Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, Логарифмическая асимптотика решения задачи о больших отклонениях для уравнения Больцмана с малой передачей импульса, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 73–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:28:09

УДК 519.6

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С МАЛОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ ИМПУЛЬСА

В. П. Маслов, А. М. Чеботарёв

Для уравнения Больцмана с малой передачей импульса получена система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих логарифмическую асимптотику решения задачи Коши в области, отстоящей от носителя начального условия на расстояние $O(1)$.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. В теории кинетических уравнений известен факт слабой сходимости при $N \rightarrow \infty$ нормированных решений уравнений, описывающих эволюцию N -частичных плотностей распределения для систем с парным взаимодействием, к решениям нелинейных уравнений для одночастичных плотностей. К основным примерам такой сходимости относится сходимость решений уравнения Лиувилля для N -частичной системы с парным взаимодействием порядка $O(N^{-1})$ к решению уравнения Власова (см. [1]–[3]), а также сходимость решений уравнения Колмогорова–Феллера для N -частичной системы с интенсивностью скачков порядка $O(N)$ к решению уравнения Больцмана (см. [4]–[6]). В настоящей работе мы воспользуемся этим фактом для того, чтобы определить функции Гамильтона различных задач для уравнения Больцмана и построить логарифмическую асимптотику его решений, удовлетворяющую условиям, необходимым для существования действия $S(v, t)$ в асимптотическом разложении вида

$$\rho_\varepsilon(v, t) = \kappa_\varepsilon(t) \rho_\varepsilon^{\text{reg}}(v, t) \exp\left(-\frac{S(v, t)}{\varepsilon}\right), \quad \rho_\varepsilon^{\text{reg}} = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots, \quad (1)$$

где $\kappa_\varepsilon(t)$ – нормировочный множитель, обеспечивающий слабую сходимость решения к начальному условию при $t \rightarrow 0$, $\rho_\varepsilon^{\text{reg}}(v, t)$ – функция, регулярно зависящая от малого параметра ε , а $S(v, t)$ – действие, удовлетворяющее уравнению типа Гамильтона–Якоби. Действие $S(v, t)$ является главным членом *логарифмической* асимптотики решения:

$$S(v, t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \rho_\varepsilon(v, t).$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91. Работа второго автора выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 96-0698.

Уравнения, определяющие компоненты асимптотического разложения (1) решения уравнения Больцмана с малой передачей импульса, являются следствием равенства

$$\begin{aligned} & (\varepsilon \partial_t - \partial_t S) \chi_\varepsilon(t) (\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots) \\ & = (H(\rho_0 + \varepsilon \rho_1 | v, S_v^{(1)}) + \varepsilon \hat{H}_1(\rho_0 | v, S_v^{(1)}) + O(\varepsilon^2)) (\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + O(\varepsilon^2)), \end{aligned}$$

которое получается при подстановке (1) в уравнение Больцмана. Здесь и далее для градиента функции S используются обозначения $S_v^{(1)} = \partial_v S = \text{grad}_v S$, а операторы $H, \hat{H}_1$ будут описаны ниже (см. правую часть уравнения (36)). Примером гамильтониана, связанного с уравнением Больцмана, является функция

$$H(\rho | v, p) = C \int dw |v - w| \rho(w) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathbb{R}} dr |r| e^{-r^2/2} (e^{-\lambda r |v - w|(p, n_\theta)} - 1), \quad (2)$$

где $\rho \in L_1^+(\mathbb{R}^3)$, $\lambda, c > 0$, $p, v, w \in \mathbb{R}^3$, $n_v = v/|v| \in \mathbb{R}^3$, n_θ – семейство единичных векторов, ортогональных вектору n_{v-w} и параметризованных углом θ . Функции такого вида являются гамильтонианами *туннельного типа* (см. [7, гл. 9, § 1]), для которых условие невырожденности $\det H_{pp}^{(2)} > 0$ выполнено, если плотность ρ такова, что для любых конечных x, v и p из $\mathbb{R}^3$ квадратичная форма

$$(x, H_{pp}^{(2)} x) = \lambda^2 C \int dw |v - w|^3 \rho(w) \int_0^{2\pi} d\theta (x, n_\theta)^2 \int_{\mathbb{R}} dr |r|^3 e^{-r^2/2 - \lambda r |v - w|(p, n_\theta)}$$

положительно определена. В случае, если $\rho(w)$ сходится к дельта-функции $\delta(w)$, то гамильтониан вырождается, поскольку $v \perp n_\theta$ и, следовательно, $(v, H_{pp}^{(2)} v) = 0$. Заметим также, что для гамильтонианов такого вида гиперплоскость $p = 0$ в фазовом пространстве (v, p) состоит из точек покоя:

$$H_p^{(1)}(v, 0) = H_v^{(1)}(v, 0) = 0. \quad (3)$$

Это свойство влечет за собой стационарность точек безусловного минимума действия.

Другое важное свойство гамильтониана (2) следует из его разложения при малых λ :

$$H(\rho | v, p) = \lambda^2 H_2(\rho | v, p) + O(\lambda^3),$$

где $H_2(\rho | v, p)$ совпадает с вейлевским символом нелинейного эллиптического оператора второго порядка, задающего уравнение Ландау–Фоккера–Планка [6].

В отличие от цепочки уравнений линейного метода ВКБ, уравнения для S и ρ_k зацепляются с высшими членами:

$$S : \partial_t S(v, t) + H(\rho_0 | v, S_v^{(1)}(v, t)) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 : \partial_t \rho_0(v, t) &= \hat{H}_1(\rho_0 | v, S_v^{(1)}(v, t)) \rho_0(v, t) + H(\rho_0 | v, S_v^{(1)}(v, t)) \rho_1(v, t) \\ &\quad + H(\rho_1 | v, S_v^{(1)}(v, t)) \rho_0(v, t), \end{aligned} \quad (5)$$

и т.д. Основное наблюдение настоящей работы заключается в том, что уравнения (4), (5) оказываются не зависящими от $\rho_1, \rho_2, \dots$ в двух случаях.

В первом случае уравнение Гамильтона–Якоби (3), описывающее показатель экспоненты функции Грина, зависит только от значений $\rho_0(v, t)$ в точке $v^*(t) = \arg \min S(v, t)$ безусловного минимума действия. Гамильтониан $H(\rho|v, p)$ уравнения Больцмана обращается в нуль вместе с градиентом по v , если $p = 0$. Поэтому

$$(H(\rho_0|v, S_v^{(1)})\rho_1 + H(\rho_1|v, S_v^{(1)})\rho_0)|_{S_v^{(1)}=0} = 0$$

в уравнении (5). Эволюция безусловного минимума $v^*(t)$ определяется из неявного уравнения $S_v^{(1)}(v^*(t), t) = 0$, т.е.

$$\dot{v}^* = -(S_{vv}^{(2)}(v^*, t))^{-1} S_{vt}^{(2)}(v^*, t).$$

Из (3), (4) следует, что $S_{vt}^{(2)}(v^*, t) = -H_v^{(1)}(v^*, 0) - H_p^{(1)}(v^*, 0)S_{vt}^{(2)}(v^*, t) = 0$. Это позволяет получить замкнутую систему относительно $\rho_0(v^*, t)$ и $S(v, t)$ (теорема 4).

Функции Гамильтона различных задач для нелинейного уравнения, вообще говоря, различны и зависят от начального условия. В случае больших уклонений точки v от носителя начального условия асимптотика решения состоит из двух частей: “внутренней” составляющей $\rho^{\text{int}}(v, t)$ порядка $O(1)$, на носителе которой $S(v, t) \equiv 0$, и “внешней” экспоненциально убывающей части $\rho^{\text{ext}}(v, t)$, на носителе которой уравнение Гамильтона–Якоби (4) имеет нетривиальное решение. Составляющая $\rho^{\text{int}}(v, t)$ переносится с сохранением нормы в $L_1(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий гамильтоновой системы в области, где $S(v, t) \equiv 0$. Поэтому нелинейное уравнение переноса (5) не зависит от решения уравнения (4) и не содержит высших членов. Более того, в силу свойства (3) гамильтониана $H_p^{(1)}(v, 0) = 0$ оказывается, что $\rho^{\text{int}}(v, t) = \rho_0(v) + O(\varepsilon)$. После того, как найдено $\rho_0^{\text{int}}(v, t) = \rho_0(v)$, логарифмическая асимптотика находится из уравнения (4), а точнее из связанной с ним двухточечной вариационной задачи с лагранжианом, соответствующим гамильтониану туннельного типа $\mathcal{H}(v, p) = \int_{\Omega} dw \rho_0(w) H(v - w, p)$:

$$S(v, t) = \min_{\substack{q(t)=v \\ q(0) \in \partial\Omega(t)}} \int_0^t d\tau \mathcal{L}(\rho_0^{\text{int}}|q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau),$$

решение которой удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби и описывает эволюцию условного минимума двухточечной функции действия $S(v, w, t)$ на множестве траекторий $q(0) = w \in \partial\Omega(t)$, $q(t) = v$. Вариация точки $w \in \partial\Omega(t)$ дает в линейном приближении необходимое условие минимума: $p(0) = S_w^{(1)}(v, w^*, t) \perp T\partial\Omega(t)$, полученное в [7] для асимптотики типа больших уклонений для линейных уравнений туннельного типа.

2. Стохастическая гамильтонова система для многочастичного уравнения Колмогорова–Феллера. Рассмотрим марковский процесс в N -частичной системе, описывающий случайное скачкообразное изменение скоростей сталкивающихся частиц. Предположим, что столкновения между i -й и j -й частицами равновероятны для всех i и j , и имеют случайное экспоненциально распределенное время ожидания τ_{ij} , зависящее от относительной скорости частиц $v_i - v_j$ и случайного “прицельного” параметра $\omega \in S_3$:

$$P\{\tau_{ij} > t \mid \omega, v_i - v_j\} = \exp(-C_{N,\varepsilon} t |v_i - v_j| \cdot |\cos \varphi|), \quad (6)$$

где $C_{N,\varepsilon}|v_i - v_j|$ – значение интенсивности столкновений i -й и j -й частиц, ω – точка на единичной сфере $S_3 \subset \mathbb{R}^3$, n_ω – соответствующий единичный вектор, $\varphi = \varphi(\omega, v_i - v_j)$ – случайный угол между векторами $v_i - v_j$ и n_ω . Осью сферы S_3 является вектор $v_i - v_j$.

Обозначим $v_{ij} = v_{ij}(\omega) = n_\omega(n_\omega, v_i - v_j)$ и будем считать, что “прицельный” параметр ω определяет не только время ожидания столкновения, но и изменение скорости обеих частиц:

$$v_i \mapsto v'_i = v_i - v_{ij}(\omega), \quad v_j \mapsto v'_j = v_j - v_{ij}(\omega), \quad (7)$$

$$v_i = v'_i + v_{ij}(\omega) = v'_i - v'_{ij}(\omega), \quad v'_{ij}(\omega) = n_\omega(n_\omega, v'_i - v'_j), \quad (8)$$

что соответствует бoльцмановской модели упругого рассеяния. Таким образом, интенсивность $|v_{ij}(\omega)|$ парных столкновений между i -й и j -й частицами зависит от случайного параметра ω , а распределение величины скачка описывается некоторой мерой $m_\varepsilon(d\omega, v)$:

$$P\{v_{ij}(\omega) \in B\} = \int_{\omega: v_{ij}(\omega) \in B} m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3). \quad (9)$$

Преобразование скоростей (7), (8) обеспечивает сохранение суммарной энергии и импульса при столкновении двух частиц одинаковой массы. Интенсивность столкновений $C_{N,\varepsilon}|v_i - v_j|$ (6) инвариантна относительно преобразования (7), поскольку $|v_{ij}(\omega)| = |v_i - v_j| = |v'_{ij}(\omega)|$. В дальнейшем изложении мы предполагаем, что семейство мер m_ε обладает аналогичным свойством инвариантности:

$$m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) = m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j - 2v_{ij}(\omega)) = m_\varepsilon(d\omega, v'_i - v'_j). \quad (10)$$

Распределения (6) и (9) позволяют представить переходную вероятность $P_N(v, t + \Delta t | \Gamma)$ с точностью до членов порядка $O(\Delta t)^2$ как сумму условных вероятностей множества траекторий, не совершающих скачков за время Δt и совершающих один скачок за это время. Отсюда следует уравнение Колмогорова–Феллера для переходной вероятности:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \hat{H}_{N,\varepsilon})P_N(v, t | \Gamma) &= 0, \quad P_N(v, 0 | \Gamma) = I_\Gamma(v), \\ \hat{H}_{N,\varepsilon} &= C_{N,\varepsilon} \sum_{i \neq j} \hat{H}_{ij}^\varepsilon, \quad \hat{H}_{ij}^\varepsilon = \int m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) |v_{ij}(\omega)| (D_{ij}(\omega) - 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\partial_{v_i - v_j} = \partial_{v_i} - \partial_{v_j}$ и $D_{ij}(\omega) = \exp(-(v_{ij}(\omega), \partial_{v_i - v_j}))$ – композиция операторов сдвига. Таким образом, vp -символ псевдодифференциального оператора $\hat{H}_{N,\varepsilon}$ равен

$$\begin{aligned} H_N^\varepsilon(v, p) &= C_{N,\varepsilon} \sum_{i \neq j} H_{ij}^\varepsilon(v, p), \quad H_{ij}^\varepsilon(v, p) = H^\varepsilon(v_i - v_j, p_i - p_j), \\ H^\varepsilon(v, p) &= \int m_\varepsilon(d\omega, v) |(n_\omega, v)| (e^{(n_\omega, v)(n_\omega, p)} - 1), \quad v_i, p_i \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения Колмогорова–Феллера можно представить в виде условного математического ожидания относительно вероятностной меры $\mathcal{P}_{v,t}(dv(\tau))$ на цилиндрической σ -алгебре непрерывных слева случайных траекторий $v(\tau)$, начинающихся в момент $\tau = t$ в точке $v \in \mathbb{R}^{3N}$ и приходящих в момент $\tau = 0$ в случайную точку $v(0)$ (см. [8]):

$$\int \mathcal{P}_{v,t}(dv(\tau)) I_\Gamma(v(0)) = M_{v,t} I_\Gamma(v(0)) = P_N(v, t | \Gamma),$$

где $I_\Gamma(\cdot)$ – индикатор борелевского множества $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$. Компоненты $v_i(\tau) \in \mathbb{R}^3$ траектории скачкообразного марковского процесса являются решением системы стохастических интегральных уравнений

$$v_i(s) = v_i - \int_{(s,t]} \int_{S_3} \sum_{j \neq i} \nu_\varepsilon(d\tau, d\omega | v_i(\tau) - v_j(\tau)) n_\omega(n_\omega, v_i(\tau) - v_j(\tau)), \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (13)$$

где $\nu_\varepsilon(T, \Omega | v)$ – целочисленная пуассонова мера со средним

$$M\nu_\varepsilon(T, \Omega | v) = \text{mes } T \, C_{N,\varepsilon} \int_{\omega \in \Omega} m_\varepsilon(d\omega, v) |(v, n(\omega))|, \quad \Omega \in \mathcal{B}(S_3),$$

а $n_\omega(n_\omega, v_i(\tau) - v_j(\tau))$ – случайная величина скачка скорости, соответствующая преобразованиям (7), (8). Приведенная конструкция уравнения для траекторий марковских скачкообразных процессов с экспоненциальным временем ожидания скачка (6) и распределением величины скачка (9) является стандартной (см. [5], [6], [9]).

Интеграл $\int_{\mathbb{R}} m_\varepsilon(d\omega, v) |(v, n(\omega))| = 0(|v|)$ имеет смысл интенсивности скачков из точки v , поэтому описанный выше марковский процесс имеет неограниченную интенсивность скачков и неограниченную величину скачка. В классе таких процессов существуют нерегулярные процессы, совершающие бесконечно много скачков за конечное время с положительной вероятностью (см. [10]). Достаточным условием регулярности скачкообразного марковского процесса с распределением $m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j)$ величины скачков и интенсивностью скачков

$$\kappa(v) = \sum_{i \neq j} \int_{S_3} m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) |(n_\omega, v_i - v_j)|$$

является неравенство

$$\widehat{H}_{N,\varepsilon} \kappa(v) \leq c \kappa(v) \quad (14)$$

для некоторой постоянной $c \geq 0$, т.е.

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \int_{S_3} m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) |(n_\omega, v_i - v_j)| \\ & \times (\kappa(v_1, \dots, v_i - v_{ij}(\omega), \dots, v_j + v_{ij}(\omega), \dots, v_N) - \kappa(v)) \leq c \kappa(v) \end{aligned}$$

(см. [11]). Учитывая, что $v_{ij}(\omega) = n_\omega(n_\omega, v_i - v_j)$, имеем $(n_\omega, v_i - v_j) = (n_\omega, v_{ij}(\omega))$, и в силу (10) $(n_\omega, v_i - v_j - 2v_{ij}(\omega)) = -(n_\omega, v_i - v_j)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \kappa(v_1, \dots, v_i - v_{ij}(\omega), \dots, v_j + v_{ij}(\omega), \dots, v_N) - \kappa(v) \\ & = |(n_\omega, v_i - v_j - 2v_{ij}(\omega))| - |(n_\omega, v_i - v_j)| + \sum_k (|(n_\omega, v_i - v_k - v_{ik}(\omega))| \\ & \quad - |(n_\omega, v_i - v_k)| + |(n_\omega, v_k - v_j + v_{kj}(\omega))| - |(n_\omega, v_k - v_j)|) \\ & = - \sum_k (|(n_\omega, v_i - v_k)| + |(n_\omega, v_k - v_j)|) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточное условие регулярности выполнено для $c = 0$. Оно обеспечивает существование и единственность решения уравнения Колмогорова–Феллера в классе переходных вероятностей [11]. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Если мера $m_\varepsilon(d\omega, v)$ удовлетворяет условию (10), то существует единственное решение уравнения Колмогорова–Феллера (11), являющееся переходной вероятностью и определяющее вероятностную меру непрерывного слева скачкообразного марковского процесса, удовлетворяющего системе стохастических уравнений (13).

Обозначим через $\mathcal{H}_T^\varepsilon(v, p)$ гамильтониан, порождаемый введенной выше случайной целочисленной пуассоновой мерой $\nu_\varepsilon(T, \Omega|v)$ и гамильтонианом $H^\varepsilon(v, p)$:

$$\mathcal{H}_T^\varepsilon(v, p) = \int_{S_3} \nu_\varepsilon(T, d\omega|v) (e^{(n_\omega, v)(n_\omega, p)} - 1).$$

Из определения пуассоновой меры $\nu_\varepsilon(T, d\omega|v)$ следует, что среднее значение стохастического гамильтониана не зависит от времени и равно гамильтониану (12):

$$T^{-1}M\mathcal{H}_T^\varepsilon(v, p) = H^\varepsilon(v, p).$$

Обозначим

$$\mu_\varepsilon(\Omega, v) = \int m_\varepsilon(d\omega, v) |(n_\omega, v)| \chi_\Omega(\omega)$$

и предположим, что производная

$$\mu'_\varepsilon(\Omega, v) = \frac{\partial}{\partial v} \mu_\varepsilon(\Omega, v) \in \mathbb{R}^3$$

имеет компоненты, абсолютно непрерывные относительно меры $\mu_\varepsilon(\Omega, v)$. Далее обозначим через

$$\varphi_\varepsilon(\omega, v) = \frac{d\mu'_\varepsilon}{d\mu_\varepsilon}(\omega, v): S_3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

μ_ε -абсолютно интегрируемую производную Радона–Никодима меры μ'_ε относительно μ_ε . Частные производные стохастического гамильтониана $\mathcal{H}_T^\varepsilon(v, p)$ равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{H}_T^\varepsilon(v, p) &= \int_{S_3} \nu_\varepsilon(T, d\omega|v) V(n_\omega, v, p), \\ \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{H}_T^\varepsilon(v, p) &= - \int_{S_3} \nu_\varepsilon(T, d\omega|v) P(n_\omega, v, p), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V(n_\omega, v, p) &= (n_\omega, v) n_\omega e^{(n_\omega, v)(n_\omega, p)}, \\ P(n_\omega, v, p) &= (n_\omega, p) n_\omega e^{(n_\omega, v)(n_\omega, p)} + \varphi_\varepsilon(\omega, v) (e^{(n_\omega, v)(n_\omega, p)} - 1). \end{aligned}$$

Они имеют средние значения, совпадающие с соответствующими частными производными гамильтониана (12), и определяют стохастическую гамильтонову систему с гамильтонианом $\sum_{j \neq i} \mathcal{H}_T^\varepsilon(v_i - v_j, p_i - p_j)$:

$$\begin{aligned} v_i(s) &= v_i - \frac{\partial}{\partial p_i} \int_s^t \sum_{j \neq i} \mathcal{H}_{d\tau}^\varepsilon(v_i(\tau) - v_j(\tau), p_i(\tau) - p_j(\tau)), \\ p_i(s) &= p_i + \frac{\partial}{\partial v_i} \int_s^t \sum_{j \neq i} \mathcal{H}_{d\tau}^\varepsilon(v_i(\tau) - v_j(\tau), p_i(\tau) - p_j(\tau)). \end{aligned} \tag{15}$$

Стохастическая система (15) описывает марковский процесс в фазовом пространстве, i -я компонента которого совершает скачки $v_i \rightarrow v_i + V_{ij}(\omega)$, $p_i \rightarrow v_i + P_{ij}(\omega)$, $V_{ij}(\omega) = V(n_\omega, v_i - v_j, p_i - p_j)$, $P_{ij}(\omega) = P(n_\omega, v_i - v_j, p_i - p_j)$, определенные выше, где индекс j распределен равномерно на множестве $\{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$, время ожидания скачков имеет распределение (6), а величина скачка определяется значением случайного параметра ω : $P\{\omega \in B \mid v_i - v_j\} = m_\varepsilon(B, v_i - v_j)$.

Пусть $\mathbf{v}(\tau) = (v_1(\tau), \dots, v_N(\tau))$ и $\mathbf{p}(\tau) = (p_1(\tau), \dots, p_N(\tau))$ – решение стохастической системы (15). Используя марковское свойство решений стохастического уравнения (15), нетрудно вывести уравнение Колмогорова–Феллера в фазовом пространстве для эволюции функции плотности $\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{p}, t) = M_{\mathbf{v}, \mathbf{p}, t} \sigma_0(\mathbf{v}(0), \mathbf{p}(0))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{p}, t) = C_{N, \varepsilon} \sum_{j \neq i} \int m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) |v_{ij}(\omega)| \\ \times (\sigma(v_1, \dots, v_i - V_{ij}(\omega), \dots, v_j + V_{ij}(\omega), \dots, v_N, \\ p_1, \dots, p_i + P_{ij}(\omega), \dots, p_j - P_{ij}(\omega), \dots, p_N, t) - \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{p}, t)). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку интенсивность скачков скорости и их распределение для марковских случайных процессов $v_i(s)$ не зависят от текущих координат $p_j(s)$, то условие (14) регулярности минимального решения уравнения (15) также выполнено и имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнено условие (10), то существует единственное решение уравнения Колмогорова–Феллера (15), являющееся переходной вероятностью и определяющее вероятностную меру непрерывного следа скачкообразного марковского процесса, удовлетворяющего гамильтоновой системе стохастических уравнений (14).*

3. Слабые пределы многочастичных уравнений Колмогорова–Феллера.

Из свойства (10) меры $m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j)$ относительно преобразования скоростей (7) следует, что операторы $\hat{H}_N^\varepsilon$ и $\hat{H}_{ij}^\varepsilon$ симметричны относительно двойственности между $L_1(\mathbb{R}^{3N})$ и $L_\infty(\mathbb{R}^{3N})$, $L_\infty(\mathbb{R}^{3N})$ и $M(\mathbb{R}^{3N})$, где $M(\mathbb{R}^{3N})$ – банахово пространство мер Радона:

$$(b, \hat{H}_N^\varepsilon \rho_N) = (\hat{H}_N^\varepsilon b, \rho_N), \quad (b, \hat{H}_N^\varepsilon \sigma_N) = (\hat{H}_N^\varepsilon b, \sigma_N),$$

$$a b \in L_\infty(\mathbb{R}^{3N}), \rho \in L_1(\mathbb{R}^{3N}), \sigma_N \in M(\mathbb{R}^{3N}),$$

$$(b, \rho_N) = \int b(\mathbf{v}) \rho_N d\mathbf{v}, \quad (b, \sigma_N) = \int b(\mathbf{v}) \sigma_N(d\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Пусть $\rho_N^\varepsilon(\mathbf{v}, t)$ – положительное нормированное на единицу в $L_1(\mathbb{R}^{3N})$ решение задачи Коши (11), отвечающее начальному условию $\rho_0(\mathbf{v})$ такому, что

$$\rho_N^\varepsilon(\mathbf{v}, 0) = \prod_{i=1}^N \rho_0(v_i), \quad \int \rho_0(v_i) (1 + |v_i|)^4 dv_i < \infty, \quad \int \rho_0(v_i) dv_i = 1. \quad (17)$$

Элементы пространств $L_1(\mathbb{R}^{3N})$ и $L_\infty(\mathbb{R}^{3k})$ естественным образом отождествляются с соответствующими элементами пространств $M(\mathbb{R}^{3N})$ и $L_\infty(\mathbb{R}^{3N})$ при $k < N$. Факт слабой сходимости при $N \rightarrow \infty$, $NC_{N, \varepsilon} \rightarrow C_\varepsilon$ решений уравнения Колмогорова–Феллера

(11), (15) с начальными распределением, удовлетворяющим условию (17), к решению уравнения Больцмана хорошо известен (см. [6]) и состоит в следующем. Для любой гладкой ограниченной функции $f_k(v_1, \dots, v_k)$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F_k(\cdot), \rho_N^\varepsilon(\cdot, t)) = \int f_k(v) \prod_{i=1}^k \rho_\varepsilon(v_i, t) dv_i,$$

$$F_k(v) = \frac{1}{C_N^k} \sum_{i_l \neq i_m} f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}), \quad C_N^k = \frac{k!}{k! (N-k)!},$$

где $\rho_\varepsilon(B, t)$ – семейство положительных нормированных вероятностных мер, удовлетворяющих уравнению Больцмана в слабой форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int f_k(v) \prod_{i=1}^k \rho_\varepsilon(v_i, t) dv_i \\ &= C_\varepsilon \sum_{i \neq j} \int (f_k(v_1, \dots, v_i - v_{ij}(\omega), \dots, v_j - v_{ji}(\omega), \dots, v_k) - f(v_1, \dots, v_N)) \\ & \quad \times m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) |v_{ij}(\omega)| \rho_\varepsilon(v_i, t) \rho_\varepsilon(v_j, t) dv_i dv_j. \end{aligned}$$

В частности, при $k = 1$ слабым пределом решений уравнений (11) является решение уравнения Больцмана

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(v_1, t) &= C_\varepsilon \int dv_2 \int m_\varepsilon(d\omega, v_1 - v_2) |v_{1,2}(\omega)| \\ & \quad \times (\rho(v_1 - v_{1,2}(\omega), t) \rho(v_2 + v_{1,2}(\omega), t) - \rho(v_1, t) \rho(v_2, t)), \end{aligned} \quad (18)$$

а слабым пределом решений уравнения (15) при $N \rightarrow \infty$ является решение уравнения Больцмана в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma(v_1, p_1, t) &= C_\varepsilon \int dv_2 dp_2 \int m_\varepsilon(d\omega, v_1 - v_2) |v_{1,2}(\omega)| (\sigma(v_1 - V_{1,2}(\omega), p_1 + P_{1,2}(\omega), t) \\ & \quad \times \sigma(v_2 + V_{1,2}(\omega), p_2 - P_{1,2}(\omega), t) - \sigma(v_1, p_1, t) \sigma(v_2, p_2, t)), \end{aligned} \quad (19)$$

которое вырождается в уравнение Больцмана (18) с начальным условием $\sigma_0(v, p) = \rho_0(v) \delta(p)$. Скачки скорости и импульса V_{ij}, P_{ij} в (19) определяются так же, как и в уравнении (15).

В случае, если скачки $V_{1,2}(\omega), P_{1,2}(\omega)$ малы, главным членом уравнения (16) является уравнение типа Власова–Лиувилля

$$\dot{\sigma} + C_\varepsilon (\{\sigma, \overline{H_\sigma}\} + \sigma \overline{\{\sigma, H\}}) = 0,$$

где $\sigma = \sigma(v, p, t)$, $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона,

$$\begin{aligned} \overline{H_\sigma}(v, p, t) &= \int dv_2 dp_2 \sigma(v_2, p_2, t) H^\varepsilon(v_1 - v_2, p_1 - p_2), \\ \overline{\{\sigma, H\}} &= \int dv_2 dp_2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \sigma(v_2, p_2, t)}{\partial v_{2i}} \frac{\partial H^\varepsilon(v_1 - v_2, p_1 - p_2, t)}{\partial p_{2i}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \sigma(v_2, p_2, t)}{\partial p_{2i}} \frac{\partial H^\varepsilon(v_1 - v_2, p_1 - p_2, t)}{\partial v_{2i}} \right), \end{aligned}$$

$H^\varepsilon(v, p)$ – гамильтониан (12).

Комплексный метод ВКБ и его обобщения [2], [3], [7] позволяют выделить сингулярную часть решения (1), выводящую решение из класса функций при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ семейство мер

$$\rho_\varepsilon(B, t) = \kappa_\varepsilon(t) \int_B dv \rho_\varepsilon^{\text{reg}}(v, t) \exp\left(-\frac{S(v, t)}{\varepsilon}\right),$$

где $\kappa_\varepsilon(t)$ – нормировочный множитель, $\kappa_\varepsilon(t) \exp(-S(v, t)/\varepsilon)$ – сингулярная часть решения, $\rho_\varepsilon^{\text{reg}} = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots$ – регулярная часть решения. Как мы увидим ниже, в $L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ для любой гладкой вещественной функции $S(v)$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon C_\varepsilon e^{S(v)/\varepsilon} \hat{H}_{ij}^\varepsilon e^{-S(v)/\varepsilon} = H(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)}). \quad (20)$$

Функция $H(v, p)$ называется *функцией Гамильтона* оператора $\hat{H}_{N, \varepsilon}$ с малой передачей импульса. Аналогичным образом определяется оператор переноса $\hat{L}$, соответствующий $\hat{H}_{N, \varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_\varepsilon e^{S(v)/\varepsilon} \hat{H}_{ij}^\varepsilon e^{-S(v)/\varepsilon} - \varepsilon^{-1} H(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)}(v) - S_{v_j}^{(1)}(v))) \varphi(v) &= \hat{L}_{ij} \varphi(v), \\ \hat{L}_{ij} &= L(S^{(2)}(v), v_i - v_j, \hat{p}_i - \hat{p}_j), \quad \hat{p}_i = -\partial_{v_i}. \end{aligned} \quad (21)$$

Функция $H(v, p)$ и оператор $\hat{L}(\sigma, v, p)$ зависят от предельных свойств семейства мер $m_\varepsilon(d\omega, v)$, которые обсуждаются в следующем пункте.

4. Распределение скачков в случае малой передачи импульса. Для описания динамики системы N частиц, столкновения которых происходят с малой передачей импульса, будем считать, что меры $m_\varepsilon(d\omega, v)$ концентрируются при $\varepsilon \rightarrow 0$ вблизи экватора единичной сферы S_3 , осью которой является вектор $n_v = v/|v|$. Аналогичное предположение делается при выводе уравнения Ландау–Фоккера–Планка [6], [12]. Более точно, будем предполагать, что для любой измеримой ограниченной функции $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место асимптотическое разложение интеграла:

$$\int_{S_3} m_\varepsilon(d\omega, v) f(n_\omega(n_\omega, v)) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr|v) f(\varepsilon r|v|Z(\varepsilon r|n_\theta, n_v)) + O(\varepsilon^\infty), \quad (22)$$

где $n_\theta = (0, \cos \theta, \sin \theta)$ – единичный вектор, лежащий в плоскости, ортогональной вектору n_v , $Z: \mathbb{R} \times S_3 \times S_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – гладкая функция, а $m_0(dr, |v|)$ – семейство условных вероятностных мер на $\mathbb{R}$. Предположение о концентрации меры $m_\varepsilon(d\omega, v)$ вблизи экватора сферы с осью n_v означает, что $Z(0|n_\theta, n_v) = Cn_\theta$. Не уменьшая общности, можно считать, что $|Z(0|n_\theta, n_v)| = 1$, так как это условие всегда можно обеспечить масштабным преобразованием меры m_0 . Через $\sigma_k(v)$ в дальнейшем изложении обозначается конечный абсолютный момент меры m_0 порядка k :

$$\sigma_k(v) = \int_{\mathbb{R}} |r|^k m_0(dr, |v|).$$

Для упрощения доказательств и промежуточных вычислений мы будем дополнительно предполагать, что мера m_0 симметрична, в частности,

$$\sigma_{2k+1}(v) = \int_{\mathbb{R}} r^{2k+1} m_0(dr, |v|) = 0, \quad (23)$$

и что ее первые производные по параметру v имеют не слишком сильные особенности в нуле; так что для любой гладкой ограниченной функции $f(r, v)$, обращающейся в точке $v = 0$ в 0 вместе со своей производной первого порядка, первая производная интеграла также равна 0 в точке $v = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr, |v|) f(r, v)|_{v=0} = 0. \quad (24)$$

Грубо говоря, условие (24) означает, что первая производная по v меры m_0 может иметь особенность порядка $O(|v|^{-(2-\alpha)})$, $\alpha > 0$, в окрестности нуля.

Примером семейства вероятностных мер, удовлетворяющих условиям (22)–(24), является гауссово распределение, дисперсия которого растет с уменьшением скорости и убывает с увеличением температуры:

$$m_\varepsilon(\Omega, v) = \left(\frac{E(v)}{2\pi kT\varepsilon^2} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\varphi \exp\left(-\frac{E(v)\varphi^2}{2\varepsilon^2 kT}\right) I_\Omega(\omega(\theta, \varphi \bmod \pi)), \quad (25)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура, $E(v) = \frac{1}{2}mv^2$ – кинетическая энергия, $I_\Omega(\cdot)$ – индикатор борелевского множества $\Omega \subseteq S^3$, $\omega(\theta, \varphi \bmod \pi)$ – точка на сфере с угловыми координатами $\theta, \pi/2 + \varphi \bmod \pi$ относительно оси n_v . Начало отсчета угла θ выбирается произвольно, точки $\omega(\theta, 0)$ лежат на экваторе сферы с осью n_v . Обозначим $n_v = \{1, 0, 0\}$, $n_\theta = \{0, \cos \theta, \sin \theta\}$, $n_\omega = \{\sin \varphi, \cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta\}$, $n_v, n_\theta, n_\omega \in S^3 \subset \mathbb{R}^3$. Тогда $(n_v, n_\theta) = 0$, $(n_\omega, n_v) = \sin \varphi$, $n_\omega(n_\omega, v) = \varphi|v|(n_\theta + \varphi n_v + O(\varphi^2))$, так что предположение (22) выполнено:

$$\begin{aligned} \int_{S_3} f(n_\omega(n_\omega, v)) m_\varepsilon(d\omega, v) &= \left(\frac{E(v)}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} d\varphi \exp\left(-\frac{E(v)\varphi^2}{2kT}\right) f(\varepsilon\varphi|v|Z(\varepsilon\varphi|n_\theta, n_v)) + O(\varepsilon^\infty), \end{aligned} \quad (26)$$

где $Z(r) = n_\theta + rn_v - r^2 n_\theta/2 + O(r^3)$, а член $O(\varepsilon^\infty)$ является оценкой интеграла (25) на множестве $|\varphi| \geq \pi$. В этом примере $|Z(0|n_\theta, n_v)| = 1$, $Z(0|n_\theta, n_v) = n_\theta$, $Z'_r(0|n_\theta, n_v) = n_v$, $Z''_r(0|n_\theta, n_v) = -n_\theta$.

Как отмечалось выше, преобразование $v \mapsto v' = v - 2n_\omega(n_\omega, v)$ является преобразованием зеркального отражения относительно плоскости, ортогональной вектору n_ω . Поэтому $|v| = |v'|$, $E(v) = E(v')$. Следовательно, мера $m(d\omega, v)$ удовлетворяет условию (10). Для симметричного распределения выполнено предположение (23), и, как нетрудно видеть, первая производная по v меры m_0 имеет в нуле особенность порядка $O(|v|^{-1})$, интегрируемую в двумерном случае. Поэтому предположение (19) также выполнено.

Заметим, что из свойства (17) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int m_\varepsilon(d\omega, v)(n_\omega, v)^2 &= |v|^2 \sigma_2(|v|), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|n_\omega, v| \geq \delta|v|} m_\varepsilon(d\omega, v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{E(v)}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\times \int_{|r| \geq \delta/\varepsilon} dr \exp\left(-\frac{E(v)r^2}{2kT}\right) I_\Omega(\omega(\theta, \varphi \bmod \pi)) = 0, \end{aligned}$$

используемые для вывода уравнения Ландау–Фоккера–Планка (см. [6, с. 162]), а мера (20) имеет абсолютный момент третьего порядка, равный $\sigma_3(v) = O(|v|^{-3})$, что соответствует формальной модели кулоновской плазмы [6], [12].

В заключение этого пункта рассмотрим оценку нормировочных коэффициентов $C_{N,\varepsilon}$, обеспечивающих передачу конечной энергии и конечного импульса за единицу времени. Из приведенной выше вероятностной интерпретации уравнений Больцмана и Колмогорова–Феллера (см. [4]–[6]) и разложения (22) следует, что интенсивность столкновений, равна

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= I_\varepsilon(\rho, v) = C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}} dv' \int_{S_3} m_\varepsilon(d\omega, v - v') |v_\omega| \rho(v') \\ &= \varepsilon C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}} dv' |v - v'| \rho(v') + O(\varepsilon^3) C_\varepsilon, \quad v_\omega = n_\omega(n_\omega, v - v'), \end{aligned}$$

а средняя величина энергии, передаваемой при парном столкновении равна

$$\overline{E}_\varepsilon(\rho, v) = \frac{m \int dv' \int_{S_3} m_\varepsilon(d\omega, v - v') |v_\omega|^3 \rho(v')}{2 \int dv' \int_{S_3} m_\varepsilon(d\omega, v - v') |v_\omega| \rho(v')} = O(\varepsilon^2).$$

Поэтому средняя величина импульса, передаваемого при индивидуальном столкновении, имеет порядок $\overline{P}_\varepsilon = \sqrt{2m\overline{E}_\varepsilon}$. Из условия передачи конечного импульса $I_\varepsilon \overline{P}_\varepsilon = O(1)$ мы находим значение нормировочного коэффициента в интеграле столкновений: $C_\varepsilon = O(\varepsilon^{-2})$. В дальнейшем изложении мы полагаем $C_\varepsilon = \varepsilon^{-2}$. Такой выбор нормировочного коэффициента и распределения (18), (19) величины скачков приводит в пределе при $N \rightarrow \infty$ к уравнению Больцмана, описывающему распределение скоростей для столкновительного процесса с частыми столкновениями и малой передачей импульса. Выбор нормировочного коэффициента $C_\varepsilon = \varepsilon^{-3}$ соответствует приближению Ландау–Фоккера–Планка при $\varepsilon \rightarrow 0$.

5. Гамильтониан уравнения Колмогорова–Феллера для многочастичных систем с малой передачей импульса. Воспользуемся предположением (22) и формулой (12) для асимптотического разложения операторов $\hat{H}_{ij}^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. С помощью коммутационного соотношения ПДО с экспонентой (см. [7]) получим выражение для символа операторов $\hat{H}_{ij}^{(\varepsilon)}|_{\varepsilon=0}$ и выражение для оператора переноса, вытекающие из тождества

$$\begin{aligned} e^{S(v)/\varepsilon} \hat{H}_{ij}^{(\varepsilon)} e^{-S(v)/\varepsilon} \rho_\varepsilon(v) &= C_\varepsilon \int m_\varepsilon(d\omega, v_i - v_j) |(n_\omega, v_i - v_j)| \\ &\quad \times ((e^{-\Phi_{ij}(v, \omega)} - 1) \rho_\varepsilon(v) + e^{-\Phi_{ij}(v, \omega)} R_{ij}(v, \omega)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(v, \omega) &= S(v_1, \dots, v_i - v_{ij}(\omega), \dots, v_j + v_{ij}(\omega), \dots, v_N) - S(v), \\ R_{ij}(v, \omega) &= \rho_\varepsilon(v_1, \dots, v_i - v_{ij}(\omega), \dots, v_j + v_{ij}(\omega), \dots, v_N) - \rho_\varepsilon(v), \end{aligned}$$

а $v_{ij}(\omega) = n_\omega(n_\omega, v_i - v_j)$ – определенная выше функция. Учитывая, что согласно предположению (22) интегралы по семейству мер μ_ε ограниченных измеримых функций от

$v_{ij}(\omega) = |v_i - v_j| n_\omega(n_\omega, n_{v_i - v_j})$ сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к интегралам по мере m_0 функций от $\varepsilon v_{ij}(\theta, r)$, где

$$v_{ij}(\theta, r) = |v_i - v_j| Z(\varepsilon r | n_\theta, n_{v_i - v_j}) = |v_i - v_j| (Z(0) + \varepsilon r Z'_r(0)) + O(\varepsilon^2),$$

имеем $\Phi_{ij}(v, \omega) \rightarrow \varepsilon \Phi_{ij}^\varepsilon(v, r, \theta)$ и $R_{ij}(v, \omega) \rightarrow \varepsilon R_{ij}^\varepsilon(v, r, \theta)$, причем $Z(0) = n_\theta$,

$$\Phi_{ij}^\varepsilon(v, r, \theta) = (-r \widehat{L}_1(v_i - v_j, \partial_{v_i - v_j}) + \varepsilon r^2 \widehat{L}_2(v_i - v_j, \partial_{v_i - v_j})) S(v) + O(\varepsilon^2),$$

$$R_{ij}^\varepsilon(v, r, \theta) = r \widehat{L}_1(v_i - v_j, \partial_{v_i - v_j}) \rho_\varepsilon(v) + O(\varepsilon^1),$$

$$L_1(v, p) = L_1(v, p | n_\theta, n_v) = |v| (p, n_\theta),$$

$$L_2(v, p) = L_2(v, p | n_\theta, n_v) = |v| (p, Z'_r(0 | n_\theta, n_v)) + \frac{1}{2} |v|^2 (p, n_\theta)^2.$$

Нетрудно видеть, что $L_1(v, 0) = L_2(v, 0) = 0$. Заметим также, что в разложениях, отвечающих распределению скачков (25), имеем $L_1(v, p) = |v| (p, n_\theta)$, $L_2(v, p) = (v, p) + |v|^2 (p, n_\theta)^2 / 2$.

Используя разложение модуля суммы векторов $|x + \varepsilon y| = |x| + \varepsilon |x|^{-1} (x, y) + O(\varepsilon^2)$ для $x + \varepsilon y = Z(0) + \varepsilon Z'_r(0) = Z(\varepsilon r) + O(\varepsilon^2)$ и определение (22) меры m_0 , получим $\widehat{H}_N^{(\varepsilon)} = \sum_{i \neq j} \widehat{H}_{ij}^{(\varepsilon)}$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon e^{S(v)/\varepsilon} \widehat{H}_{ij}^{(\varepsilon)} e^{-S(v)/\varepsilon} \rho_\varepsilon(v) &= |v_i - v_j| \int_{\mathbb{R}} |r| m_0(dr, |v_i - v_j|) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\times \left((e^{r|v_i - v_j|(n_\theta, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)})} - 1) \rho_\varepsilon(v) \right. \\ &+ \varepsilon r e^{r|v_i - v_j|(n_\theta, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)})} ((-|v_i - v_j|(n_\theta, \partial_{v_i - v_j}) \rho_\varepsilon(v) \\ &+ r \rho_\varepsilon(v) \widehat{L}_2(v_i - v_j, \partial_{v_i - v_j}) S(v) + \rho_\varepsilon(v)(n_\theta, Z'_r(0 | n_\theta, n_{v_i - v_j}))) \Big) + O(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (27)$$

vp -символ главной части оператора $\widehat{H}_{ij}^{(\varepsilon)}$ (оператор ∂_v действует первым, а умножение на v – вторым) называется *гамильтонианом* уравнения Колмогорова–Феллера с малой передачей импульса:

$$H(v, p) = |v| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr, |v|) |r| (e^{r|v|(p, n_\theta)} - 1), \quad v, p \in \mathbb{R}^3. \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что поскольку $(p, n_\theta) = (|p|^2 - (p, n_v)^2)^{1/2} \sin \theta$, выполнено $H(v, p) = h(|v|^2, |p|^2 - (p, n_v)^2)$. Соответствующая гамильтонова система имеет законы сохранения $|v|^2 = \text{const}$, $|p|^2 - (p, v)^2 / |v|^2 = \text{const}$ и вполне интегрируема. Функция (28) обладает всеми свойствами гамильтониана туннельного типа [7, гл. 9], кроме свойства невырожденности гессiana по импульсам: $(v, H_{pp}^{(2)}(v, p)v) = 0$. Вырождение снимается при интегрировании по начальному распределению

$$H(\rho | v, p) = \int_{\Omega} dw h(|v - w|^2, |p|^2 - (p, n_{v-w})^2) \rho(w),$$

если для любых $p, v, \xi \in \mathbb{R}^3$

$$\int_{\Omega} dv_0 h_p^{(2)}(|v - v_0|^2, |p|^2 - (p, n_{v-v_0})^2) \rho_0(v_0) (|\xi|^2 - (\xi, n_{v-v_0})^2) > 0. \quad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В примере (25) гамильтониан не зависит от $|v|^2$:

$$\begin{aligned} H(v, p) &= |v| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dr |r| \left(\frac{E(v)}{2\pi kT \varepsilon^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{E(v)r^2}{2\varepsilon^2 kT} \right) (e^{-r|v|(p, n_\theta)} - 1) \\ &= \sqrt{\frac{kT}{m\pi}} \int_{\mathbb{R}} dr |r| e^{-r^2/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (e^{-r(p, n_\theta) \sqrt{kT/m}} - 1). \end{aligned}$$

Важным свойством гамильтонианов такого вида являются равенства

$$H(v, 0) = 0, \quad H_v^{(1)}(v, 0) = H_p^{(1)}(v, 0) = 0.$$

Найденные коэффициенты разложения (27) в общем случае выражаются через производные гамильтониана (28):

$$\begin{aligned} (H_p^{(1)}, \partial_v) &= |v| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr|\theta, v) |r| e^{r|v|(p, n_\theta)} (Z_r'(0|n_\theta, n_v), \partial_v), \\ \text{Tr}(H_{pp}^{(2)} S_{vv}^{(2)}) &= |v|^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr|\theta, v) |r|^3 e^{r|v|(p, n_\theta)} (n_\theta, S_{vv}^{(2)} n_\theta). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\varepsilon e^{S(v)/\varepsilon} \widehat{H}_{ij}^{(\varepsilon)} e^{-S(v)/\varepsilon} \rho_\varepsilon(v) = \rho_\varepsilon(v) H(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)}) + \varepsilon \widehat{L}_N \rho_\varepsilon(v) + O(\varepsilon^2).$$

Дифференциальный оператор первого порядка $\widehat{L}_N = \sum_{i \neq j} \widehat{L}_{ij}$ называется *оператором переноса* N -частичного уравнения Колмогорова–Феллера (см. (21)):

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{ij} &= H_p^{(1)}(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)}) (\partial_{v_i} - \partial_{v_j}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}(H_{pp}^{(2)}(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)}) \partial_{v_i - v_j} \otimes \partial_{v_i - v_j} S(v)) + l_{ij}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поправка $l_{ij} = l(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)})$, присутствующая в (30), связана с разложением распределения скачков и $|Z(\varepsilon r)|$ по малому параметру:

$$l(v, p) = |v|^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr, |v|) |r| r ((e^{rL_1} - 1)(n_\theta, Z_r') + e^{rL_1}(p, Z_r')), \quad (31)$$

где функция $Z(r|n_\theta, n_v)$ и ее производные по r берутся в точке $r = 0$, $l(0, p) = l(v, 0) = 0$, а тензорное произведение градиентов в (30) действует только на $S(v)$. Таким образом, имеет место теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены предположения (22), то гамильтониан H_N и оператор переноса $\widehat{L}_N$ для N -частичного уравнения Колмогорова–Феллера с малой передачей импульса определены формулами (28), (30), (31).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для примера (25) имеем

$$(Z(0), Z'(0)) = (n_\theta, n_v) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} dr |r| r \exp(-r^2) = 0.$$

Поэтому оператор $\hat{L}_N$ переходит в стандартный оператор переноса $\hat{L}_N = \sum_{i \neq j} \hat{L}_{ij}$ с компонентами

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ij} = & (H_p^{(1)}(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)}), \partial_{v_i} - \partial_{v_j}) \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr}(H_{pp}^{(2)}(v_i - v_j, S_{v_i}^{(1)} - S_{v_j}^{(1)}) \partial_{v_i - v_j} \otimes \partial_{v_i - v_j} S(v)), \end{aligned}$$

где $H_p^{(1)}$ и $\partial_{v_i - v_j}$ – векторы из $\mathbb{R}^3$, а $H_{pp}^{(2)}$ и $\partial_{v_i - v_j} \otimes \partial_{v_i - v_j}$ – матрицы размера 3×3 с коэффициентами

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial v_{ik}} \frac{\partial}{\partial v_{jl}}$$

соответственно. Очевидно, что в области, где $S(v, t) \equiv 0$, выполнено $\hat{L}_{ij} = 0$.

6. Необходимые условия существования асимптотических разложений.

Предельный переход к слабому пределу при $N \rightarrow \infty$ в N -частичном уравнении Колмогорова–Феллера (11) с учетом разложения (30) дает следующее уравнение для одночастичной плотности:

$$\begin{aligned} e^{S(v_1, t)/\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} e^{-S(v_1, t)/\varepsilon} \rho_\varepsilon(v_1, t) &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial S(v_1, t)}{\partial t} \rho_\varepsilon(v_1, t) + \frac{\partial \rho_\varepsilon(v_1, t)}{\partial t} \\ &= \varepsilon^{-1} \int dv_2 e^{-S(v_2, t)/\varepsilon} (H(v_1 - v_2, S_v^{(1)}(v_1, t) - S_v^{(1)}(v_2, t)) + \varepsilon \hat{L}_{1,2}) \\ &\quad \times \rho_\varepsilon(v_1, t) \rho_\varepsilon(v_2, t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнение относительно $S(v, t)$, являющееся уравнением типа Гамильтона–Якоби, включает в себя все члены порядка $O(\varepsilon^{-1})$ в разложении (32)

$$\partial_t S(v, t) + \rho_\varepsilon(v^*, t) H(v - v^*, S^{(1)}(v, t)) = 0, \quad v^*(t) = \arg \min S(v, t), \quad (33)$$

а уравнение относительно $\rho_0(v, t)$ – все члены порядка $O(1)$.

В этом пункте для вывода уравнения переноса относительно $\rho_0(v, t)$ нам дополнительно потребуются лемма о втором члене разложения специального класса интегралов Лапласа, вытекающая из стандартного асимптотического разложения [13]:

$$\kappa_\varepsilon \int dv e^{-S(v)/\varepsilon} F(v - v^*, S_v^{(1)}(v)) = F(0, 0) + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2),$$

где $\kappa_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-3/2} (\det \sigma)^{1/2}$ – нормировочный коэффициент, $\sigma = S^{(2)}(v^*)$ – матрица вторых производных действия в единственной точке невырожденного экстремума v^* и $S(v^*) = 0$.

Пусть $F(v, p)$ – гладкая функция и $p_\lambda(v) = \lambda S_v^{(1)}(v)$, $v_\lambda = \lambda |v - v^*|$.

ЛЕММА 1. Если при всех достаточно малых $\varepsilon, \lambda \in \mathbb{R}_+$ функции

$$F_{pp}^{(2)}(v_\lambda, p_\lambda(v)), \quad F_{vp}^{(2)}(v_\lambda, p_\lambda(v)), \quad F_{vv}^{(2)}(v_\lambda, p_\lambda(v))$$

абсолютно интегрируемы с весом $|v - v^*| \exp(-S(v)/\varepsilon)$, то

$$F_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma^{-1} \mathbf{h}(\sigma)),$$

где $\sigma = S^{(2)}(v^*)$, $\mathbf{h}(\sigma) = \sigma F_{pp}^{(2)} \sigma + \sigma F_{pv}^{(2)} + F_{vp}^{(2)} \sigma + F_{vv}^{(2)}$, причем вторые производные функции F берутся в точке $v = p = 0$.

Нетрудно видеть, что правая часть уравнения относительно $\rho_0(v, t)$ содержит, во-первых, члены порядка $O(\varepsilon)$, входящие в подынтегральное выражение (32). Это

$$r_0(v) = (H(v_1 - v_2, S_v^{(1)}(v_1, t) - S_v^{(1)}(v_2, t)) \times (\rho_0(v_1) \rho_1(v_2) + \rho_1(v_1) \rho_0(v_2) + \hat{L}_{1,2} \rho_0(v_1) \rho_0(v_2))) \Big|_{v_1=v, v_2=v^*}.$$

Опуская для краткости аргумент t и учитывая, что $S_v^{(1)}(v^*, t) = 0$, получим

$$r_0(v) = -\left((b, \nabla) + \frac{1}{2} f\right) \rho_0(v) + G(\rho_0(v), \rho_1(v)), \quad (34)$$

где согласно (30), (31)

$$\begin{aligned} b &= b(v|\rho_0) = \rho_0(v^*) H_p^{(1)}(v - v^*, S^{(1)}(v)), \\ f &= f(v|\rho_0) = \rho_0(v^*) \operatorname{Tr}(H_{pp}^{(2)}(v - v^*, S^{(1)}(v)) (S^{(2)}(v) + S^{(2)}(v^*))) + l(v - v^*, S^{(1)}(v)), \\ G(\rho_0, \rho_1) &= (\rho_0(v) \rho_1(v^*) + \rho_1(v) \rho_0(v^*)) H(v - v^*, S_v^{(1)}(v)). \end{aligned}$$

Во-вторых, это члены порядка $O(\varepsilon)$ из асимптотического разложения первого члена в интеграле (32) по лемме 1

$$\begin{aligned} g(v) &= \nu(v) \rho_0(v), \quad \nu(v) = \operatorname{Tr}(\sigma^{-1} \mathbf{h}(\sigma, \rho, v)), \\ \mathbf{h}(\sigma, \rho, v) &= \sigma F_{pp}^{(2)} \sigma + \sigma F_{pv_2}^{(2)} + F_{v_2 p}^{(2)} \sigma + F_{v_2 v_2}^{(2)} \Big|_{v_1=v, v_2=v^*, p=0}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $F(v_1, v_2, p) = \rho_0(v_2) H(v_1 - v_2, S_v^{(1)}(v_1) - p)$. Собирая вместе коэффициенты (34), (35), получаем уравнение, играющее роль уравнения переноса

$$\dot{\rho}_0 = -(b, \nabla) \rho_0 + (g - f) \rho_0 + G(\rho_0, \rho_1). \quad (36)$$

Эволюция безусловного минимума $v^*(t)$ определяется из неявного уравнения $S_v^{(1)}(v^*(t), t) = 0$, т.е. $\dot{v}^* = -(S_{vv}^{(2)}(v^*, t))^{-1} S_{vt}^{(2)}(v^*, t)$. Но из уравнения Гамильтона–Якоби (33) и свойства гамильтониана $H_v^{(1)}(v^*, 0) = 0$ следует, что $S_{vt}^{(2)}(v^*, t) = -H_v^{(1)}(v^*, 0) - H_p^{(1)}(v^*, 0) S_{vt}^{(2)}(v^*, t) = 0$. Поэтому $v^*(t) = v^*(0)$.

Рассмотрим два случая, в которых уравнения (33) и (36) существенно упрощаются. Вырождение коэффициентов l и G этого уравнения в точке $v = v^*$ связано с тем, что если $p = \nabla S(v^*, t) = 0$, то

$$H|_{v=v^*} = 0, \quad H_v^{(1)}(v, 0)|_{v=v^*} = 0, \quad \{b = l = G\}|_{v=v^*} = 0$$

(см. замечание 2). Значения f и F в точке $v = v^*$ можно найти с помощью леммы 1:

$$\begin{aligned} f(v^*) &= f|_{v=v^*} = 2\rho_0 \operatorname{Tr}(\sigma_t H_{pp}^{(1)}(0, 0)), \\ F(v, 0) &= F|_{v=v^*} = \rho_0(v^*, t) \operatorname{Tr}((\sigma_t)^{-1} \mathbf{h}(\sigma_t)), \end{aligned}$$

где $\sigma_t = S^{(2)}(v^*, t)$ – матрица вторых производных действия в критической точке. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы решение уравнения Больцмана (18) допускало разложение (1), необходимо, чтобы функция $\rho_t = \rho_0(v^*, t)$ удовлетворяла обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{\rho}_t = \frac{1}{2} \rho_t^2 \operatorname{Tr}((\sigma_t)^{-1} \mathbf{h}(\sigma_t) - \sigma_t H_{pp}^{(2)}(0, 0)).$$

Используя разложение действия в окрестности критической точки

$$S(v, t) = \frac{1}{2}((v - v^*), \sigma_t(v - v^*)) + O(|v - v^*|^2), \quad \sigma_t = S^{(2)}(v^*, t),$$

и учитывая, что

$$\rho_t H(v - v^*, S_v^{(1)}(v)) = \frac{\rho_t}{2}((v - v^*, \mathbf{h}(\sigma_t)(v - v^*)) + O(|v - v^*|^3)),$$

получаем уравнение относительно матрицы вторых производных действия в критической точке: $\dot{\sigma}_t + \rho_t \mathbf{h}(\sigma_t) = 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для распределения скачков скорости выполнены условия (22)–(26). Тогда для существования разложения (1) решения уравнения Больцмана (18) необходимо, чтобы функции $S(v, t)$, σ_t , ρ_t удовлетворяли уравнению типа Гамильтона–Якоби и системе уравнений типа Рикатти относительно $\sigma_t = S_{vv}^{(2)}(v^*, t)$ и $\rho_t = \rho_0(v^*, t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_t + \rho_t \mathbf{h}(\sigma_t) &= 0, & \dot{\rho}_t - \frac{1}{2} \rho_t^2 \operatorname{Tr}(\sigma_t H_{pp}^{(2)} - 2H_{pv}^{(2)} - (\sigma_t)^{-1} H_{vv}^{(2)}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} S(v, t) + \rho_t H(v - v^*, S^{(1)}(v, t)) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\sigma|_{t=0} = S^{(2)}(v^*)$, $\rho|_{t=0} = \rho_0^{\text{reg}}(v^*, 0)$, а производные гамильтониана берутся в точке $v = p = 0$.

Система уравнений (37) позволяет найти, по крайней мере в малом, значения σ_t гессиана действия $S(v, t)$ и плотность ρ_t вдоль критической траектории $v_t^* = \arg \min S(v, t)$ и с помощью замены времени получить стандартное уравнение Гамильтона–Якоби для $S(v, t)$.

Второй важный частный случай – отсутствие экспоненциального затухания решений на носителе начального условия при $t = 0$: $S(v, 0) \equiv 0$. В этом случае $\partial_t S(v, t) \equiv 0$, $S(v, t) \equiv 0$, поскольку начало координат является точкой покоя гамильтоновой системы с гамильтонианом (28). Это свойство тривиализует оператор переноса:

$$\begin{aligned} \hat{L}_\rho &= \int dv_2 \hat{L}_{12} \rho(v_2) = \int dv_2 (H_p^{(1)}(v_1 - v_2, 0), \partial_{v_1 - v_2}) \rho(v_2) \\ &= \int dv_2 |v_1 - v_2| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} m_0(dr, |v_1 - v_2|) |r|(n_\theta, \partial_{v_1 - v_2}) \rho(v_2) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $L_1 = 0$, действие и его производные, а также коэффициенты g, ν, f, G в (34)–(36) равны 0 (см. замечание 1). Следовательно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть для распределения скачков скорости выполнены условия (22)–(26). Тогда для существования разложения (1) решения уравнения Больцмана в области, где отсутствует экспоненциальное затухание решений, необходимо, чтобы $\rho_0(v, t) = \rho_0(v)$.

В п. 8 мы используем этот факт для вывода уравнений, описывающих функцию Грина и решение задачи Коши на расстоянии $O(1)$ от носителя начального условия.

7. Асимптотика функции Грина для уравнения Больцмана. Асимптотика функции Грина линейных эволюционных уравнений туннельного типа может быть построена с помощью туннельного канонического оператора (см. [7]), сводящего асимптотику в случае особого проектирования лагранжева многообразия к интегрированию решений ОДУ, параметризованных неособыми переменными. В неособом случае асимптотическое разложение функции Грина имеет вид

$$G_\varepsilon(v, w, t) = e^{-S(v, w, t)/\varepsilon} \left(\frac{\det S_{vv}^{(2)}(v^*, w, t)}{(2\pi)^3} \right)^{1/2} \sum_k \varepsilon^k \sigma_k(v, w, t), \quad (38)$$

где $\sigma_k(v, w, 0) = \delta_{0,k}$. Рассмотренные выше уравнения (37) для $S(v, t)$, $\rho_0(v^*, t)$ переходят в следующие уравнения для $S(v, w, t)$, $\rho_0(v^*, w, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t S(v, w, t) + \rho_0(v^*, w, t) H(v - w, S_v^{(1)}(v, w, t)) &= 0, \\ \partial_t \rho_0(v^*, w, t) + \frac{\rho_0(v^*, w, t)^2}{2} \text{Tr } \mathcal{H}^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\mathcal{H}^{(2)} = H_{pp}^{(2)} S_{vv}^{(2)}(v^*, w, t) - 2H_{pv}^{(2)} - H_{vv}^{(2)} (S_v^{(2)}(v^*, w, t))^{-1}$, а вторые производные гамильтониана берутся в точке $v = p = 0$.

Оба уравнения упрощаются в шкале времени, связанной со значениями $\rho_0(v^*, w, t)$ на экстремали действия $v^*(w, t) = \arg \min_v S(v, w, t)$. Действительно, относительно переменной

$$\tau = \int_0^{t(\tau)} \rho_0(v^*, w, t) dt$$

уравнения (39) имеют вид

$$\partial_\tau S(v, w, \tau) + H(v - w, S_v^{(1)}(v, w, \tau)) = 0, \quad (40)$$

$$\partial_\tau \rho_0(v^*, w, \tau) + \rho_0(v^*, w, \tau) \frac{\text{Tr } \mathcal{H}_{pp}^{(2)}}{2} = 0, \quad (41)$$

где вторые производные гамильтониана берутся в точке $v = p = 0$, а действия – в точке (v^*, w, τ) . Теперь (40) – стандартное уравнение Гамильтона–Якоби, а (41) – линейное однородное дифференциальное уравнение. Более того, поскольку точка $p = 0$ является инвариантной относительно динамической системы с гамильтонианом $H(v, p)$, то $\arg \min S(v, w, t) = v^* = w$ и $S(w, w, t) = 0$. Поэтому

$$\rho_0(v^*, w, \tau) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\tau d\tau (H_{pp}^{(2)} S_{vv}^{(2)} - H_{vv}^{(2)} (S_v^{(2)})^{-1}) \right),$$

где гамильтониан берется в точке $(0, 0)$.

8. Асимптотика решения в области больших уклонений от носителя начального распределения. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, $\Omega = \{x : B(x) \leq 0\}$ – односвязная область в $\mathbb{R}^n$, заданная гладкой вещественной выпуклой вниз функцией $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial B(x)}{\partial \vec{n}} > 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

$\vec{n} = \vec{n}(\omega)$ – внешняя нормаль к границе в точке ω , $S(x, y)$ – гладкая выпуклая вниз неотрицательная вещественная функция такая, что для любого фиксированного x невырожденный минимум $S(x, x) = 0$ функции $S(x, y)$ достигается при $y = x$.

Асимптотическое разложение интеграла

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} dx e^{-S(x, y)/\varepsilon} \varphi(x) \quad (42)$$

во внутренних точках множества Ω хорошо известно [13]:

$$I_\varepsilon^{\text{int}}(x) = \frac{(2\pi\varepsilon)^{n/2}}{(\det S_{yy}^{(2)}(x, y))^{1/2}} (\varphi(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + o(\varepsilon)) \Big|_{y=x},$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}((S_{yy}^{(2)}(x, y))^{-1} \varphi_{xx}^{(2)}(x)).$$

Разложение этого интеграла в точках, лежащих вне замыкания множества Ω на расстоянии $O(1)$ от границы, описывается следующим образом. Предположим, что для любого $x \notin \overline{\Omega}$ существует единственная точка $\omega = \omega(x) = \arg \min_{\omega \notin \overline{\Omega}} S(x, \omega) \in \partial\Omega$ такая, что

$$S_\xi^{(1)}(x, \omega(x)) = (n(\omega), S_y^{(1)}(x, y)) \Big|_{y=\omega(x)} \neq 0, \quad (43)$$

где η – переменные, описывающие касательную плоскость $T\partial\Omega(\omega)$, а ξ – трансверсальная переменная. Напомним, что необходимым условием существования условного минимума в точке ω является ортогональность градиента действия $\text{grad}_y S(x, y) \Big|_{y \in \partial\Omega}$ векторам касательного пространства $T\partial\Omega(\omega)$.

Переходя в интеграле (42) к относительным переменным $\varepsilon^{-1/2}\eta + \varepsilon^{-1}\xi$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, и разлагая в ряд функции, регулярно зависящие от $\varepsilon^{1/2}$, в ряд Тейлора $I_\varepsilon(x) = \sum I_k(x) \varepsilon^{k/2}$, получаем его асимптотическое разложение для $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

ЛЕММА 2. Если в точке условного минимума $\omega(x)$ выполнено условие (43), то в точках $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ имеет место асимптотическое разложение интеграла (42):

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{\text{out}}(x) &= \frac{(2\pi|B_\xi^{(1)}(\omega)|)^{(n-1)/2} |S_\xi^{(1)}(x, \omega)|^{-1} \varepsilon^{(n+1)/2}}{\det(|B_\xi^{(1)}(\omega)| S_{\eta\eta}^{(2)}(x, \omega) + |S_\xi^{(1)}(x, \omega)| B_{\eta\eta}^{(2)}(\omega))^{1/2}} \\ &\quad \times (\varphi(\omega) + \varepsilon\varphi_1(x, \omega) + o(\varepsilon)) e^{-S(x, \omega)/\varepsilon} \Big|_{\omega=\omega(x)}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\varphi_1(x, \omega) = \widehat{L}(x, \omega) \varphi(\omega)$, а $\widehat{L}(x, \omega)$ – дифференциальный оператор второго порядка по переменным η касательного пространства и первого порядка по трансверсальной переменной ξ :

$$\widehat{L}(x, \omega) = \alpha(x, \omega) + a(x, \omega) \partial_\xi + (b(x, \omega), \nabla_\eta) + \frac{1}{2} (A(x, \omega) \nabla_\eta, \nabla_\eta). \quad (45)$$

Коэффициенты оператора $\widehat{L}(x, \omega)$ выражаются через моменты гауссова распределения $G_{x, \omega}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ с нулевым средним и корреляционной матрицей:

$$C(x, \omega) = |B_{\xi}^{(1)}(\omega)|^{-1} (|B_{\xi}^{(1)}(\omega)| S_{\eta\eta}^{(2)}(x, \omega) + |S_{\xi}^{(1)}(x, \omega)| B_{\eta\eta}^{(2)}(\omega)). \quad (46)$$

Обозначим через $M_{x, \omega}$ математическое ожидание относительно гауссова распределения $G_{x, \omega}$. Тогда

$$\begin{aligned} A(x, \omega) &= M_{x, \omega} \eta^{\otimes 2}, \quad a(x, \omega) = |S_{\xi}^{(1)}(x, \omega)|^{-1} + |B_{\xi}^{(1)}(\omega)|^{-1} M_{x, \omega} \operatorname{Tr}(B_{\eta\eta}^{(2)}(\omega) \eta^{\otimes 2}), \\ (b(x, \omega), z) &= M_{x, \omega} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{2|S_{\xi}^{(1)}(x, \omega)|} \left((z \otimes (S_{\xi\eta}^{(2)}(x, \omega) + B_{\xi\eta}^{(2)}(x, \omega))) \eta^{\otimes 2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{12} z \otimes (S_{\eta\eta\eta}^{(3)} + B_{\eta\eta\eta}^{(3)}) + \frac{1}{4|B_{\xi}^{(1)}(\omega)|} z \otimes (S_{\xi\eta}^{(2)} \otimes B_{\eta\eta}^{(2)} + S_{\eta\eta}^{(2)} \otimes B_{\xi\eta}^{(2)}) \right) \eta^{\otimes 4} \right), \\ \alpha(x, \omega) &= \frac{S_{\xi\xi}^{(2)}(x, \omega)}{2|S_{\xi}^{(1)}(x, \omega)|} + M_{x, \omega} \operatorname{Tr} \left(\frac{S_{\xi\xi}^{(2)} \otimes B_{\eta\eta}^{(2)} + S_{\eta\eta}^{(2)} \otimes B_{\xi\xi}^{(2)}}{2|S_{\xi}^{(1)}(x, \omega)| B_{\xi}^{(1)}(\omega)} \eta^{\otimes 2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{1}{24} (S_{\eta\eta\eta\eta}^{(4)}(x, \omega) + B_{\eta\eta\eta\eta}^{(4)}(\omega)) + \frac{(S_{\xi\eta\eta}^{(3)}(x, \omega) + B_{\xi\eta\eta}^{(3)}(\omega)) \otimes B_{\eta\eta}^{(2)}(\omega)}{4|B_{\xi}^{(1)}(\omega)|} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{8|B_{\xi}^{(1)}(\omega)|^2} (S_{\xi\xi}^{(2)}(x, \omega) + B_{\xi\xi}^{(2)}(\omega)) (B_{\eta\eta}^{(2)}(\omega) \otimes B_{\eta\eta}^{(2)}(\omega)) \right) \eta^{\otimes 4} \right), \quad (47) \end{aligned}$$

где $\eta^{\otimes 2}$ и $\eta^{\otimes 4}$ – матрицы ранга 1 с независимыми случайными компонентами $\eta_i \eta_j$ и $\eta_i \eta_j \eta_k \eta_l$ ($1 \leq i, j, k, l \leq n-1$), имеющими гауссово распределение, заданное корреляционной матрицей (46). *Тензорным произведением матриц* $A = A_{ijkl}$ и $B = B_{ijkl}$ называется матрица $C = A \otimes B$ с коэффициентами $C_{ijmn} = \sum_{k,l} A_{ijkl} B_{klmn}$, а *следом* $\operatorname{Tr}(AB)$ – сумма $\sum_{i,j,k,l} A_{ijkl} B_{kl ij}$.

Формулы (44)–(47) уточняют известные результаты [13] об асимптотике интегралов Лапласа в случае, когда $S_v^{(1)} \neq 0$ в точке условного минимума действия. Главный член разложения (44) известен в более общей ситуации (см. [14], [15], а также [16] для интегралов Лапласа в банаховых пространствах).

Заметим также, что если $x \rightarrow \partial\Omega$, то $I_{\varepsilon}(x) = O(\varphi(x)\varepsilon^{n/2})$. С другой стороны, если $x \rightarrow \partial\Omega$, то $S_{\xi}^{(1)}(x, \omega) \rightarrow 0$; при этом условие (43) нарушается. Таким образом, асимптотическое разложение (47) справедливо в точках, отстоящих от $\partial\Omega$ на конечное расстояние.

В качестве примера рассмотрим асимптотику решения задачи Коши для параболического уравнения

$$\left(-\varepsilon \partial_t + \frac{1}{2} \Delta + (V, \nabla) \right) u(x, t) = 0.$$

Для простоты будем считать, что $\supp u|_{t=0} = \Omega = \{x : |x| \leq R\}$ и $x, V \in \mathbb{R}^2$. Тогда асимптотика решения может быть найдена из явного интегрального представления решения с помощью леммы 2:

$$u(x, t) = (2\pi t\varepsilon)^{-1} \int_{\Omega} dy e^{-|x(t)-y|^2/(2t\varepsilon)} u_0(y), \quad x(t) = x + Vt.$$

Если $x + Vt \in \Omega = \{y : |y| < R\}$, то

$$u_\varepsilon^{\text{int}}(x, t) = \left(1 + \frac{\varepsilon t}{2} \Delta + O(\varepsilon^2)\right) u_0|_{x=x(t)}. \quad (48)$$

Если $x + Vt \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega} = \{y : |y| \leq R\}$, то $u_\varepsilon^{\text{ext}}(x, t) = U(x(t), t)$, где

$$\begin{aligned} U(x, t) &= e^{-(|x|-R)^2/(2\varepsilon t)} \left(\frac{tR}{2\pi|x|} \right)^{1/2} \frac{1}{|x|-R} \left(u_0 \left(\frac{Rx}{|x|} \right) + \varepsilon U_1(x, t) + O(\varepsilon^2) \right), \\ U_1(x, t) &= \left(1 - 10 \frac{R}{|x|} + 3 \left(\frac{R}{|x|} \right)^2 - \frac{t}{4(|x|-R)^2} \right) u_0 \left(\frac{Rx}{|x|} \right) \\ &\quad + \frac{t}{(|x|-R)^2} \left(1 + \left(\frac{R}{|x|} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{R}{|x|} \right) \left(\frac{x_1}{|x|} \partial_{y_1} + \frac{x_2}{|x|} \partial_{y_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{R}{|x|} \right)^{3/2} \left(\frac{x_1}{|x|} \partial_{y_2} - \frac{x_2}{|x|} \partial_{y_1} \right)^2 \right) u_0(y)|_{y=Rx/|x|}. \end{aligned} \quad (49)$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(\frac{x_1}{|x|} \partial_{y_1} + \frac{x_2}{|x|} \partial_{y_2} \right) \Big|_{y=Rx/|x|}$$

— производная по нормали к границе, а

$$\left(\frac{x_1}{|x|} \partial_{y_2} - \frac{x_2}{|x|} \partial_{y_1} \right)^2 \Big|_{y=Rx/|x|}$$

— производная второго порядка по касательной к границе.

Разложения (48), (49) показывают, что носитель главной части асимптотики решения переносится вдоль траекторий гамильтоновой системы $\dot{q} = H_p(q, 0)$, $\dot{p} = -H_q(q, 0)$ с гамильтонианом $H(q, p)$, отвечающим параболическому уравнению (см. [7], [15]). В данном случае $H(q, p) = |p|^2/2 - (V, p)$ и эта система имеет вид $\dot{q} = p - V$, $\dot{p} = 0$, $q(t) = x$, $p(0) = 0$. Действие $S(x, t)$, определяющее экспоненциально убывающую часть решения, удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби и является решением двухточечной вариационной задачи с граничными условиями: $q(t) = x$, $q(0) \in \partial\Omega(t)$, $p(0) \perp \partial\Omega(t)$, $(p(0), n) > 0$, где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega(t)$ в точке $q(0)$. Аналогичная ситуация имеет место и в случае уравнения Больцмана.

Используя метод построения асимптотики решений линейных уравнений туннельного типа в области больших уклонений от носителя начального условия [7], [15], [8], будем искать решение задачи Коши для уравнения (18) с финитным и гладким на носителе Ω начальным условием $p_0(v)$ в виде

$$\rho_\varepsilon(v, t) = \int_\Omega dw G_\varepsilon(v, w, t) \rho_0(w),$$

где $G_\varepsilon(v, w, t)$ — функция Грина (38), отвечающая начальному условию $\rho_0(v)$.

Как было отмечено, для гамильтонианов, обладающих свойством $H_p^{(1)}(v, 0) = 0$, самосогласованная динамика главной части решения $\rho_\varepsilon^{\text{int}}(v, t)$ оказывается тривиальной: $\rho_\varepsilon^{\text{int}}(v, t) = \rho_0(v) + O(\varepsilon)$, $\Omega(t) = \Omega$.

Теперь подстановка главного члена решения в уравнение (32) и лемма 2 дают уравнение Гамильтона–Якоби для действия в области больших уклонений:

$$\partial_t S(v, w, t) + \int_{\Omega} dv_2 \rho_0^{\text{int}}(v_2) H(v - v_2, \nabla_w S(v, w, t)) = 0,$$

а главный член логарифмической асимптотики определяется решением этого уравнения в точке $w \in \partial\Omega$, $w = \arg \min S(v, w, t)$. Если выполнено условие невырожденности (29), то существует функция Лагранжа $\mathcal{L}(v, \dot{v}) = p\dot{v} - \mathcal{H}(v, p)$, $\dot{v} = \mathcal{H}_p^{(1)}(v, p)$, отвечающая гамильтониану

$$\mathcal{H}(v, p) = \int_{\Omega} dv_0 \rho_0(v_0) H(v - v_0, p),$$

и по крайней мере для всех достаточно малых $t \leq T(v, w)$ существует решение двухточечной задачи для соответствующей системы Гамильтона (см. [3], [7]):

$$\dot{v}(\tau) = \mathcal{H}_p^{(1)}(v(\tau), p(\tau)), \quad \dot{p}(\tau) = -\mathcal{H}_v^{(1)}(v(\tau), p(\tau)), \quad v(0) = v, \quad v(t) = w.$$

При этом главный член логарифмической асимптотики равен

$$S(v, t) = \min_{w \in \partial\Omega} S(v, w, t), \quad S(v, w, t) = \int_0^t d\tau \mathcal{L}(v(\tau), \dot{v}(\tau)).$$

Таким образом, имеет место теорема о логарифмической асимптотике решения задачи Коши для уравнения Больцмана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть для гамильтониана $\mathcal{H}(v, p)$ выполнено условие невырожденности (29) и для распределения скачков скорости выполнены условия (22)–(24). Тогда главный член логарифмической асимптотики решения уравнения Больцмана (18) в области больших уклонений равен $S(v, t)$, где $S(v, t)$ – решение уравнения Гамильтона–Якоби

$$\partial_t S(v, t) + \int_{\Omega} dv_0 \rho_0(v_0) H(v - v(v_0, t), \nabla_w S(v, t)) = 0,$$

а начальное и терминальное лагранжевы многообразия Λ_0 и Λ_t , выделяющие единственное решение этого уравнения при всех достаточно малых t , имеют вид $\Lambda_t = \{v, p \in \mathbb{R}^3\}$, $\Lambda_0 = \{v(0) \in \partial\Omega(t), p(0) \perp T\partial\Omega(t)\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Braun W., Hepp K. The Vlasov dynamics and its fluctuations in the l/N limit of interacting classical particles // *Comm. Math. Phys.* 1977. V. 56. P. 101–113.
- [2] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. An asymptotic formula for the N -particle density function as $N \rightarrow \infty$ and violation of the chaos hypothesis // *Russian J. Math. Phys.* 1994. V. 2. № 2. P. 217–234.
- [3] Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1980.
- [4] Tanaka H. Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*. 1978. V. 46. P. 67–105.
- [5] Лукшин Л. В. Стохастические алгоритмы математической теории пространственно неоднородного уравнения Больцмана // *Матем. моделирование*. 1989. Т. 1. № 2. С. 151–160.
- [6] Арсеньев А. А. Лекции о кинетических уравнениях. М.: Наука, 1992.
- [7] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
- [8] Маслов В. П. Асимптотика решений N -частичных уравнений Колмогорова–Феллера и асимптотика решения уравнения Больцмана в области больших уклонений // *Матем. заметки*. 1995. Т. 58. № 5. С. 694–709.
- [9] Бэдсел И., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоиздат, 1989.
- [10] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
- [11] Чеботарёв А. М. Достаточные условия регулярности скачкообразных марковских процессов // *Теория вероятн. и ее применения*. 1988. Т. 33. № 1. С. 25–39.
- [12] Ландау Л. Д. Кинетические уравнения в случае кулоновского взаимодействия. Т. 1. М.: Наука, 1969.
- [13] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [14] Skinner L. A. Note on the asymptotic behavior of multidimensional Laplace integrals // *SIAM J. Math. Anal.* 1980. V. 11. № 5. P. 911–917.
- [15] Маслов В. П., Фроловичев С. М., Черных С. И. Точная асимптотика больших уклонений решений граничных задач для дифференциальных уравнений // *Докл. АН СССР*. 1987. Т. 296. № 2. С. 275–279.
- [16] Питербарг В. И., Фатафлов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // *УМН*. 1995. Т. 50. № 6. С. 58–150.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: alex@cheb.phys.msu.su

Поступило
03.03.95