Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ониани, О возможных значениях верхней и нижней производных, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 107–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:21:57

УДК 517.51

О ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. Г. Ониани

В работе изучено поведение верхней и нижней производных интегралов относительно дифференциальных базисов, образованных из интервалов. Основной результат состоит в том, что аналог известной теоремы Безикевича, вообще говоря, не имеет места для инвариантных относительно сдвига буземан-феллеровских базисов, образованных из интервалов.

Библиография: 2 названия.

1. Определения и обозначения. Отображение B , определенное на $\mathbb{R}^n$, называется *дифференциальным базисом* в $\mathbb{R}^n$, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ $B(x)$ является семейством открытых ограниченных множеств, содержащих точку x , таких, что существует последовательность

$$\{R_k\} \subset B(x), \quad \text{diam } R_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ числа

$$\overline{D}_B(\int f, x) = \overline{\lim_{\substack{R \in B(x) \\ \text{diam } R \rightarrow 0}}} \frac{1}{|R|} \int_R f \quad \text{и} \quad \underline{D}_B(\int f, x) = \lim_{\substack{R \in B(x) \\ \text{diam } R \rightarrow 0}} \frac{1}{|R|} \int_R f$$

называют соответственно *верхней* и *нижней производными* интеграла от f в точке x . Если верхняя и нижняя производные совпадают, то их общее значение называют *производной* от интеграла от f в точке x и обозначают через $D_B(\int f, x)$. Говорят, что базис B *дифференцирует интеграл* от f , если для почти всех x $D_B(\int f, x) = f(x)$.

Базис B называют *подбазисом* B' (запись: $B \subset B'$), если $B(x) \subset B'(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Базис B называют *базисом Буземана–Феллера* (BF-базисом), если для каждого $R \in \overline{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B(x)$ имеем $R \in B(y)$ для всякого $y \in R$. BF-базис B называется *инвариантным* относительно гомотетии (HI-базисом), если для каждого $R \in \overline{B}$ в $\overline{B}$ входит любое множество, гомотетичное R . Базис B называется *инвариантным* относительно сдвига (ТИ-базисом), если $B(x) = \{x + R : R \in B(0)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где 0 – начало координат в $\mathbb{R}^n$.

Через B_2 будем обозначать базис в $\mathbb{R}^2$, для которого $B(x)$ состоит из всех двумерных интервалов, содержащих точку x , $x \in \mathbb{R}^2$.

Условимся, что $I^n = (0, 1)^n$ и $f \in L(I^n)$, если $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } f \subset I^n$.

2. Основные результаты. Согласно известной теореме Безиковича (см. [1] или [2, с. 96]) о возможных значениях верхней и нижней производных для каждой функции $f \in L(\mathbb{R}^2)$ оба множества

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < \overline{D}_{B_2}(f, x) < \infty\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^2 : -\infty < \underline{D}_{B_2}(f, x) < f(x)\}$$

имеют меру 0.

Гусманом и Менаргесом (см. [2, с. 100]) было установлено некоторое обобщение этого результата. Из их теоремы следует, что аналог утверждения Безиковича справедлив для инвариантных относительно гомотетии BF-базисов $B \subset B_2$.

Возникает вопрос: можно ли теорему Безиковича распространить на инвариантные относительно сдвига BF-базисы $B \subset B_2$?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Существует инвариантный относительно сдвига BF-базис $B \subset B_2$, для которого найдется функция $f \in L(I^2)$, $f \geq 0$, такая, что $f(x) < \overline{D}_B(f, x) < \infty$ почти всюду на I^2 .*

Нетрудно доказать, что (см. замечание 1) если $B \subset B_2$ – инвариантный относительно сдвига базис, то для каждой $f \in L(\mathbb{R}^2)$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$ выполняются неравенства

$$\underline{D}_B(f, x) \leq f(x) \leq \overline{D}_B(f, x).$$

Возникает вопрос: справедлив ли аналогичный факт для произвольных базисов $B \subset B_2$? Отрицательный ответ дает

ТЕОРЕМА 2. *Существует BF-базис $B \subset B_2$, для которого найдется функция $f \in L(I^2)$, $f \geq 0$, такая, что*

$$f(x) < \underline{D}_B(f, x) = \infty$$

почти всюду на I^2 .

3. Доказательства теорем. Для интервала I и $h > 0$ через hI будем обозначать интервал $H(I)$, где H – гомотетия с центром в центре I с коэффициентом h .

Для интервала I и $h > 1$ через $M(I, h)$ обозначим объединение всех интервалов J со свойствами: $J \supset I$ и $|J| = h|I|$. Множество $M(I, h)$ называют *лестницей Бора*. Отметим некоторые свойства $M(I, h)$:

$$M(I, h) \subset (2h + 1)I, \quad |M(I, h)| > h \ln h |I|. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $h_k \uparrow \infty$, $h_k > 1$, – последовательность такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln h_k}{h_k} = \infty. \quad (2)$$

Допустим $n_k = 2^{m_k}$, где $m_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и $n_k \uparrow \infty$. Для каждого k разобьем I^2 на n_k^2 равных квадратных интервалов и полученные квадраты обозначим через $I_{k,n}^2$, а длину их сторон – через Δ_k . Для каждого $I_{k,n}^2$ рассмотрим квадратный интервал $I_{k,n}$

с центром в центре $I_{k,n}^2$ со стороной длины $\delta_k = \Delta_k / (2h_k + 1)$. Будем считать $n_k \uparrow \infty$ так, что $\delta_k > \Delta_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Согласно (1) при $k \in \mathbb{N}$, $n = 1, \dots, n_k^2$

$$M(I_{k,n}, h_k) \subset (2h_k + 1)I_{k,n} = I_{k,n}^2, \quad |M(I_{k,n}, h_k)| > h_k \ln h_k |I_{k,n}|.$$

Следовательно, при $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} M(I_{k,n}, h_k) \right| &= \sum_{n=1}^{n_k^2} |M(I_{k,n}, h_k)| \\ &\geq \sum_{n=1}^{n_k^2} h_k \ln h_k |I_{k,n}| = \sum_{n=1}^{n_k^2} h_k \ln h_k \frac{|I_{k,n}^2|}{(2h_k + 1)^2} > \frac{\ln h_k}{9h_k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим те интервалы $I_{k+1,n}^2$, $n = 1, \dots, n_{k+1}^2$, которые входят в $\bigcup_{n=1}^{n_k^2} M(I_{k,n}, h_k)$, и их объединение обозначим через O_k . Легко видеть, что если n_k достаточно быстро стремится к ∞ , то

$$|O_k| \geq \frac{1}{2} \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} M(I_{k,n}, h_k) \right|, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Будем считать, что $\{n_k\}$ подобрано так, что выполняется (4). Используя свойства двоично-рациональных интервалов, легко убедиться в независимости последовательности $\{O_k\}$, т.е. для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для различных натуральных чисел $k_1, \dots, k_m$

$$\left| \bigcap_{j=1}^m O_{k_j} \right| = \prod_{j=1}^m |O_{k_j}|.$$

В силу (2)–(4) выполнено $\sum_{k=1}^{\infty} |O_k| = \infty$. Следовательно, используя лемму Бореля–Кантелли, заключаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} O_k$ имеет полную меру в I^2 . Отсюда в силу включения

$$O_k \subset \bigcup_{n=1}^{n_k^2} M(I_{k,n}, h_k)$$

получаем

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=1}^{n_k^2} M(I_{k,n}, h_k)} \text{ имеет полную меру в } I^2. \quad (5)$$

Пусть G_k , $k \in \mathbb{N}$, – семейство всех интервалов со сторонами длины не меньше чем δ_k , с площадями равными $h_k \delta_k^2$.

Базис B определим следующим образом:

$$B(x) = \left\{ I \in B_2(x) : I \in \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, $B \subset B_2$ и B является ВФ- и ТП-базисом.

Пусть

$$f_k = \sup_{n=1, \dots, n_k^2} h_k \chi_{I_{k,n}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Очевидно, $\text{supp } f \subset I^2$ и $f \geq 0$. Легко видеть, что при $k \in \mathbb{N}$

$$\|f_k\|_1 = h_k \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right| = h_k \sum_{n=1}^{n_k^2} \frac{1}{(2h_k + 1)^2} |I_{k,n}|^2 < \frac{1}{h_k},$$

откуда согласно (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} < \infty,$$

означает, что $f \in L(I^2)$.

Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right| < \infty.$$

Следовательно,

$$\left| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=1}^{n_k^2} 3I_{k,n} \right| = 0.$$

Очевидно, B дифференцирует $\int f$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. множество A_k , $k \in \mathbb{N}$, состоящее из всех точек x , для которых $D_B(\int f_k, x) = f_k(x)$, имеет полную меру в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим

$$A = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \cap \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=1}^{n_k^2} M(I_{k,n}, h_k) \right) \setminus \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=1}^{n_k^2} 3I_{k,n}.$$

В силу сказанного выше и (5) A имеет полную меру в I^2 .

Пусть $x \in A$. Ясно, что найдется $k_x \in \mathbb{N}$, для которого

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{n_k^2} 3I_{k,n} \quad \text{при} \quad k > k_x. \quad (6)$$

Очевидно, при $\text{diam } I \rightarrow 0$, $I \in B(x)$, имеем

$$\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{k=1}^{k_x} f_k \rightarrow \sum_{k=1}^{k_x} f_k(x) = f(x). \quad (7)$$

Допустим $I \in B(x)$ и $I \in \bigcup_{k \geq k_x+2} G_k$. Через k_I обозначим число, для которого $I \in G_{k_I}$. Легко проверить, что $\text{diam } I < 2h_{k_I} \delta_{k_I} < \Delta_{k_I}$. Следовательно, так как

$\delta_k > \Delta_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\text{diam } I < \delta_k$ при $k_x < k < k_I$. Отсюда в силу (6) при $k_x < k < k_I$

$$I \cap \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} = \emptyset.$$

Стало быть,

$$\int_I f_k = 0 \quad \text{при } k_x < k < k_I. \quad (8)$$

Имеем $I \in G_{k_I}$, значит I может пересекать только один из квадратов $I_{k,n}$, $n = 1, \dots, n_{k_I}^2$. Следовательно, так как $|I| = h_{k_I} \delta_{k_I}^2$, получаем

$$\frac{1}{|I|} \int_I f_{k_I} \leq \frac{1}{h_{k_I} \delta_{k_I}^2} h_{k_I} \delta_{k_I}^2 = 1. \quad (9)$$

Докажем, что при $k > k_I$

$$\left| I \cap \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right| \leq 9|I| \cdot \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right|. \quad (10)$$

Для доказательства этого достаточно отметить следующие легко проверяемые факты:

- 1) $d_I > \Delta_k$ при $k > k_I$ (d_I – длина меньшей стороны интервала I);
- 2) пусть P_k , $k \in \mathbb{N}$, – множество вершин квадратов $I_{k,n}^2$, $n = 1, \dots, n_k^2$; если вершины интервала $J \subset I^2$ принадлежат множеству P_k , то

$$\left| J \cap \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right| \leq |J| \cdot \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right|;$$

- 3) пусть $k \in \mathbb{N}$; для каждого интервала $J \subset I^2$, $d_J \geq \Delta_k$, найдется интервал $J' \supset J$, $|J'| \leq 9|J|$, с вершинами, принадлежащими P_k .

Из (10) вытекает, что при $k > k_I$

$$\int_I f_k = h_k \left| I \cap \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right| \leq 9h_k |I| \cdot \left| \bigcup_{n=1}^{n_k^2} I_{k,n} \right| = 9|I| \cdot \|f_k\|_1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|I|} \int_I \sum_{k > k_I} f_k = \sum_{k > k_I} \frac{1}{|I|} \int_I f_k \leq 9 \sum_{k > k_I} \|f_k\|_1 \leq 9\|f\|_1. \quad (11)$$

Из (7)–(9) и (11) легко заключаем, что

$$\overline{D}_B(f f, x) \leq f(x) + 1 + 9\|f\|_1, \quad x \in A.$$

Поэтому найдется последовательность $k_j \uparrow \infty$, для которой

$$x \in \bigcup_{n=1}^{n_{k_j}^2} M(I_{k_j, n}, h_{k_j}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу определения базиса B и множества $M(I, h)$ при каждом j найдется $I_j \in B(x)$ такой, что

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f_{k_j} = 1, \quad \text{diam } I_j < \Delta_{k_j}. \quad (12)$$

Из (7) и (12) непосредственно получаем

$$\overline{D}_B(f, x) \geq f(x) + 1. \quad (13)$$

Теперь, учитывая, что A имеет полную меру в I^2 , в силу произвольности $x \in A$ в неравенствах (11) и (13) выполнено

$$f(x) + 1 \leq \overline{D}_B(f, x) \leq f(x) + 1 + 9\|f\|_1$$

почти всюду на I^2 . Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $h_k > k$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\ln(h_k/k)} < \infty. \quad (14)$$

Пусть Q – некоторый квадратный интервал. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ покроем почти весь I^2 последовательностью попарно пересекающихся множеств, которые гомотетичны $M(Q, h_k/k)$ и имеют диаметры меньше чем $1/k$. Положим $Q_{k,n} = H_{k,n}(Q)$, $k, n \in \mathbb{N}$, где $H_{k,n}$ – гомотетия, переводящая $M(Q, h_k/k)$ в n -й член указанной последовательности (который, очевидно, равен $M(Q_{k,n}, h_k/k)$).

Пусть

$$f_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} h_k \chi_{Q_{k,n}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Очевидно, $f \geq 0$ и $\text{supp } f \subset I^2$. Так как в силу (1) при $k, n \in \mathbb{N}$

$$\left| M\left(Q_{k,n}, \frac{h_k}{k}\right) \right| > \frac{h_k}{k} \ln \frac{h_k}{k} |Q_{k,n}|,$$

то

$$\|f_k\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} h_k |Q_{k,n}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{\ln(h_k/k)} \left| M\left(Q_{k,n}, \frac{h_k}{k}\right) \right| = \frac{k}{\ln(h_k/k)}.$$

Следовательно, из (14) заключаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty$, значит $f \in L(I^2)$.

Обозначим

$$T_{k,n} = \left\{ I \in \overline{B}_2 : I \supset Q_{k,n}, |I| = \frac{h_k}{k} |Q_{k,n}| \right\}, \quad T_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_{k,n}, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что при $k \in \mathbb{N}$ и $I \in T_k$

$$\frac{1}{|I|} \int_I f_k = k. \quad (15)$$

По построению множество

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{I \in T_k} I = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} M\left(Q_{k,n}, \frac{h_k}{k}\right)$$

имеет полную меру в I^2 . Пусть при каждом $k \in \mathbb{N}$ $G_k \subset I^2$ – открытое множество такое, что $I^2 \setminus A \subset G_k$ и $|G_k| < 1/2^k$. При всяком $k \in \mathbb{N}$ каждому $x \in I^2 \setminus A$ сопоставим интервал $I_k(x) \ni x$, $I_k(x) \subset G_k$, $\text{diam } I_k(x) = \text{dist}(x, \partial G_k)/k$ (∂G_k – граница G_k). Введем обозначения

$$R_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, \quad R_2 = \{I_k(x) : x \in I^2 \setminus A, k \in \mathbb{N}\}, \quad R_3 = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus I^2} B_2(x).$$

Базис B определим следующим образом:

$$B(x) = \{I : I \ni x, I \in R_1 \cup R_2 \cup R_3\}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть

$$x \in A \setminus \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} G_k.$$

Нетрудно убедиться, что $B(x)$ представляется в виде $B(x) = \{I : I \ni x, I \in R_1\} \cup T$, где T – семейство интервалов с диаметрами, превышающими некоторое положительное число. Рассмотрим произвольную последовательность $\{I_m\} \subset B(x)$, $\text{diam } I_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Тогда для достаточно большого m_0 имеем $I_m \in R_1$ при $m > m_0$. Следовательно, найдутся натуральные числа k_m ($m > m_0$) такие, что $I_m \in T_{k_m}$ ($m > m_0$). Отсюда, учитывая (15), получаем

$$\frac{1}{|I_m|} \int_{I_m} f \geq k_m, \quad m > m_0.$$

Нетрудно видеть, что $k_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда имеем

$$\underline{D}_B(f, x) = \infty.$$

Очевидно, $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} G_k$ имеет меру нуль. Непосредственно из последнего равенства заключаем, что

$$f(x) < \underline{D}_B(f, x) = \infty$$

почти всюду на I^2 . Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $B \subset B_2$ – TI-базис, то для каждой $f \in L(\mathbb{R}^2)$

$$\underline{D}_B(f f, x) \leq f(x) \leq \overline{D}_B(f f, x)$$

почти всюду на $\mathbb{R}^2$. Действительно, найдется TI-базис $B' \subset B$, для которого $B'(0) = \{I_k\}$, где $I_k \supset I_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, и $\text{diam } I_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Используя лемму Гусмана (см. [2, с. 14]), с помощью известной стандартной техники (см., например, [2, с. 36]) можно доказать, что B' дифференцирует $f f$ для каждой $f \in L(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, для любой $f \in L(\mathbb{R}^2)$

$$\underline{D}_B(f f, x) \leq \underline{D}_{B'}(f f, x) = f(x) = \overline{D}_{B'}(f f, x) \leq \overline{D}_B(f f, x)$$

почти всюду на $\mathbb{R}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $B \subset B_2$ – TI-базис и $f \in L(\mathbb{R}^2)$, $f \geq 0$. Учитывая замечание 1, имеем $0 \leq \underline{D}_{B_2}(f f, x) \leq \underline{D}_B(f f, x) \leq f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$. Отсюда в силу теоремы Безиковича заключаем, что почти всюду на $\mathbb{R}^2$ $\underline{D}_B(f f, x) = f(x)$. Следовательно, последнее равенство справедливо почти всюду на $\mathbb{R}^2$ для базиса B и функции f из теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположим, что последовательность $h_k \uparrow \infty$, $h_k > 1$, кроме (2) удовлетворяет еще и неравенству $\sum_{k=1}^{\infty} 1/h_k < 1/9$. Тогда, рассматривая функцию $f = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k$, где f_k , $k \in \mathbb{N}$, – функции из доказательства теоремы 1, с помощью оценок, установленных при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что

$$f(x) < \overline{D}_B(f f, x) < \infty \quad \text{и} \quad -\infty < \underline{D}_B(f f, x) < f(x)$$

почти всюду на I^2 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Besicovitch A.S. On differentiation of Lebesgue double integrals // Fund. Math. 1935. V. 25. P. 209–216.
- [2] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.

Тбилисский государственный университет

Поступило
23.04.96