Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, Сколько потребуется выборок, чтобы увидеть все шары в урне?, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 58–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:18:39

УДК 519.2

СКОЛЬКО ПОТРЕБУЕТСЯ ВЫБОРОК, ЧТОБЫ УВИДЕТЬ ВСЕ ШАРЫ В УРНЕ?

Г. И. Ивченко

Пусть урна содержит N шаров, занумерованных числами от 1 до N . Из урны по схеме бесповторной выборки извлекается случайное число шаров, их номера запоминаются и шары возвращаются в урну. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут зафиксированы в выборках все N шаров. В предположении, что объемы последовательных выборок независимы и одинаково распределены, выводится аппроксимация для среднего числа необходимых выборок, а также его асимптотическое (при $N \rightarrow \infty$) распределение.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В литературе по случайным размещениям частиц по ячейкам одной из популярных схем является схема размещения комплектами, упоминаемая еще в книге А. А. Маркова [1]. Классический вариант этой схемы формулируется следующим образом. В N ячеек последовательно и независимо друг от друга бросаются комплекты по m частиц, причем частицы каждого комплекта распределяются по разным ячейкам и все $\binom{N}{m}$ возможных размещений комплекта считаются равновероятными. Исследованию различных характеристик такого процесса размещения частиц и его обобщений посвящена весьма обширная литература, отраженная, в частности, в монографиях [2], [3] и обзоре [4].

Одной из наиболее интересных характеристик этого процесса является число комплектов $\nu(N, m)$ (или время ожидания), после размещения которых впервые все ячейки оказываются занятыми. Эта характеристика в точной и асимптотической (при $N \rightarrow \infty$) постановках достаточно детально исследована в работах Д. Пойа [5], А. Бекеша [6] и Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [7]. В [8] предложен более общий вариант схемы, когда размеры комплектов являются случайными и представляют собой независимые копии целочисленной случайной величины K с некоторым распределением $p_m = P(K = m)$, $m = 1, \dots, N$. Для этого варианта время ожидания до заполнения всех ячеек обозначается через $\nu(N, K)$. Наше возвращение к этой теме стимулировано появлением работы Т. Селке [9], в которой предложен оригинальный метод получения достаточно простой и одновременно весьма точной (что подтверждается численными расчетами) аппроксимации для $E\nu(N, K)$:

$$E\nu(N, K) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N-i} / \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N-i} P(K > i) \right)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00387.

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{N-i} \mathbf{P}(K > i) \sum_{j=1}^i \frac{1}{N-j+1} \Big/ \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N-i} \mathbf{P}(K > i) \right)^2.$$

Однако, предложенный в [9] метод является довольно сложным и в то же время, так сказать, узко направленным, приспособленным именно для вычисления среднего $\mathbf{E}\nu(N, K)$. В данной заметке мы предлагаем простой альтернативный метод вычисления как точного значения $\mathbf{E}\nu(N, K)$, так и его последовательных аппроксимаций, которые одновременно являются асимптотическими разложениями среднего при больших N . Наш метод использует лишь прямые вероятностные и комбинаторные аргументы и позволяет также получить асимптотическое распределение времени ожидания $\nu(N, K)$ при $N \rightarrow \infty$, а также других характеристик схемы. Наш вариант аппроксимации имеет вид

$$\mathbf{E}\nu(N, K) \approx \frac{N}{a_1} L_N + \frac{a_1 - a_2}{2a_1^2} (L_N - 1), \quad L_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}, \quad a_j = \mathbf{E}K^j, j = 1, 2, \dots;$$

при этом ее погрешность при больших N имеет порядок $O((\ln N)/N)$.

В заключение отметим, что рассматриваемая задача может быть сформулирована также на языке извлечения шаров из урны. Именно, пусть имеется урна, содержащая шары, занумерованные числами $1, 2, \dots, N$. Из урны по схеме бесповторной выборки извлекается случайное число шаров, их номера фиксируются и шары возвращаются в урну. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут зафиксированы все N шаров; при этом предполагается, что объемы последовательных выборок независимы и одинаково распределены как случайная величина K . Спрашивается: сколько для этого потребуется произвести выборок? Это и есть случайная величина $\nu(N, K)$.

2. Среднее значение времени ожидания. Мы исходим из известного представления математического ожидания целочисленной случайной величины через “хвосты” ее распределения:

$$\mathbf{E}\nu(N, K) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\nu(N, K) > n). \quad (1)$$

В свою очередь, $\mathbf{P}(\nu(N, K) > n) = \mathbf{P}(\mu(N, n) > 0)$, где $\mu(N, n)$ обозначает число пустых ячеек после размещения n комплектов. Но

$$\mu(N, n) = X_1 + \dots + X_N, \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я ячейка пуста,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

и по формуле для объединения событий

$$\mathbf{P}(\mu(N, n) > 0) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^N \{X_i = 1\}\right) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} S_r,$$

где

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N} \mathbf{P}(X_{i_1} = \dots = X_{i_r} = 1).$$

В данном случае суммы S_r подсчитать не трудно. Именно, в силу симметрии и из определения схемы непосредственно следует, что

$$S_r = \binom{N}{r} \mathbf{P}(X_1 = \dots = X_r = 1) = \binom{N}{r} \left(\sum_{m=1}^N p_m \binom{N-r}{m} / \binom{N}{m} \right)^r.$$

Преобразуем сумму, входящую в последнее выражение, к более удобному виду. Для этого, прежде всего, заметим, что

$$\begin{aligned} \binom{N-r}{m} / \binom{N}{m} &= \frac{(N-m)(N-m-1)\cdots(N-m-r+1)}{N(N-1)\cdots(N-r+1)} = \prod_{j=0}^{r-1} \left(1 - \frac{m}{N-j}\right) \\ &= 1 - \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} m^s C_s(N, r), \end{aligned}$$

где

$$C_s(N, r) = \sum_{0 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq r-1} \frac{1}{(N-j_1)\cdots(N-j_s)}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^N p_m \binom{N-r}{m} / \binom{N}{m} = 1 - \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} a_s C_s(N, r) \equiv 1 - A_r(N), \quad (4)$$

где $a_s = \mathbb{E}K^s$, $s = 1, 2, \dots$. Таким образом,

$$S_r = \binom{N}{r} (1 - A_r(N))^n \quad (5)$$

и, тем самым,

$$P(\mu(N, n) > 0) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \binom{N}{r} (1 - A_r(N))^n. \quad (6)$$

Отсюда и из (1) имеем следующее итоговое представление для среднего времени ожидания в нашей схеме:

$$\mathbb{E}\nu(N, K) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \binom{N}{r} A_r^{-1}(N), \quad (7)$$

где $A_r(N)$ определено соотношениями (4) и (3).

При больших значениях N вычисления по точной формуле (7) могут оказаться затруднительными, поэтому представляет практический (а не только теоретический) интерес получение простых и удобных аппроксимаций для $\mathbb{E}\nu(N, K)$. Идея построения таких аппроксимаций состоит в следующем.

Для величины $A_r^{-1}(N)$ при больших N можно записать асимптотическое разложение

$$A_r^{-1}(N) = \sum_{i \geq -1} \frac{b_i(r)}{N^i}, \quad (8)$$

где, как нетрудно установить, первые коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} b_{-1}(r) &= \frac{1}{ra_1}, \quad b_0(r) = \left(\frac{1}{r} - 1\right) \frac{a_1 - a_2}{2a_1^2}, \\ b_1(r) &= \left(\frac{1}{r} - 1\right)(rc_1 + c_0) \frac{1}{12a_1^3}, \quad c_1 = a_1^2 + 2a_1a_3 - 3a_2, \quad c_0 = a_1^2 - 4a_1a_3 + 3a_2. \end{aligned}$$

Подстановка этого разложения в (7) и использование известных комбинаторных тождеств

$$\sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \binom{N}{r} r^i = \begin{cases} L_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}, & i = -1, \\ 1, & i = 0, \\ 0, & 0 < i < N, \end{cases} \quad (9)$$

дает соответствующее асимптотическое разложение для $E\nu(N, K)$. Учитывая при этом лишь нескольких первых членов в (8), получаем соответствующую аппроксимацию, тем более точную, чем большее число членов разложения (8) используется. Для практических целей вполне достаточно приближения

$$E\nu(N, K) \approx \frac{N}{a_1} L_N + \frac{a_1 - a_2}{2a_1^2} (L_N - 1), \quad (10)$$

получаемого при учете лишь первых двух членов разложения (8). Если сделать еще один шаг, то мы получим дополнительное к правой части (10) слагаемое $(c_0 L_N + c_1 - c_0) / (12a_1^3 N)$, которое уже убывает как $O((\ln N)/N)$ при больших N .

Отметим также, что аппроксимация (10) согласуется с соответствующим результатом для схемы с фиксированным размером комплектов ($K = m = \text{const}$), который имеет вид [7]

$$E\nu(N, m) = \left(\frac{N}{m} - \frac{m-1}{2m} \right) L_N + \frac{m-1}{2m} + O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

3. Асимптотические распределения. Разработанная выше техника позволяет также получить асимптотические (при $N \rightarrow \infty$) распределения случайных величин $\mu(N, n)$ и $\nu(N, K)$.

Рассмотрим сначала число $\mu(N, n)$ пустых ячеек после размещения n комплектов. Из представления (2), как известно, следует, что его биномиальный момент

$$\gamma_r = E \binom{\mu(N, n)}{r}$$

равен S_r . Следовательно, в силу (5)

$$\gamma_r = \binom{N}{r} (1 - A_r(N))^n.$$

Но из (3) и (4) следует, что

$$A_r(N) = \frac{ra_1}{N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

поэтому для любого $r = 1, 2, \dots$

$$\gamma_r = \frac{1}{r!} \left(N \exp \left\{ -\frac{na_1}{N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \right\} \right)^r \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right).$$

Если теперь $n = n(N)$ выбрано так, что

$$Ne^{-na_1/N} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (11)$$

то $\gamma_r \mapsto \lambda^r / r!$. Здесь предел есть r -й биномиальный момент пуассоновой случайной величины с параметром λ . Тем самым, распределение величины $\mu(N, n)$ при условии (11) сходится к распределению Пуассона $\Pi(\lambda)$. Этому результату можно придать следующую форму.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \rightarrow \infty$ и $n = N(\ln N + x + o(1))/a_1$, где x — любое действительное число. Тогда $\mathcal{L}(\mu(N, n)) \rightarrow \Pi(e^{-x})$.

Учитывая связь между распределениями $\nu(N, K)$ и $\mu(N, n)$, из этой теоремы непосредственно получаем также следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\left(\frac{a_1}{N}\nu(N, K) - \ln N \leq x\right) \rightarrow e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Аналоги теорем 1 и 2 для схемы с фиксированным размером комплектов хорошо известны. Подчеркнем, что асимптотические распределения рассматриваемых характеристик в общем случае зависят лишь от среднего размера комплектов $a_1 = \mathbf{E}K$ (при условии, что распределение случайной величины K фиксировано и не зависит от N).

4. Обобщения. Возможности нашего метода не исчерпываются изложенным. Здесь мы кратко укажем некоторые его обобщения.

1) Рассмотрим сначала задачу вычисления дисперсии времени ожидания. Если воспользоваться известной формулой [10, гл. XI, § 1]

$$D\nu(N, K) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{P}(\nu(N, K) > n) + \mathbf{E}\nu(N, K)(1 - \mathbf{E}\nu(N, K)),$$

то аналогично п. 2 получим представление

$$D\nu(N, K) = 2 \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \binom{N}{r} A_r^{-2}(N) - \mathbf{E}\nu(N, K)(1 + \mathbf{E}\nu(N, K)).$$

Воспользовавшись (9) и тождеством

$$\sum_{r=1}^N (-1)^{r-1} \binom{N}{r} \frac{1}{r^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} L_n = \frac{1}{2} \left(L_N^2 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)$$

и учитывая (10), не трудно получить аппроксимацию

$$D\nu(N, K) \approx \frac{N^2}{a_1^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{a_1^2 + a_1 - a_2}{a_1^3} N L_N + N \frac{a_1 - a_2}{a_1^3} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

В частности, для схемы с фиксированным размером m комплектов это сводится к соотношению

$$D\nu(N, m) \approx \frac{N^2}{m^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{N}{m^2} L_N - N \frac{m-1}{m^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2},$$

что согласуется с соответствующим результатом из [7].

2) Пусть $\nu_t(N, K)$ обозначает число комплектов, после размещения которых впервые окажутся занятыми не менее t чеек (так что $\nu_N(N, K) = \nu(N, K)$). Тогда, очевидно,

$$\mathbf{P}(\nu_t(N, K) > n) = \mathbf{P}(\mu(N, n) > s), \quad s = N - t,$$

поэтому вместо (6) здесь надо использовать формулу для вероятности осуществления по крайней мере $s + 1$ событий [10, гл. IV, § 5]:

$$P(\mu(N, n) > s) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1-s} \binom{r-1}{s} \binom{N}{r} (1 - A_r(N))^n.$$

В итоге для среднего времени ожидания мы получаем представление

$$E\nu_t(N, K) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r-1-s} \binom{r-1}{s} \binom{N}{r} A_r^{-1}(N),$$

обобщающее (7). Если $s > 0$, то

$$\binom{r-1}{s} = (-1)^s \prod_{j=1}^s \left(1 - \frac{r}{j}\right) = (-1)^s (1 - rL_s + \dots),$$

и по стандартной схеме вывода аппроксимации (10) мы получаем соотношение

$$E\nu_t(N, K) \approx \frac{N}{a_1} (L_N - L_s) + \frac{a_1 - a_2}{2a_1^2} (L_N - L_s - 1).$$

3) Отметим, наконец, обобщение теоремы 2 для времени ожидания $\nu_t(N, K)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N, t \rightarrow \infty$ так, что $s = N - t$ фиксировано. Тогда предельная функция распределения $F_s(x)$ нормированной случайной величины $a_1 \nu_t(N, K)/N - \ln N$ имеет вид

$$F_s(x) = e^{-e^{-x}} \sum_{r=0}^s \frac{e^{-rx}}{r!}, \quad -\infty < x < \infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Markoff A. A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig-Berlin, 1912.
- [2] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
- [3] Коваленко И. Н., Левитская А. А., Савчук М. Н. Избранные задачи вероятностной комбинаторики. Киев: Наукова думка, 1986.
- [4] Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Дискретные задачи в теории вероятностей // Итоги науки и техн. Теория вероятн. Матем. статистика. Теоретич. кибернетика. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 3–60.
- [5] Polya G. Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung // Z. Angew. Math. Mech. 1930. V. 10. № 1–3. P. 96–97.
- [6] Bekessy A. A lottojatekal kapesolatos nehany cellabetoltesi problemazol. II // Mat. Lapok. 1965. V. 16. P. 57–67.
- [7] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Асимптотическое поведение числа комплектов частиц в классической задаче о размещении // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. 11. № 4. С. 701–708.
- [8] Ивченко Г. И. Некоторые предельные теоремы в схеме размещения // Некоторые прикладные вопросы теории вероятн. и матем. статистика. Тр. МИЭМ. Вып. 32. М.: МИЭМ, 1973. С. 111–119.
- [9] Sellke T. M. How many samples does it take to see all the balls in a box? // Ann. Appl. Probab. 1995. V. 5. № 1. P. 294–309.
- [10] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 2-е изд. М.: Мир, 1964.