)) \right|_S = \mathcal{A}_n e^{in\Theta}, \quad \mathcal{A}_n \neq 0.$$

Следовательно, учитывая, что $f(z) - f_a(z) \in \mathcal{O}_2^1(G)$, из (20) немедленно получаем (19).

Предложение 3 доказано.

Следствием предложений 2, 3 и является эквивалентность задач (16) и (17). Тем самым, гармоническое продолжение минимизирует не только функционал Дирихле, но и функционал коаналитической невязки $\mu_2(f)$.

Как уже отмечалось, аналогичное утверждение для кольца не имеет места.

5. Дополнение. В этом пункте устанавливается ограниченность аналитического проектора $f(z) \mapsto f_a(z)$ в пространствах $L_p(K)$, $p > 1$ – произвольное число.

Напомним, что

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{где } c_n = \frac{n+1}{\pi} \iint_K f(z) \bar{z}^n dx dy.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место неравенство*

$$\|f_a(z)\|_{L_p(K)} \leq M \|f(z)\|_{L_p(K)},$$

где $M > 0$ – постоянная, зависящая только от $p > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in (0, 1)$ – некоторое число, и функция $f(z)$ представлена в виде $f(z) = f_0^r(z) + f_r^1(z)$, где $f_0^r(z) = f(z)\chi_{(0,r)}(|z|)$, $f_r^1(z) = f(z)\chi_{(r,1)}(|z|)$ ($\chi_E(t)$, как обычно, – характеристическая функция множества E). Тогда элементарный подсчет, исходя из определения $f_a(z)$, показывает, что

$$\|f_a(z)\|_{L_p(K_0^r)} \leq M \|f(z)\|_{L_p(K)}, \quad M > 0,$$

где $K_0^r = \{z : |z| < r\}$. Точно так же

$$\|(f_0^r(z))_a\|_{L_p(K)} \leq M \|f_0^r(z)\|_{L_p(K_0^r)} \equiv M \|f_0^r(z)\|_{L_p(K)}.$$

Таким образом, дело сводится к доказательству неравенства

$$\|f_a(z)\|_{L_p(K_r^1)} \leq M \|f(z)\|_{L_p(K_r^1)},$$

для функций $f(z) \in L_p(K)$, носитель которых содержится в кольце $K_r^1 = \{z : r < |z| < 1\}$.

С этой целью положим $\varrho_j = e^{-jh}$, где $j = 0, 1, \dots, N-1$; $h = -N^{-1} \ln r$, $N > 0$ – произвольное целое число. Очевидно, $\varrho_j \in (r, 1)$, причем $\varrho_N = r$, т.е. кольцо K_r^1 представляется как объединение колец $K_{\varrho_{j+1}}^{\varrho_j}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Рассмотрим функции вида

$$f^N(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j(\Theta) \chi_j(\varrho),$$

где (ϱ, Θ) – полярные координаты, $\varphi_j(\Theta) \in L_p(-\pi, \pi)$ – произвольная функция, а $\chi_j(\varrho)$ – характеристическая функция интервала $(\varrho_{j+1}, \varrho_j)$. Множество таких функций всюду плотно в $L_p(K_r^1)$.

Оценим вначале норму аналитической функции $f_{j,a}^N(z) = (\varphi_j(\Theta) \chi_j(\varrho))_a$. Имеем

$$f_{j,a}^N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где, как показывает подсчет,

$$c_n = \frac{2(n+1)}{n+2} \varphi_{jn} (e^{-(n+2)jh} - e^{-(n+2)(j+1)h}),$$

φ_{jn} – коэффициенты Фурье функции $\varphi_j(\Theta)$. Таким образом,

$$f_{ja}^h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{M}_{jn} \varphi_{jn} e^{in\Theta},$$

где

$$\widetilde{M}_{jn} = \frac{2(n+1)}{n+2} \varrho^n (e^{-(n+2)jh} - e^{-(n+2)(j+1)h}).$$

Покажем, что последовательность

$$M_{jn} = \varrho^n (e^{-(n+2)jh} - e^{-(n+2)(j+1)h})$$

удовлетворяет классической теореме Марцинкевича о мультипликаторах коэффициентов Фурье (см., например, [3, с. 346]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Множители $2(n+1)/(n+2)$ не зависят от j, h и ϱ и поэтому роли не играют. Они, очевидно, образуют последовательность L_p -мультипликаторов коэффициентов Фурье, и мы можем применить теорему Марцинкевича повторно.

Нетрудно видеть, что производная функции

$$M_{jx} = \frac{1}{\varrho^2} (e^{-(x+2)(jh - \ln \varrho)} - e^{-(x+2)(jh + h - \ln \varrho)})$$

обращается в нуль в точке x , удовлетворяющей уравнению

$$e^{-(x+2)h} = \frac{jh - \ln \varrho}{jh + h - \ln \varrho}.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x > -2$ (локальный максимум). Следовательно, для всех $j = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots, \varrho \in (r, 1)$

$$\begin{aligned} M_{jn} &\leq \frac{1}{\varrho^2} \left(\left(\frac{jh - \ln \varrho}{(j+1)h - \ln \varrho} \right)^{(jh - \ln \varrho)/h} - \left(\frac{jh - \ln \varrho}{(j+1)h - \ln \varrho} \right)^{((j+1)h - \ln \varrho)/h} \right) \\ &\leq \frac{1}{r^2} \left(\frac{jh - \ln \varrho}{(j+1)h - \ln \varrho} \right)^{(jh - \ln \varrho)/h} \left(1 - \frac{jh - \ln \varrho}{(j+1)h - \ln \varrho} \right) \leq \frac{1}{r^2} \frac{h}{(j+1)h - \ln \varrho}. \end{aligned}$$

Так как функция M_{jx} имеет только одну точку максимума, то при $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$, $k = 0, 1, \dots$, разности $M_{j,n+1} - M_{jn}$ меняют знак не более одного раза. Поэтому

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |M_{j,n+1} - M_{jn}| \leq \frac{4h}{r^2((j+1)h - \ln \varrho)}.$$

Таким образом, по теореме Марцинкевича

$$\|f_{ja}^N(z)\|_{L_p(-\pi, \pi)} \leq M \frac{h}{(j+1)h - \ln \varrho} \|\varphi_j(\Theta)\|_{L_p(-\pi, \pi)},$$

где $M > 0$ – постоянная, зависящая от r .

Отсюда находим, что для функции $f_a^N(z)$ имеем

$$\|f_a^N(z)\|_{L_p(-\pi, \pi)} \leq M \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{(j+1)h - \ln \varrho} \|\varphi_j(\Theta)\|_{L_p(-\pi, \pi)}. \quad (21)$$

Далее, заметив, что в соответствии с выбором чисел ϱ_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, имеем неравенство $\varrho_j^2 - \varrho_{j+1}^2 \geq 2r^2h$, и, следовательно, из оценки (21) получаем, что

$$\|f_a^N(z)\|_{L_p(-\pi, \pi)} \leq M \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h^{1/p'}}{(j+1)h - \ln \varrho} \|\varphi_j(\Theta)\|_{L_p(-\pi, \pi)} (\varrho_j^2 - \varrho_{j+1}^2)^{1/p}.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера для сумм, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|f_a^N(z)\|_{L_p(-\pi, \pi)} &\leq M h^{1/p'} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{((j+1)h - \ln \varrho)^{p'}} \right)^{1/p'} \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|\varphi_j(\Theta)\|_{L_p(-\pi, \pi)}^p \frac{\varrho_j^2 - \varrho_{j+1}^2}{2} \right)^{1/p} \\ &\leq M h^{1/p'} \frac{1}{h - \ln \varrho} \|f^N(z)\|_{L_p(K_r^1)} \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\|f_a^N(z)\|_{L_p(-\pi, \pi)}^p \leq M h^{p-1} \frac{1}{(h - \ln \varrho)^p} \|f^N(z)\|_{L_p(K_r^1)}^p.$$

Интегрируя последнее неравенство по ϱ от r до 1, получаем искомое неравенство

$$\|f_a^N(z)\|_{L_p(K_r^1)}^p \leq M \|f^N(z)\|_{L_p(K_r^1)}^p.$$

Предложение 4 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Axler Sh. Bergman spaces and their applications // Surveys of Some Recent Results in Operator Theory / ed. J. Conway, B. Morell. Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 1. Harlow: Longman Sci. Tech., 1988. P. 1–50.
- [2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Наука, 1961.
- [3] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1985. С. 3–124.
- [4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Физматгиз, 1965.