Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Мельников, Конечно порожденные подгруппы свободных проконечных групп и некоторых групп Галуа, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 95–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:38:12

УДК 512.546+512.623

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ ПРОКОНЕЧНЫХ ГРУПП И НЕКОТОРЫХ ГРУПП ГАЛУА

О. В. Мельников

Доказывается, что для (замкнутой) подгруппы H свободной проконечной или свободной проразрешимой группы F ранга $\text{rank } F > 1$ такой, что H содержит нетривиальную достижимую в F подгруппу N , выполнено $\text{rank } F < \infty$ и $[F : H] < \infty$.

Библиография: 10 названий.

Введение. Согласно одной теореме Карраса и Солитера 1957 года нетривиальный нормальный делитель N (дискретной) свободной группы Φ не может содержаться в конечно порожденной подгруппе бесконечного индекса в Φ . Позднее, в статье [1] ими было дано простое доказательство принадлежащего Гринбергу обобщения этого утверждения на субнормальные подгруппы N , основанное на следующей теореме М. Холла: конечно порожденная подгруппа свободной группы Φ является свободным сомножителем некоторой подгруппы конечного в Φ индекса.

В настоящей работе доказывается, что для (замкнутых) подгрупп свободных проконечных групп имеет место существенно более сильное утверждение. Чтобы не перегружать введение определениями, сформулируем этот результат лишь для наиболее употребительных групп (полная формулировка – теорема 6 – в п. 4).

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – свободная проконечная или свободная проразрешимая группа ранга $\text{rank } F > 1$. Если конечно порожденная подгруппа H содержит нетривиальную достижимую в F подгруппу N , то $\text{rank } F < \infty$ и индекс $[F : H] < \infty$.

Достижимыми подгруппами называются здесь пересечения членов убывающих трансфинитных нормальных рядов. Точное определение и простейшие свойства этих подгрупп см. в п. 1.

Отметим, что в абстрактной теории групп утверждение, аналогичное теореме 1, неверно. В самом деле, из теоремы Куроша легко вытекает, что свободный сомножитель является достижимой подгруппой.

Так как в про- p -группах все подгруппы являются достижимыми, то наиболее общим про- p -вариантом теоремы 1 является следующий точный аналог теоремы из [1].

ТЕОРЕМА 2. Если конечно порожденная подгруппа H свободной про- p -группы F_p содержит нетривиальную субнормальную в F_p подгруппу, то $\text{rank } F_p < \infty$ и $[F_p : H] < \infty$.

Бесконечная порожденность достижимых подгрупп свободных проконечных групп, т.е. теорема 1 в частном случае $H = N$, была ранее установлена в [2, следствие 3.5]

(см. также теорему 3.5 в [3]). В статье [4] теорема 2 для $N \triangleleft F_p$ была по аналогии с [1] выведена из практически очевидного про- p -варианта теоремы Холла.

Для подгрупп свободных проконечных групп аналог теоремы Холла не имеет места. В настоящей статье применяются методы, подобные использовавшимся автором в работах [2] и [3]. Это дало возможность исследовать свойства подгрупп достаточно широкого класса проконечных групп, которые названы здесь шольцевыми.

Определение и некоторые общие утверждения о шольцевых группах содержатся в п. 2. Впервые эти группы были выделены Хёксманом [5] под названием “просторные” (geräumig) в связи с результатами, восходящими к одной работе А. Шольца 1929 года об обратной задаче Галуа над полем рациональных чисел. *Шольцевость* абсолютной группы Галуа $G(\mathbb{k}^{\text{sep}}/\mathbb{k})$ поля $\mathbb{k}$ эквивалентна тому, что из разрешимости в алгебрах Галуа задачи погружения над $\mathbb{k}$ с абелевым ядром вытекает ее разрешимость в полях.

Полученные утверждения о конечно порожденных подгруппах шольцевых групп содержатся в п. 3. Именно эти результаты, а точнее теорема 4 и следствия 1 и 2, представляются автору основными в данной статье.

Согласно [6] шольцевыми являются абсолютные группы Галуа гильбертовых полей. Это позволяет в качестве непосредственных следствий из результатов п. 3 получить утверждения о конечно порожденных подгруппах ряда групп Галуа над такими полями. Полную их формулировку см. в п. 4; здесь же мы ограничимся несколькими типичными группами.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbb{k}$ – гильбертово поле и имеет место одно из следующих высказываний:

- 1) N – нетривиальная достижимая подгруппа группы G , являющейся либо абсолютной группой Галуа $G(\mathbb{k}^{\text{sep}}/\mathbb{k})$, либо группой Галуа $G(\mathbb{k}^{\text{solv}}/\mathbb{k})$ максимального разрешимого расширения $\mathbb{k}$;
- 2) N – нетривиальная субнормальная подгруппа группы $G = G(\mathbb{k}^{(p)}/\mathbb{k})$ максимального p -расширения поля $\mathbb{k}$.

Тогда N не может содержаться ни в какой конечно порожденной подгруппе G .

Утверждение этой теоремы было ранее получено в [7, теорема 15.10] лишь для случая, когда N – нормальный делитель абсолютной группы Галуа $G(\mathbb{k}^{\text{sep}}/\mathbb{k})$, с помощью сильного результата Вейсауэра о гильбертовости некоторых расширений гильбертовых полей.

Определения и свойства гильбертовых полей и их групп Галуа можно найти в [7]. Там же содержатся общие результаты о проконечных группах. В этой статье используются стандартные обозначения и терминология. В частности, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$ обозначают кольца целых и целых p -адических чисел, а также их аддитивные группы. Все подгруппы проконечных групп предполагаются замкнутыми, а гомоморфизмы непрерывными.

1. Достижимые и субнормальные подгруппы проконечных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подгруппа H проконечной группы G называется *достижимой*, если существует ряд подгрупп

$$G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_\lambda \supseteq N_{\lambda+1} \supseteq \cdots \supseteq N_\sigma = H, \quad (1)$$

занумерованных трансфинитными числами, со следующими свойствами:

- 1) $N_{\lambda+1} \triangleleft N_\lambda$ для всех $\lambda < \sigma$;

2) $N_\mu = \bigcap_{\lambda < \mu} N_\lambda$ для предельных $\mu \leq \sigma$.

Если для H существует такой ряд конечной длины, подгруппа H называется *субнормальной*. В этом случае обозначим через $s(H, G)$ наименьшую из длин s субнормальных рядов

$$G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_s = H. \quad (2)$$

Условимся писать $s(H, G) = \infty$, если подгруппа H достижима, но не субнормальна в G . Это обозначение согласуется с тем, что в силу предложения 1 для достижимой подгруппы H всегда существует ряд (1) с $\sigma = \omega_0$.

ЛЕММА 1. Пусть H – достижимая подгруппа группы G . Тогда

- a) если K – достижимая подгруппа H , то K достижима в G ;
- b) для любой подгруппы $M \subseteq G$ пересечение $H \cap M$ достижимо в M , причем $s(H \cap M, M) \leq s(H, G)$;
- c) образ $\varphi(H)$ – достижимая подгруппа в $\varphi(G)$ для любого гомоморфизма φ из G в проконечную группу и $s(\varphi(H), \varphi(G)) \leq s(H, G)$;
- d) для любого эпиморфизма $\varphi: E \rightarrow G$ прообраз $\varphi^{-1}(H)$ достижим в E и $s(\varphi^{-1}(H), E) = s(H, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а), б) и д) очевидным образом вытекают из определений. Единственное нетривиальное место в доказательстве с) – проверка свойства 2) из определения 1 ряда $\varphi(N_\lambda)$. Здесь используется компактность G , приводящая к следующему общему утверждению.

ЛЕММА 2. Если $M_i, i \in I$, – фильтрующееся по убыванию семейство замкнутых подмножеств компактного пространства G , то

$$\varphi\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varphi(M_i)$$

для любого непрерывного отображения φ из G в хаусдорфово пространство.

Для произвольной подгруппы H группы G определяется ее *стандартный субнормальный ряд*, состоящий из подгрупп $H_n^G, n \geq 0$, где $H_0^G = G$, а для $n \geq 1$ H_n^G – порожденный подгруппой H нормальный делитель в H_{n-1}^G .

ЛЕММА 3. а) Образ при эпиморфизме $\varphi: E \rightarrow G$ стандартного субнормального ряда подгруппы $L \subseteq E$ является стандартным субнормальным рядом подгруппы $\varphi(L)$ в группе G .

б) Если H – субнормальная подгруппа G , то $H_{s-1}^G \neq H_s^G = H$, где $s = s(H, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно. Утверждение б) вытекает из легко доказываемого по индукции включения $H_n^G \subseteq N_n$ для произвольного субнормального ряда (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Следующие свойства подгруппы H группы G эквивалентны:

- 1) H достижима в G ;
- 2) для представления группы G в виде проективного предела $G = \lim_{\leftarrow} G_{\alpha}$ своих конечных факторгрупп образы H_{α} подгруппы H субнормальны в G_{α} ;
- 3) H совпадает с пересечением членов своего стандартного субнормального ряда: $H = H_{\omega_0}^G$, где $H_{\omega_0}^G = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n^G$.

Эквивалентность 1) $\iff$ 2) можно дополнить равенством

$$s(H, G) = \sup\{s(H_{\alpha}, G_{\alpha}) \mid \alpha\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) вытекает из утверждения с) леммы 1, а 3) $\implies$ 1) тривиальна. Докажем, что 2) $\implies$ 3). Пусть φ_{α} – канонический эпиморфизм G на G_{α} . По предположению $\varphi_{\alpha}(H) = (\varphi_{\alpha}(H))_{s_{\alpha}}^{G_{\alpha}} = (\varphi_{\alpha}(H))_{\omega_0}^{G_{\alpha}}$. С другой стороны, из утверждения а) леммы 3 и леммы 2 вытекает, что $\varphi_{\alpha}(H_{\omega_0}^G) = (\varphi_{\alpha}(H))_{\omega_0}^{G_{\alpha}}$. Совпадение образов подгрупп H и $H_{\omega_0}^G$ при всех φ_{α} дает требуемое для получения 3) равенство.

ЗАМЕЧАНИЯ. а) Эквивалентность 1) $\iff$ 3) в предложении 1 можно формально усилить до следующего утверждения: $H_{\omega_0}^G$ – наименьшая достижимая подгруппа G , содержащая заданную подгруппу H из G .

б) Достижимые подгруппы проконечных групп как аналог субнормальных подгрупп в конечных группах были введены в заметке [2], являющейся продолжением статьи [3]. Адекватность этого понятия подтверждается, например, эквивалентностью 1) $\iff$ 2) из предложения 1. Она позволяет с помощью стандартных приемов переносить на достижимые подгруппы проконечных групп многие утверждения о субнормальных подгруппах в конечных группах. В частности, из известных результатов Виландта следует, что для любого семейства достижимых подгрупп проконечной группы G достижимыми в G будут также их пересечение и порожденная ими подгруппа.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение такого же типа, вытекающее из нормализаторного свойства (конечных) нильпотентных групп.

ЛЕММА 4. В про-nilпотентной группе произвольная подгруппа достижима.

Пусть D – конечная группа, A – левый модуль над D . Обозначим символом $[D, A]$ подгруппу в A , порожденную элементами вида $[d, a] = d \cdot a - a$, где $d \in D$, $a \in A$.

Так как $[D, A]$ является, очевидно, подмодулем A , можно определить по индукции убывающую последовательность подмодулей в A :

$$[D, (0), A] = A, \quad [D, (k), A] = [D, [D, (k-1), A]]$$

для $k \geq 1$. Отметим следующее очевидное свойство этих подмодулей:

если A – прямая сумма D -модулей A_j , $j = 1, \dots, t$, то $[D, (k), A]$ – прямая сумма подмодулей $[D, (k), A_j]$, $j = 1, \dots, t$.

ЛЕММА 5. а) Если A – нетривиальный простой D -модуль, то $[D, (k), A] = A$ для всех $k \geq 0$.

б) Для произвольного $k \geq 0$ существует натуральное число $n(D, k)$ такое, что для D -модуля A , изоморфного рассматриваемому как левый модуль групповому кольцу $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}[D]$, при $t \geq n(D, k)$ имеем $[D, (k), A] \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Проведем индукцию по $k \geq 0$. Нетривиальность действия D на A дает существование элемента $a \in A = [D, (k-1), A]$ такого, что $d \cdot a - a \neq 0$ для некоторого $d \in D$. Поэтому $[D, (k), A]$ как ненулевой подмодуль простого модуля должен совпасть с A .

б) Рассмотрим сначала случай, когда $D = \langle t \rangle$ – циклическая группа порядка $q > 1$. Пусть σ – эпиморфизм кольца многочленов $\mathbb{Z}[X]$ на групповое кольцо $\mathbb{Z}[D]$, заданный равенством $\sigma(X) = t$. Его ядром является главный идеал $(X^q - 1)$, не содержащий, очевидно, многочлена $(X - 1)^k$. Следовательно, в кольце $\mathbb{Z}[D]$ элемент

$$(t - 1)^k = b_0 + b_1 t + \dots + b_{q-1} t^{q-1} \neq 0.$$

Пусть, например, $b_j \neq 0$. Положим $n(D, k) = |b_j| + 1$. Рассматривая для произвольного $m \geq n(D, k)$ естественный эпиморфизм $\mathbb{Z}[D]$ на $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$, получаем, что в последнем кольце

$$(t - 1)^k = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 t + \dots + \bar{b}_{q-1} t^{q-1} \neq 0.$$

Осталось лишь заметить, что $(t - 1)^k = t(t - 1)^{k-1} - (t - 1)^{k-1}$ принадлежит подмодулю $[D, (k), A]$.

Общий случай сводится к рассматриваемому ввиду того, что для произвольной циклической подгруппы C данной конечной группы D модуль $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$, рассматриваемый как C -модуль, изоморфен прямой сумме $[D : C]$ экземпляров модуля $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[C]$ и, кроме того, $[C, (k), A] \subseteq [D, (k), A]$.

Пусть A – абелев нормальный делитель конечной группы E , $D = E/A$. Сопряжение в E определяет на A структуру D -модуля: $d \cdot a = gag^{-1}$, где $d = gA \in E/A$, $a \in A$.

ЛЕММА 6. Пусть во введенных выше обозначениях M – подгруппа E такая, что $MA = E$. Тогда для любого $k \geq 0$

$$M_k^E \supseteq [D, (k), A].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по $k \geq 0$. Случай $k = 0$ тривиален. Пусть $k \geq 1$. Ввиду того, что $MA = E$, произвольный элемент $d \in D$ имеет вид tA для некоторого $t \in M$. Поэтому порождающие $[D, (k), A]$ элементы $[d, a]$ записываются как $tat^{-1}a^{-1}$, где $t \in M$, $a \in [D, (k-1), A]$. Так как по предположению $a \in M_{k-1}^E$, то $at^{-1}a^{-1} \in M_k^E$, откуда получаем, что все $[d, a] \in M_k^E$.

2. Шольцевы группы. Пусть расширение конечных групп

$$1 \rightarrow A \rightarrow E \xrightarrow{\delta} D \rightarrow 1 \quad (3)$$

расщепляется (т.е. в E существует подгруппа D_1 , которая при δ изоморфно отображается на D). Условимся в этом случае отождествлять E с полупрямым произведением $A \rtimes D$, а гомоморфизм δ – с естественной проекцией.

Скажем, что проконечная группа G обладает свойством поднятия эпиморфизмов относительно расширения (3), если для любого эпиморфизма $\varphi: G \rightarrow D$ существует эпиморфизм $\psi: G \rightarrow E$ такой, что $\delta\psi = \varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Проконечная группа G называется π -шольцевой, где π – некоторое множество простых чисел, если G обладает свойством поднятия эпиморфизмов относительно произвольного расщепляющегося расширения (3), ядро которого A – абелева π -группа.

Просто шольцевыми назовем π_0 -шольцевы группы, где π_0 – множество всех простых чисел. В случае $\pi = \{p\}$ π -шольцевые группы будем называть p -шольцевыми. Ясно, что при $\sigma \subseteq \pi$ каждая π -шольцева группа является и σ -шольцевой.

ЛЕММА 7. Для того чтобы проконечная группа G была π -шольцевой, необходимо и достаточно, чтобы для любой степени p^k простого числа из π и любой открытой подгруппы U из G существовала пара $W \subset V$ открытых нормальных делителей G такая, что $V \subseteq U$, расширение

$$1 \rightarrow V/W \rightarrow G/W \rightarrow G/V \rightarrow 1$$

расщепляется и V/W – нетривиальная абелева группа, являющаяся свободным $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[G/V]$ -модулем для некоторого m , делящегося на p^k .

Отметим, что D -модуль A является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$ -модулем, если экспонента группы A делит m . Если A изоморфен модулю $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$, то он называется свободным $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$ -модулем ранга r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть V – произвольный открытый нормальный делитель G , содержащийся в U . Подняв канонический эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow G/V$ до эпиморфизма ψ группы G на $E = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}[G/V] \rtimes (G/V)$, положим $W = \text{Ker } \psi$.

Достаточность. 1) Докажем сначала, что группа G обладает свойством поднятия эпиморфизмов относительно расщепляющегося расширения (3), в котором D -модуль A порождается одним элементом и имеет порядок $|A| = p^k$ для $p \in \pi$.

Пусть φ – эпиморфизм G на D , $U = \text{Ker } \varphi$. По предположению в U найдутся открытые нормальные делители $W \subset V$ группы G такие, что $G/W = (V/W) \rtimes \overline{G}$, где V/W – свободный $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\overline{G}]$ -модуль некоторого ранга $r \geq 1$ и m делится на p^k . Используя эпиморфизм $\gamma: \overline{G} \rightarrow D$, соответствующий каноническому G/V на G/U , рассматриваем A как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\overline{G}]$ -модуль с одним образующим. В силу свободы V/W существует модульный эпиморфизм $\beta: V/W \rightarrow A$, который вместе с γ определяет эпиморфизм полупрямого произведения G/W на $E = A \rtimes D$. Композит ψ построенного эпиморфизма и канонического G на G/W является, очевидно, искомым поднятием φ .

2) Пусть теперь в расщепляющемся расширении (3) $A = \bigoplus_{i=1}^t A_i$, где A_i – порожденный единственным элементом $\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}[D]$ -модуль, $p_i \in \pi$, $i = 1, \dots, t$.

Полученный в части 1) доказательства результат позволяет поднять эпиморфизм группы G на D до эпиморфизма на E , представив $E = A \rtimes D$ в виде $E = A_t \rtimes E'$, где $E' = (\bigoplus_{i=1}^{t-1} A_i) \rtimes D$, с помощью индукции по t .

В частности, так как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D] \cong \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}/p_j^{k_j}\mathbb{Z}[D]$ для $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, $p_j \in \pi$, то группа G обладает свойством поднятия эпиморфизмов относительно расщепляющихся расширений (3), в которых A – свободный $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$ -модуль произвольного ранга.

3) Рассмотрим, наконец, случай произвольного расщепляющегося расширения (3). Пусть D -модуль A порождается r элементами, m – экспонента A . Взяв произвольный эпиморфизм свободного $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[D]$ -модуля A_0 ранга r на A , построим эпиморфизм

$\tau: E_0 \rightarrow E$, где $E_0 = A_0 \rtimes D$. Тогда $\psi = \tau\psi_0$ – искомое поднятие заданного эпиморфизма $\varphi: G \rightarrow D$ до эпиморфизма на E , если ψ_0 – существующее в силу доказанного в части 2) поднятие φ до эпиморфизма на E_0 . Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. а) *Группа G является π -шольцевой тогда и только тогда, когда G p -шольцева для каждого $p \in \pi$.*

б) *Открытая подгруппа π -шольцевой группы является π -шольцевой.*

с) *Пусть G – π -шольцева группа, N – нормальный делитель G , не имеющий факторгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ни для какого $p \in \pi$. Тогда G/N – также π -шольцева группа.*

д) *Пусть G – π -шольцева группа, H – подгруппа G такая, что ее индекс (сверхнатуральное, вообще говоря, число $[G : H]$) не делится ни на одно $p \in \pi$. Тогда H – также π -шольцева группа.*

В частности, силовская про- p -подгруппа p -шольцевой группы является p -шольцевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Немедленно вытекает из леммы 7.

б) Проверим, что открытая подгруппа H π -шольцевой группы G удовлетворяет критерию леммы 7. Пусть U – открытая подгруппа в H . Так как U открыта и в G , по лемме 7 в G найдутся открытые нормальные делители $W \subset V \subseteq U$ такие, что $G/W = (V/W) \rtimes \overline{G}$, где $\overline{G} \cong G/V$, V/W – свободный $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\overline{G}]$ -модуль ранга $r \geq 1$. Тогда $H/W = (V/W) \rtimes \overline{H}$, причем V/W – свободный $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\overline{H}]$ -модуль ранга $[G : H]r$.

с) Пусть заданы расщепляющееся расширение (3) с абелевой π -группой A и эпиморфизм $\varphi: G/N \rightarrow D$. В силу π -шольцевости группы G существует поднятие $\psi_0: G \rightarrow E$ эпиморфизма $\varphi_0 = \varphi\omega$, где ω – канонический эпиморфизм G на G/N . Покажем, что $N \subseteq \text{Ker } \psi_0$.

Из $\delta\psi_0(N) = \varphi_0(N) = 1$ вытекает, что $\psi_0(N)$ содержится в $A = \text{Ker } \delta$ и, следовательно, является абелевой π -группой. Поэтому если бы образ $\psi_0(N)$ был нетривиален, то N имел бы факторгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для некоторого $p \in \pi$.

Таким образом, ψ_0 можно представить в виде $\psi_0 = \psi\omega$ для некоторого эпиморфизма $\psi: G/N \rightarrow E$. В силу сюръективности ω из равенства $\delta\psi_0 = \varphi_0$ вытекает требуемое равенство $\delta\psi = \varphi$.

д) Прежде всего для заданного эпиморфизма $\varphi: H \rightarrow D$ построим содержащую H открытую подгруппу U группы G и эпиморфизм $\varphi^*: U \rightarrow D$, ограничение которого на H совпадает с φ .

Для этого возьмем в G открытый нормальный делитель W такой, что $W \cap H \subseteq \text{Ker } \varphi$. Тогда $\varphi = \overline{\varphi}\sigma$, где $\sigma: H \rightarrow H/W \cap H$ – канонический эпиморфизм, $\overline{\varphi}$ – некоторый эпиморфизм $H/W \cap H$ на D . Положим $U = HW$ и $\varphi^* = \overline{\varphi}\gamma\tau$, где $\tau: U \rightarrow U/W$ – канонический эпиморфизм, γ – изоморфизм U/W на $H/W \cap H$.

Согласно утверждению б) предложения группа U π -шольцева. Пусть $\psi^*: U \rightarrow E$ – поднятие φ^* относительно расширения (3). Покажем, что ограничение $\psi = \psi^*|_H$ – искомое поднятие эпиморфизма φ относительно расширения (3). Для этого достаточно лишь проверить, что ψ – эпиморфизм, так как равенство $\delta\psi = \varphi$ очевидно. Из этого равенства следует, в частности, что индекс $[E : \psi(H)]$ делит порядок A и поэтому может делиться только на простые числа из π . С другой стороны, $[E : \psi(H)]$ делит индекс $[G : H]$, не имеющий по условию простых делителей из π . Таким образом, $[E : \psi(H)] = 1$, что и требовалось доказать.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 4. Пусть H – конечно порожденная подгруппа p -шольцевой группы G . Тогда

- а) H не содержит нетривиальных субнормальных в G подгрупп;
- б) всякая содержащаяся в H достижимая подгруппа G является про- p -группой.

Большого, чем содержится в утверждении б) теоремы, о достижимых подгруппах p -шольцевых групп сказать нельзя. В самом деле, p -шольцева группа может быть про- p -группой, а в про- p -группе каждая подгруппа достижима (см. лемму 4).

Ситуация принципиально меняется в группах, являющихся одновременно p - и q -шольцевыми для двух различных простых чисел.

СЛЕДСТВИЕ 1. Конечно порожденная подгруппа π -шольцевой для $|\pi| \geq 2$ группы G не содержит нетривиальных достижимых в G подгрупп.

Доказательство немедленно вытекает из утверждения б) теоремы 4 ввиду того, что нетривиальная группа не может одновременно быть про- p - и про- q -группой для $p \neq q$ из π .

СЛЕДСТВИЕ 2. а) p -шольцева группа не имеет нетривиальных абелевых субнормальных подгрупп.

б) π -шольцева для $|\pi| \geq 2$ группа не имеет нетривиальных пронильпотентных достижимых подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение б). Пусть N – нетривиальная пронильпотентная достижимая подгруппа π -шольцевой группы G . Тогда для произвольного элемента $h \neq 1$ из N циклическая подгруппа $H = \langle h \rangle$ достижима в силу леммы 4 в N и, следовательно, в G (в силу утверждения а) леммы 1). Получаем противоречие со следствием 2.

Для доказательства утверждения а) заменяем в предыдущем рассуждении пронильпотентность и достижимость на абелевость и субнормальность соответственно и приходим к противоречию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. 1) Предположим, что теорема неверна. Это означает существование нетривиальной достижимой в G подгруппы N , содержащейся в H , для которой справедливо одно из следующих утверждений:

- а) H – не про- p -группа;
- б) H – про- p -группа и $s = s(N, G) < \infty$.

Группа N является проективным пределом ее образов в конечных факторгруппах G . Поэтому в случае а) существует открытый нормальный делитель U группы G такой, что в образе $\sigma(N)$ при каноническом эпиморфизме σ группы G на G/U найдется подгруппа D , порядок которой взаимно прост с p . В случае б) можем положить $D = \sigma(N)$, позаботившись лишь о том, чтобы $\sigma(N) \neq 1$.

2) Положим

$$m = (d(H) - 1)[H : H \cap U] + 1,$$

где через $d(H)$ обозначено минимальное число образующих группы H . Рассмотрим расщепляющееся расширение (3) с ядром A , являющимся прямой суммой $m + 1$ экземпляров D -модуля B , который в случае а) соответствует некоторому нетривиальному

неприводимому представлению группы D над полем из p элементов, а в случае б) изоморфен $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}[D]$, где $p^l \geq n(D, s)$ (определение функции $n(D, s)$ дано в утверждении б) леммы 5).

3) Положим $G_1 = \sigma^{-1}(D)$ и в качестве эпиморфизма $\varphi: G_1 \rightarrow D$ возьмем ограничение σ . Так как группа G_1 p -шольцева согласно утверждению б) предложения 2, то φ поднимается до эпиморфизма $\psi: G_1 \rightarrow E$.

4) Обозначим $N_1 = N \cap G_1$ и $H_1 = H \cap G_1$. Согласно лемме 1 $\psi(N_1)$ – субнормальная подгруппа в E , причем $s(\psi(N_1), E) \leq s$ в случае б). Так как по построению $\delta\psi(N_1) = D$, то $\psi(N_1)A = E$. Поэтому в силу леммы 6 подгруппа $\psi(N_1) \cap A$ содержит прямое произведение $m + 1$ подгрупп, каждая из которых изоморфна $[D, (s), B]$. Утверждения а) и б) леммы 5 соответственно в случаях а) и б) дают $[D, (s), B] \neq 1$.

5) Так как $\text{Ker } \varphi = \psi^{-1}(A)$, то $\psi(H_1 \cap \text{Ker } \varphi) = \psi(H_1) \cap A$. Замечаем, что из $\text{Ker } \varphi = U \subset G_1$ вытекает равенство $H_1 \cap \text{Ker } \varphi = H \cap U$. Таким образом, из полученного в части 4) доказательства утверждения можем сделать следующий вывод:

подгруппа $H \cap U$ обладает конечной факторгруппой $\psi(H \cap U)$, являющейся абелевой p -группой и содержащей прямое произведение $m + 1$ нетривиальных подгрупп.

Отсюда следует, что минимальное число образующих $d(H \cap U) \geq m + 1$. С другой стороны, число m было специально подобрано так, чтобы $d(H \cap U) \leq m$ (например, в силу формулы Шрейера для рангов подгрупп в свободных группах). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следующее предложение, дополняя следствие 2, показывает, что не существует никаких общих ограничений на подгруппы шольцевых групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Свободное проконечное произведение $G = H * F$ произвольной проконечной группы H и свободной проконечной группы F бесконечного ранга является шольцевой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано расщепляющееся расширение (3) конечных групп и эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow D$. Зафиксируем некоторую свободную систему образующих X группы F . По определению $F = \varprojlim \Phi/K$, где Φ – абстрактная свободная группа на множестве X , а K пробегает совокупность нормальных делителей Φ конечных индексов со свойством $|X \setminus K| < \infty$. Поэтому в силу конечности D множество $Z = X \cap \text{Ker } \varphi$ бесконечно.

Пусть A порождается элементами $a_1, a_2, \dots, a_d$. Выбрав в Z элементы $z_1, z_2, \dots, z_d$, обозначим через ψ_0 гомоморфизм из свободной группы $F = F(X)$ в группу $E = A \rtimes D$, заданный на элементах из X следующим образом: $\psi_0(x) = \varphi(x)$, если $x \notin Z$, $\psi_0(z_i) = a_i$, $i = 1, \dots, d$, и $\psi_0(y) = 1$ для всех остальных элементов $y \in Z$.

Используя теперь универсальное свойство свободного проконечного произведения, построим гомоморфизм $\psi: G \rightarrow E$, ограничение которого на H совпадает с ограничением $\varphi|_H$, а ограничение на F – с построенным выше гомоморфизмом. Ясно, что $\delta\psi = \varphi$. Так как по построению $A \subseteq \psi_0(F)$, то ψ сюръективен.

4. Доказательство теорем 2, 3. Цель этого пункта состоит в установлении результатов, частными проявлениями которых являются сформулированные во введении теоремы. Начать будет проще с групп Галуа.

Напомним, что поле $\mathbb{k}$ называется *сепарабельно гильбертовым*, если утверждение теоремы Гильберта о неприводимости справедливо для многочленов, сепарабельных над $\mathbb{k}(T)$ (см. [6]). Как обычно, *p -замкнутым* будем называть поле $\mathbb{K}$, не имеющее нетривиальных p -расширений для данного простого числа p .

Теорема 3 из введения является, очевидно, частным случаем следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbb{k}$ – сепарабельно гильбертово поле, π – непустое множество простых чисел, H – конечно порожденная подгруппа группы Галуа $G(\mathbb{K}/\mathbb{k})$ некоторого p -замкнутого для каждого $p \in \pi$ расширения $\mathbb{K}/\mathbb{k}$. Тогда

- а) H не содержит нетривиальных субнормальных в $G(\mathbb{K}/\mathbb{k})$ подгрупп;
- б) если $|\pi| \geq 2$, то H не содержит нетривиальных достижимых в $G(\mathbb{K}/\mathbb{k})$ подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 9 из [6] абсолютная группа Галуа $G(\mathbb{k}^{\text{sep}}/\mathbb{k})$ поля $\mathbb{k}$ является шольцевой. В силу p -замкнутости $\mathbb{K}$ для $p \in \pi$ из утверждения с) предложения 2 вытекает, что группа $G(\mathbb{K}/\mathbb{k})$ π -шольцева. Применяя утверждение а) теоремы 4 и следствие 1, получаем утверждения а) и б) теоремы 5.

ЗАМЕЧАНИЯ. а) Использование утверждения d) предложения 2 позволяет исследовать подгруппы групп Галуа над некоторыми расширениями сепарабельно гильбертовых полей, которые сами таковыми не являются.

б) Из следствия 2 непосредственно вытекают утверждения об отсутствии в группе $G(\mathbb{K}/\mathbb{k})$ из теоремы 5 нетривиальных абелевых субнормальных и при $|\pi| \geq 2$ про-нильпотентных достижимых подгрупп. Подобные утверждения, но только о нормальных делителях, содержатся в теореме 2 из [8].

Абстрактный класс $\mathcal{C}$ конечных групп, замкнутый относительно образования подгрупп, факторгрупп и конечных прямых произведений, естественно назвать *многообразием конечных групп*. Для таких $\mathcal{C}$ классы про- $\mathcal{C}$ -групп, т.е. проективных пределов групп из $\mathcal{C}$, являются достаточно точными аналогами многообразий абстрактных групп. В частности, многообразия про- $\mathcal{C}$ -групп обладают свободными объектами. Свободную про- $\mathcal{C}$ -группу с множеством X свободных образующих можно определить как пополнение $F_{\mathcal{C}}(X) = \lim_{\leftarrow} \Phi(X)/M$ абстрактной свободной группы $\Phi(X)$ над X в топологии, базис системы окрестностей единицы в которой образован всеми $M \triangleleft \Phi(X)$ такими, что $\Phi(X)/M \in \mathcal{C}$ и $|X \setminus M| < \infty$. Мощность множества X называется при этом *рангом* свободной про- $\mathcal{C}$ -группы $F_{\mathcal{C}}(X)$.

Пусть p – некоторое простое число. Многообразие $\mathcal{C}$ конечных групп назовем *p -замкнутым*, если $\mathcal{C}$ содержит каждую конечную группу E , обладающую нормальным делителем A таким, что A есть p -группа и $E/A \in \mathcal{C}$.

Ясно, что многообразие всех p -групп p -замкнуто, а многообразия всех конечных и всех конечных разрешимых групп являются p -замкнутыми для каждого простого p . Поэтому теоремы 1 и 2 являются частными случаями следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{C}$ – многообразие конечных групп, p -замкнутое для всех p из некоторого множества π простых чисел, H – конечно порожденная подгруппа свободной про- $\mathcal{C}$ -группы $F_{\mathcal{C}}$ ранга $\text{rank } F_{\mathcal{C}} > 1$. Предположим, что справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) $|\pi| \geq 2$ и в H содержится нетривиальная достижимая в $F_{\mathcal{C}}$ подгруппа N ;

- 2) $|\pi| = 1$ и в H содержится нетривиальная субнормальная в $F_{\mathcal{C}}$ подгруппа N .

Тогда $\text{rank } F_{\mathcal{C}} < \infty$ и $[F_{\mathcal{C}} : H] < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения свободной про- $\mathcal{C}$ -группы вытекает, что $F_{\mathcal{C}}$ можно отождествить с факторгруппой F/K , где F – свободная проконечная группа ранга, равного $\text{rank } F_{\mathcal{C}}$, а K – пересечение всех нормальных делителей F , факторгруппы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Как легко видеть, p -замкнутость класса $\mathcal{C}$ эквивалентна тому, что группа K не имеет нетривиальных факторгрупп, являющихся абелевыми p -группами.

Если ранг $F_{\mathcal{C}}$ бесконечен, то в силу предложения 3 свободная проконечная группа F шольцева. Из утверждения с) предложения 2 вытекает поэтому π -шольцевость группы $F_{\mathcal{C}} = F/K$. Следовательно, предположив, что ранг $F_{\mathcal{C}}$ бесконечен, приходим к противоречию с утверждением а) основной теоремы 4 или с ее следствием 2.

Таким образом, осталось рассмотреть случай $\text{rank } F_{\mathcal{C}} < \infty$. Формально этот случай не связан с основной теоремой. Однако практически дословное повторение рассуждений из доказательства теоремы 4 позволяет привести к противоречию предположение о бесконечности индекса $[F_{\mathcal{C}} : H]$. Отметим ниже лишь необходимые изменения.

Пусть p – простое число из π , выбранное в случае $|\pi| \geq 2$ так, чтобы N не была про- p -группой. Все построения из частей 1) и 2) доказательства теоремы 4 повторяем без каких-либо изменений, считая G равной факторгруппе $F/K = F_{\mathcal{C}}$.

В части 3) доказательства положим $G_1 = \sigma^{-1}(D) \cap V$, где V – открытая подгруппа G , содержащая H , индекс которой $[G : V]$ не меньше, чем число образующих $d(E)$ группы E . Существование такой подгруппы V вытекает из предположения $[F_{\mathcal{C}} : H] = \infty$. Так как $N \subset V$, ограничение σ на G_1 дает эпиморфизм $\varphi: G_1 \rightarrow D$. Его поднятие до эпиморфизма $\psi: G_1 \rightarrow E$ строится следующим образом.

Обозначим через F_1 прообраз G_1 в F . Согласно [9] из открытости подгруппы F_1 в F следует, что F_1 – свободная проконечная группа ранга $t = (r - 1)j + 1$, где $r = \text{rank } F = \text{rank } F_{\mathcal{C}}$, $j = [F : F_1] = [G : G_1]$. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_t\}$ – свободная система образующих группы F_1 . Положим $\varphi_0 = \varphi\omega$, где ω – канонический эпиморфизм F_1 на G_1 . Тогда элементы $g_i = \varphi_0(x_i)$, $i = 1, \dots, t$, порождают группу D . Так как по построению $r \geq 2$ и $j \geq [G : V] \geq d(E)$, имеем $t \geq d(E)$. Поэтому в силу одной теоремы Гашюца [10] существуют порождающие группу E элементы $h_1, \dots, h_t$ со свойством $\delta(h_i) = g_i$, $i = 1, \dots, t$. Из свободы F_1 на X вытекает существование эпиморфизма $\psi_0: F_1 \rightarrow E$ такого, что $\psi_0(x_i) = h_i$, $i = 1, \dots, t$. Ясно, что $\delta\psi_0 = \varphi_0$.

Так как ядро $\text{Ker } \omega = K$ не имеет нетривиальных абелевых p -факторгрупп, из вложения $\psi_0(\text{Ker } \omega) \subseteq A$ получаем, что $\text{Ker } \omega \subseteq \text{Ker } \psi_0$. Следовательно, $\psi_0 = \psi\omega$ для эпиморфизма $\psi: G_1 \rightarrow E$, который и является искомым поднятием φ .

После этого дословно повторяется часть 4) доказательства теоремы 4, а в части 5) необходимо лишь проверить справедливость равенства $H_1 \cap \text{Ker } \varphi = H \cap U$ в нашей ситуации. Оно вытекает из того, что $\text{Ker } \varphi = U \cap V$ и содержится в G_1 , причем $H \subset V$ по определению V .

В случае свободных про- $\mathcal{C}$ -групп из общих результатов статей [2] и [3] может быть получено утверждение, более сильное, чем какой-либо вариант следствия 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{C}$ – многообразие конечных групп, p -замкнутое для всех $p \in \pi$, N – нетривиальная достижимая в случае $|\pi| \geq 2$ или субнормаль-

ная в случае $|\pi| = 1$ подгруппа свободной про- $\mathcal{C}$ -группы $F_{\mathcal{C}}$ ранга $\text{rank } F_{\mathcal{C}} > 1$. Тогда в N существует открытая субнормальная подгруппа, обладающая факторгруппой, изоморфной свободной проразрешимой про- π -группе ранга, не меньшего $\text{rank } F_{\mathcal{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая, как и в предыдущем доказательстве, что $F_{\mathcal{C}} = F/K$, обозначим через M прообраз N в F . Пусть M_1 – какой-либо содержащий K собственный открытый нормальный делитель M с простой факторгруппой M/M_1 . Если $|\pi| \geq 2$ и $[F_{\mathcal{C}} : N] = \infty$, по теореме 3.4 из [2] найдется $M_2 \triangleleft M_1$ такой, что $M_1/M_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где $p \in \pi$, а факторгруппа M/M_1 не изоморфна $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. В остальных случаях M субнормальна в F , и мы будем считать, что $M_2 = M_1$.

Применяя результаты из статьи [3, §3], если M субнормальна, или результаты [2] в случае, когда M достижима, получаем, что M_2 – свободная проконечная группа ранга, не меньшего $\text{rank } F = \text{rank } F_{\mathcal{C}}$. Поэтому M_2 обладает факторгруппой M_2/M_3 , изоморфной свободной про- $\mathcal{R}(\pi)$ -группе того же ранга, где $\mathcal{R}(\pi)$ – класс конечных разрешимых π -групп.

Используя отсутствие в K нетривиальных абелевых π -факторгрупп, из $K \subseteq M_1$ получаем, что $K \subseteq M_3$. Рассматривая образы $M_3 \triangleleft M_2 \triangleleft M$ в факторгруппе $F_{\mathcal{C}} = F/K$, приходим к заключению предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Karrass A., Solitar D. On finitely generated subgroups of a free group // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. №1. P. 209–213.
- [2] Мельников О.В. Характеризация достижимых подгрупп свободных проконечных групп // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22. №8. С. 677–679.
- [3] Мельников О.В. Нормальные делители свободных проконечных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №1. С. 3–25.
- [4] Lubotzky A. Combinatorial group theory for pro- p -groups // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 25. P. 311–325.
- [5] Hoechsmann K. Zum Einbettungsproblem // J. Reine Angew. Math. 1968. V. 229. P. 81–106.
- [6] Uchida K. Separably Hilbertian fields // Kodai Math. J. 1980. V. 3. №1. P. 83–95.
- [7] Fried M. D., Jarden M. Field Arithmetic. Berlin: Springer, 1986.
- [8] Kuyk W. Extensions de corps hilbertiens // J. Algebra. 1970. V. 14. №1. P. 112–124.
- [9] Binz E., Neukirch J., Wenzel G. H. A subgroup theorem for free products of profinite groups // J. Algebra. 1971. V. 19. №1. P. 104–109.
- [10] Gaschütz W. Zu einem von B. H. und H. Neumann gestellten Problem // Math. Nachr. 1955. V. 14. №4–6. P. 249–252.