Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пенской, Канонически сопряженные переменные для системы Вольтерра с периодическими граничными условиями, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 115–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:30:38

УДК 517.93

КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. В. Пенской

В работе рассматривается система Вольтерра. Известно, что эта динамическая система является гамильтоновой по отношению к двум согласованным скобкам Пуассона (квадратичной и кубической). При помощи спектральной теории оператора Якоби для обеих скобок найдены канонически сопряженные переменные.

Библиография: 10 названий.

Рассмотрим систему Вольтерра, задающуюся уравнениями

$$\dot{c}_i = c_i(c_{i+1} - c_{i-1}),$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $c_i(t) > 0$, с периодическими граничными условиями $c_{T+i} = c_i$, $T \in \mathbb{N}$.

Задача построения канонически сопряженных переменных при квазипериодических граничных условиях в данной статье не рассматривается и остается нерешенной.

Известно [1], [2], что данная система является гамильтоновой для двух согласованных скобок Пуассона:

1) квадратичной скобки Пуассона

$$\{c_i, c_j\}_1 = \begin{cases} c_i c_{i+1}, & \text{если } j = i + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

с гамильтонианом $H = \sum_{i=1}^T c_i$;

2) кубической скобки Пуассона

$$\{c_i, c_j\}_2 = \begin{cases} c_i c_{i+1} (c_i + c_{i+1}), & \text{если } j = i + 1, \\ c_i c_{i+1} c_{i+2}, & \text{если } j = i + 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} \ln \prod_{i=1}^T c_i$.

С. В. Манаков [3] и независимо от него годом позже М. Кац и П. ван Мербеке [4] доказали интегрируемость системы Вольтерра.

Введем удобное обозначение $a_i = \sqrt{c_i}$, которое далее будет часто использоваться.

Рассмотрим оператор Якоби l на пространстве последовательностей $\{y(n) : n \in \mathbb{Z}\}$:

$$(ly)(n) = a_{n+1}y(n+1) + a_ny(n-1)$$

и соответствующую спектральную задачу $(ly)(n) = \lambda y(n)$.

Канонически сопряженные переменные для обеих скобок будут построены в терминах решений этой спектральной задачи, что сближает данную работу с работой Г. Флашки и Д. Маклафлина [5], где подобным образом строятся канонически сопряженные переменные для цепочки Тоды и уравнения Кортевега–де Фриза с периодическими граничными условиями.

В работе В. Л. Верещагина [6] установлен изоморфизм между фазовыми пространствами системы Вольтерра и цепочки Тоды, который, однако, не согласован со спектральной теорией и поэтому не может быть использован для целей настоящей работы.

Рассуждения зависят от четности периода T ; часто выкладки будут проводиться только для нечетного случая $T = 2N + 1$, но отличия для четного случая $T = 2N + 2$ будут оговариваться.

Рассмотрим фундаментальные решения $y_1(n, \lambda)$ и $y_2(n, \lambda)$ уравнения $ly = \lambda y$, нормированные следующим образом:

$$y_1(-N) = 1, \quad y_1(-N+1) = 0, \quad y_2(-N) = 0, \quad y_2(-N+1) = 1.$$

В данном базисе матрица монодромии выглядит так:

$$U = \begin{pmatrix} y_1(-N+T) & y_2(-N+T) \\ y_1(-N+1+T) & y_2(-N+1+T) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через ρ множитель Флоке. Он удовлетворяет уравнению $\det(U - \rho) = 0$.

Для произвольных решений ψ_i уравнения $l\psi_i = \lambda_i\psi_i$, $i = 1, 2$, обозначим через $W_k(\psi_1, \psi_2)$ разностный вронскиан ψ_1 и ψ_2 :

$$W_k(\psi_1, \psi_2) = a_{k+1}(\psi_1(k)\psi_2(k+1) - \psi_1(k+1)\psi_2(k)).$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то легко показать, что $W_k(\psi_1, \psi_2) = W_{k+1}(\psi_1, \psi_2)$, поэтому

$$\det U = \frac{W_{-N+T}(y_1, y_2)}{a_{-N+1+T}} = \frac{W_{-N}(y_1, y_2)}{a_{-N+1}} = 1,$$

откуда следует, что ρ удовлетворяет уравнению

$$\rho^2 - \Delta(\lambda)\rho + 1 = 0, \tag{1}$$

где $\Delta(\lambda) = \text{tr } U = y_1(-N+T) + y_2(-N+1+T)$.

Рассмотрим λ такие, что существует ненулевое решение y с нулевыми граничными условиями $y(-N, \lambda) = y(-N+T, \lambda) = 0$. Все такие решения пропорциональны y_2 , поэтому соответствующие λ определяются из уравнения $y_2(-N+T, \lambda) = 0$.

Легко видеть, что $y_2(N+1, \lambda) = Q_1(\lambda^2)$, $y_2(N+2, \lambda) = \lambda Q_2(\lambda^2)$, где Q_1, Q_2 – многочлены степени N , поэтому решениями в нечетном случае будут $\pm \lambda_i$, $i = 1, \dots, N$, а в четном $0, \pm \lambda_i$, $i = 1, \dots, N$. Таким образом, с точностью до знака имеем N ненулевых собственных значений. Выберем знаки произвольным образом: позднее мы увидим, что от выбора знака практически ничего не зависит.

Пусть $P(\lambda) = \Delta(\lambda)/2$, $R(\lambda) = (P(\lambda) + 1)(P(\lambda) - 1)$. Пусть Γ – гиперэллиптическая кривая, заданная уравнением $y^2 = R(\lambda)$; она двулистно накрывает плоскость λ , поэтому ее точки будем обозначать парами $(\lambda, \pm)$, где $\pm$ задает лист.

Любому значению λ соответствуют два решения уравнения (1): ρ^+ и ρ^- , причем $\rho^+ \rho^- = 1$. Рассмотрим решение системы уравнений

$$(l\psi^\pm)(n) = \lambda\psi^\pm(n), \quad \psi^\pm(n+T) = \rho^\pm \psi^\pm(n),$$

нормированное условием $\psi^\pm(-N) = 1$. Известно [7], что две функции $\psi^\pm(n, \lambda)$ на самом деле являются однозначной мероморфной функцией на гиперэллиптической кривой Γ , при этом $\psi(n, \lambda)$ при любом n вне бесконечноудаленных точек ровно $T-1$ полюсов $P_1, \dots, P_{T-1}$, проекции которых на плоскость λ – в точности $\pm \lambda_k$ и еще 0 в четном случае. Занумеруем их таким образом: $P_i = (\lambda_i, \pm)$, $P_{N+i} = (-\lambda_i, \pm)$, $i = 1, \dots, N$, и в четном случае $P_{2N+1} = 0$.

Введем на кривой Γ инволюцию σ следующим образом:

$$\sigma(y, \lambda) = \begin{cases} (-y, -\lambda) & \text{в нечетном случае,} \\ (y, -\lambda) & \text{в четном случае.} \end{cases}$$

Известно [8], [9], что дивизор $\mathcal{D} = P_1 + \dots + P_{T-1}$ полюсов ψ_n , лежащих вне бесконечноудаленных точек, инвариантен относительно инволюции: $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Легко проверить, что $y_2(n, \lambda_i)$ – решение Флоке, а $\rho_i = y_2(-N+1+T, \lambda_i)$ – соответствующий множитель Флоке. Известно [7], что концы зон вещественны и симметричны относительно нуля, полюса P_i лежат по одному в лакунах спектра и множители Флоке действительны и взаимнообратны.

Пусть

$$F_i = \ln(|\rho_i|) = \begin{cases} \ln(|y_2(N+2, \lambda_i)|) & \text{в нечетном случае,} \\ \ln(|y_2(N+3, \lambda_i)|) & \text{в четном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. Координаты $(\lambda_i, 2F_j/\lambda_j : i, j = 1, \dots, N)$ являются канонически сопряженными для квадратичной скобки, т.е.

$$\{\lambda_i, \lambda_j\}_1 = 0, \quad \left\{ \lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j} \right\}_1 = \delta_{i,j}, \quad \left\{ \frac{2F_i}{\lambda_i}, \frac{2F_j}{\lambda_j} \right\}_1 = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Фазовое пространство имеет в нечетном случае размерность $2N+1$, но далее будет показано, что размерность аннулятора квадратичной скобки равна 1 (соответственно $2N+2$ и 2 в четном случае). Поэтому это полный набор канонически сопряженных переменных.

Доказательство будет проведено для нечетного случая, так как в четном все аналогично.

Пусть ψ_1, ψ_2 – произвольные решения уравнения $l\psi_i = \lambda_i \psi_i$, $i = 1, 2$. Пусть

$$\begin{aligned} W_k^\uparrow &= W_k^\uparrow(\psi_1, \psi_2) = a_{k+1}(\lambda_1 \psi_1(k) \psi_2(k+1) - \lambda_2 \psi_2(k) \psi_1(k+1)), \\ W_k^\downarrow &= W_k^\downarrow(\psi_1, \psi_2) = a_{k+1}(\lambda_2 \psi_1(k) \psi_2(k+1) - \lambda_1 \psi_2(k) \psi_1(k+1)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие тождества:*

$$W_{k+1}^\uparrow = W_k^\downarrow,$$

$$W_k^\downarrow = W_{k-1}^\uparrow + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\psi_1(k)\psi_2(k), \quad W_{k+1}^\uparrow - W_{k-1}^\uparrow = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\psi_1(k)\psi_2(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке.

Пусть $\varphi(n, \lambda_i)$ – удовлетворяющее нулевым граничным условиям решение, нормированное условием $\sum_{k=-N}^N \varphi^2(n, \lambda_i) = 1$; $y(n, \lambda_i)$ – независимое от $y_2(n, \lambda_i)$ решение Флоке, нормированное условием $y(-N, \lambda_i) = 1$. Для краткости будем использовать обозначения $\varphi_i(n) = \varphi(n, \lambda_i)$, $y_{2,i}(n) = y_2(n, \lambda_i)$ и т.д. Пусть $Z_i = \sum_{k=-N}^N y_{2,i}(k)y_i(k)$.

При варьировании a_k рассмотрим вариации λ_i и F_i в предположении, что λ_i остается собственным значением, для которого существует решение, удовлетворяющее нулевым граничным условиям.

ЛЕММА 2. *Вариации $\delta\lambda_i$ и δF_i определяются по следующим формулам:*

$$\delta\lambda_i = \sum_{k=-N}^N 2\delta a_k \varphi_i(k-1)\varphi_i(k), \quad (2)$$

$$\delta F_i = \frac{1}{a_{N+2}} \sum_{k=-N}^N \delta a_k (2Z_i \varphi_i(k-1)\varphi_i(k) - y_{2,i}(k)y_i(k-1) - y_i(k)y_{2,i}(k-1)). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проварьируем $l\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$:

$$\delta a_{k+1}\varphi_i(k+1) + \delta a_k\varphi_i(k-1) + a_{k+1}\delta\varphi_i(k+1) + a_k\delta\varphi_i(k-1) = \delta\lambda_i\varphi_i(k) + \lambda_i\delta\varphi_i(k).$$

Умножим это равенство на $\varphi_i(k)$ и просуммируем по k от $-N$ до N . Учитывая нормировку φ_i и приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} \delta\lambda_i &= \sum_{k=-N}^N (\delta a_{k+1}\varphi_i(k+1)\varphi_i(k) + \delta a_k\varphi_i(k-1)\varphi_i(k)) \\ &+ \sum_{k=-N}^N (-\lambda_i\delta\varphi_i(k)\varphi_i(k) + a_{k+1}\delta\varphi_i(k+1)\varphi_i(k) + a_k\delta\varphi_i(k-1)\varphi_i(k)). \end{aligned}$$

Во втором и третьем членах второй суммы можно сделать замену индекса суммирования $k \pm 1 \mapsto k'$, что не меняет пределов суммирования, так как $\varphi(N+1), \varphi(-N)$ и соответственно $\delta\varphi(N+1), \delta\varphi(-N)$ равны 0. Подобные переходы типа $\sum_{k=-N}^N x_k = \sum_{k=-N}^N x_{k+1}$ будут и далее встречаться: если они специально не оговорены, то они возможны, поскольку $x_{-N} = x_{N+1} = 0$. После этого видно, что вторая сумма равна 0, так как она равна

$$\sum_{k=-N}^N \delta\varphi_i(k) ((l\varphi_i)(k) - \lambda_i\varphi_i(k)).$$

Прделав аналогичную замену индекса в первой сумме, получим (2).

Проварьируем $ly_{2,i}(k) = \lambda_i y_{2,i}(k)$, умножим на $y_i(k)$ и вычтем из полученного выражения равенство $ly_i(k) = \lambda_i y_i(k)$, умноженное на $\delta y_{2,i}(k)$. В результате получим

$$\begin{aligned} & a_{k+1} \delta y_{2,i}(k+1) y_i(k) - a_{k+1} y_i(k+1) \delta y_{2,i}(k) \\ & + a_k \delta y_{2,i}(k-1) y_i(k) - a_k y_i(k-1) \delta y_{2,i}(k) \\ & = \delta \lambda_i y_{2,i}(k) y_i(k) - \delta a_{k+1} y_{2,i}(k+1) y_i(k) - \delta a_k y_{2,i}(k-1) y_i(k). \end{aligned}$$

Просуммируем данное выражение по k от $-N+1$ до $N+1$. Слева второй и третий члены дадут 0, так как $\delta y_{2,i}(N+1) = \delta y_{2,i}(-N) = 0$, и можно произвести замену индекса суммирования подобно сделанному выше. Слева останется

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N+1}^{N+1} a_{k+1} \delta y_{2,i}(k+1) y_i(k) - a_k y_i(k-1) \delta y_{2,i}(k) \\ & = a_{N+2} \delta y_{2,i}(N+2) y_i(N+1) - a_{-N+1} y(-N) \delta y_{2,i}(-N+1). \end{aligned}$$

Так как $\delta y_{2,i}(-N+1) = 0$, а y_i – решение Флоке с множителем, обратным к $y_2(N+2)$, выражение слева равно $a_{N+2} \delta y_{2,i}(N+2) / y_{2,i}(N+2)$. Видно, что слева стоит вариация F_i , умноженная на a_{N+2} . Теперь для завершения доказательства формулы (3) достаточно подставить в правую часть уже найденное выражение для $\delta \lambda_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как в данном доказательстве упоминается только квадратичная скобка $\{ \cdot, \cdot \}_1$, обозначим ее для простоты через $\{ \cdot, \cdot \}$.

Рассмотрим $\{ \lambda_i, \lambda_j \}$:

$$\begin{aligned} \{ \lambda_i, \lambda_j \} &= \sum_{k=-N}^N \frac{\delta \lambda_i}{\delta a_k} \{ a_k, \lambda_j \} = \sum_{k=-N}^{N-1} \frac{\delta \lambda_i}{\delta a_k} \frac{\delta \lambda_j}{\delta a_{k+1}} \{ a_k, a_{k+1} \} + \frac{\delta \lambda_i}{\delta a_N} \frac{\delta \lambda_j}{\delta a_{-N}} \{ a_N, a_{-N} \} \\ &+ \sum_{k=-N+1}^N \frac{\delta \lambda_i}{\delta a_k} \frac{\delta \lambda_j}{\delta a_{k-1}} \{ a_k, a_{k-1} \} + \frac{\delta \lambda_i}{\delta a_{-N}} \frac{\delta \lambda_j}{\delta a_N} \{ a_{-N}, a_N \}. \end{aligned}$$

После замены индекса суммирования во второй сумме $k-1 \mapsto k'$, учитывая равенства $\varphi(-N) = \varphi(N+1) = 0$, получим

$$\{ \lambda_i, \lambda_j \} = \sum_{k=-N}^N a_k a_{k+1} (\varphi_i(k-1) \varphi_i(k) \varphi_j(k) \varphi_j(k+1) - \varphi_j(k-1) \varphi_j(k) \varphi_i(k) \varphi_i(k+1)).$$

Пусть $W_k^\uparrow = W_k^\uparrow(\varphi_i, \varphi_j)$. После преобразования $a_k \varphi(k-1) = \lambda \varphi(k) - a_{k+1} \varphi(k+1)$ и применения леммы 1 находим, что

$$\{ \lambda_i, \lambda_j \} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} (W_{k+1}^\uparrow - W_{k-1}^\uparrow) W_k^\uparrow,$$

что равно 0, так как $W_{N+1}^\uparrow = W_{-N}^\uparrow = 0$.

Найдем вариацию $2F_j/\lambda_j$, пользуясь результатами леммы 2:

$$\delta \frac{2F_j}{\lambda_j} = \frac{2}{a_{N+2}\lambda_j} \sum_{k=-N}^N \delta a_k (2Z_j \varphi_j(k) \varphi_j(k-1) - y_{2,j}(k) y_j(k-1) - y_{2,j}(k-1) y_j(k)) \\ - \frac{2F_j}{\lambda_j^2} \sum_{k=-N}^N \delta a_k 2\varphi_j(k) \varphi_j(k-1).$$

Аналогично $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ вычислим $\{\lambda_i, 2F_j/\lambda_j\}$, учитывая при этом, что $y_{2,j}$ и y_j – решения Флоке с взаимнообратными множителями, $\varphi_i(-N) = \varphi_i(N+1) = 0$. Заметим, что члены при Z_j и F_j равны 0, так как они пропорциональны $\{\lambda_i, \lambda_j\}$. Опустив их, получим

$$\left\{ \lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j} \right\} = \frac{1}{a_{N+2}\lambda_j} \sum_{k=-N}^N ((y_{2,j}(k) y_j(k-1) + y_j(k) y_{2,j}(k-1)) a_k a_{k+1} \varphi_i(k) \varphi_i(k+1) \\ - (y_{2,j}(k+1) y_j(k) + y_j(k+1) y_{2,j}(k)) a_k a_{k+1} \varphi_i(k) \varphi_i(k-1)).$$

Рассмотрим случай $i = j$. В этом случае после раскрытия скобок два слагаемых взаимно уничтожатся. Выберем C таким, что $y_2 = C\varphi$, и, опустив индексы i, j , получим

$$\frac{C}{a_{N+2}\lambda} \sum_{k=-N}^N a_k a_{k+1} (\varphi(k) y(k-1) \varphi(k+1) \varphi(k) - \varphi(k) y(k+1) \varphi(k) \varphi(k-1)).$$

Прделав преобразование $a_{k+1}\varphi(k+1) = \lambda\varphi(k) - a_k\varphi(k-1)$ и аналогичное преобразование для $a_{k+1}y(k+1)$, получим

$$\frac{C}{a_{N+2}} \sum_{k=-N}^N \varphi^2(k) (a_k y(k-1) \varphi(k) - a_k \varphi(k-1) y(k)) = \frac{C}{a_{N+2}} \sum_{k=-N}^N \varphi^2(k) W_{k-1}(y, \varphi) \\ = \sum_{k=-N}^N \varphi^2(k) = 1,$$

так как $W_{k-1}(y, \varphi) = a_{-N+1}/C$ и $a_{-N+1} = a_{N+2}$.

В случае $i \neq j$ с помощью аналогичных выкладок можно получить, что $\{\lambda_i, 2F_j/\lambda_j\}$ с точностью до множителей равно

$$\sum_{k=-N}^N ((W_{k+1}^\uparrow(y_{2,j}, \varphi_i) - W_{k-1}^\uparrow(y_{2,j}, \varphi_i)) W_{k-1}^\downarrow(y_j, \varphi_i) \\ + (W_{k+1}^\uparrow(y_j, \varphi_i) - W_{k-1}^\uparrow(y_j, \varphi_i)) W_{k-1}^\downarrow(y_{2,j}, \varphi_i)),$$

что равно 0 в силу леммы 1 и равенства $W_k^\uparrow(y_{2,j}, \varphi_i) = 0$ при $k = -N-1, -N, N+1, N$.

Аналогичным образом доказывается и равенство $\{2F_i/\lambda_i, 2F_j/\lambda_j\} = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Координаты $(\lambda_i, 2F_j/\lambda_j^3 : i, j = 1, \dots, N)$ являются канонически сопряженными для кубической скобки, т.е.

$$\{\lambda_i, \lambda_j\}_2 = 0, \quad \left\{ \lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j^3} \right\}_2 = \delta_{i,j}, \quad \left\{ \frac{2F_i}{\lambda_i^3}, \frac{2F_j}{\lambda_j^3} \right\}_2 = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в случае квадратичной скобки, фазовое пространство в нечетном случае имеет размерность $2N + 1$, но далее будет показано, что размерность аннулятора кубической скобки равна 1 (соответственно $2N + 2$ и 2 в четном случае), поэтому это полный набор канонически сопряженных переменных.

Доказательство будет проведено для нечетного случая, так как в четном все аналогично.

ЛЕММА 3. Пусть последовательности A_k, B_k, Q_k таковы, что $A_k + A_{k-1} = B_k - B_{k-1}$, $Q_k = (A_k + B_k)^2/4$. Тогда

$$\sum_{k=-N}^N A_k B_k = Q_N - Q_{-N-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $Q_k - Q_{k-1} = A_k B_k$, откуда немедленно следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть ψ_i, ψ_j — произвольные решения уравнения $l\psi_i = \lambda_i \psi_i$, $i = 1, 2$. Пусть $W_k = W_k(\psi_i, \psi_j)$ и

$$W_k^+ = W_k^+(\psi_i, \psi_j) = a_{k+1}(\psi_i(k)\psi_j(k+1) + \psi_i(k+1)\psi_j(k)).$$

Пусть

$$\mathcal{W}(\psi_i, \psi_j) = \left(\frac{W_N^+}{\lambda_j + \lambda_i} + \frac{W_N}{\lambda_j - \lambda_i} \right)^2 - \left(\frac{W_{-N-1}^+}{\lambda_j + \lambda_i} + \frac{W_{-N-1}}{\lambda_j - \lambda_i} \right)^2.$$

Тогда

$$\sum_{k=-N}^N W_k^+ W_k = \frac{1}{4}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \mathcal{W}(\psi_i, \psi_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из леммы 3, если заметить, что

$$W_k^+ + W_{k-1}^+ = (\lambda_j + \lambda_i)\psi_i(k)\psi_j(k), \quad W_k - W_{k-1} = (\lambda_j - \lambda_i)\psi_i(k)\psi_j(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как в данном доказательстве упоминается только кубическая скобка $\{\cdot, \cdot\}_2$, обозначим ее для простоты через $\{\cdot, \cdot\}$.

Аналогично доказательству теоремы 1 можно найти, что $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ равно

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N a_k a_{k+1} (a_k^2 + a_{k+1}^2) (\varphi_i(k) \varphi_i(k-1) \varphi_j(k+1) \varphi_j(k) \\ & - \varphi_i(k+1) \varphi_i(k) \varphi_j(k) \varphi_j(k-1)) + a_k a_{k+1}^2 a_{k+2} (\varphi_i(k) \varphi_i(k-1) \varphi_j(k+2) \varphi_j(k+1) \\ & - \varphi_i(k+2) \varphi_i(k+1) \varphi_j(k) \varphi_j(k-1)). \end{aligned}$$

После проведения во вторых круглых скобках преобразования $a_{k+2}\varphi(k+2) = \lambda\varphi(k+1) - a_{k+1}\varphi(k)$, сократив в обоих скобках взаимно уничтожающиеся члены, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N a_k^3 a_{k+1} (\varphi_i(k) \varphi_i(k-1) \varphi_j(k+1) \varphi_j(k) - \varphi_i(k+1) \varphi_i(k) \varphi_j(k) \varphi_j(k-1)) \\ & + a_k a_{k+1}^2 (\varphi_i(k) \varphi_i(k-1) \lambda_j \varphi_j(k+1) \varphi_j(k+1) - \varphi_i(k+1) \varphi_i(k+1) \lambda_i \varphi_j(k) \varphi_j(k-1)). \end{aligned}$$

Проведем теперь в первых круглых скобках преобразование $a_k \varphi(k-1) = \lambda \varphi(k) - a_{k+1} \varphi(k+1)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N a_k^2 a_{k+1} (\varphi_i(k) \varphi_i(k) \lambda_i \varphi_j(k+1) \varphi_j(k) - \varphi_i(k) \varphi_i(k+1) \lambda_j \varphi_j(k) \varphi_j(k)) \\ & + a_k a_{k+1}^2 (\varphi_i(k) \varphi_i(k-1) \lambda_j \varphi_j(k+1) \varphi_j(k+1) - \varphi_i(k+1) \varphi_i(k+1) \lambda_i \varphi_j(k) \varphi_j(k-1)). \end{aligned}$$

Прделаем теперь в первых круглых скобках преобразование $a_{k+1} \varphi(k+1) = \lambda \varphi(k) - a_k \varphi(k-1)$, а во вторых $a_k \varphi(k-1) = \lambda \varphi(k) - a_{k+1} \varphi(k+1)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N a_k^3 (\varphi_i(k) \varphi_i(k-1) \lambda_j \varphi_j(k) \varphi_j(k) - \varphi_i(k) \varphi_i(k) \lambda_i \varphi_j(k-1) \varphi_j(k)) \\ & + a_{k+1}^2 (\varphi_i(k) \varphi_i(k) \lambda_i \lambda_j \varphi_j(k+1) \varphi_j(k+1) - \varphi_i(k+1) \varphi_i(k+1) \lambda_i \lambda_j \varphi_j(k) \varphi_j(k)) \\ & - a_{k+1}^3 (\varphi_i(k) \varphi_i(k+1) \lambda_j \varphi_j(k+1) \varphi_j(k+1) - \varphi_i(k+1) \varphi_i(k+1) \lambda_i \varphi_j(k) \varphi_j(k+1)). \end{aligned}$$

В последних круглых скобках сделаем замену индекса суммирования $k+1 \mapsto k'$, после чего видно, что первые и третьи круглые скобки в сумме дают 0.

Преобразуем оставшееся выражение и воспользуемся леммой 4:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N a_{k+1}^2 (\varphi_i^2(k) \lambda_i \lambda_j \varphi_j^2(k+1) - \varphi_i^2(k+1) \lambda_i \lambda_j \varphi_j^2(k)) \\ & = \sum_{k=-N}^N \lambda_i \lambda_j W_k^+(\varphi_i, \varphi_j) W_k(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{4} \lambda_i \lambda_j (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \mathcal{W}(\varphi_i, \varphi_j). \end{aligned}$$

Но из того, что $\varphi(-N) = \varphi(N+1) = 0$, следует $\mathcal{W}(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, откуда получаем первое утверждение теоремы.

Аналогично доказательству теоремы 1 можно вычислить $\{\lambda_i, 2F_j/\lambda_j\}$. При этом получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{N+2}\lambda_j^3} \sum_{k=-N}^N a_k a_{k+1} (a_k^2 + a_{k+1}^2) & ((y_{2,j}(k)y_j(k-1) + y_{2,j}(k-1)y_j(k))\varphi_i(k+1)\varphi_i(k) \\ & - (y_{2,j}(k+1)y_j(k) + y_{2,j}(k)y_j(k+1))\varphi_i(k)\varphi_i(k-1)) \\ & + a_k a_{k+1}^2 a_{k+2} ((y_{2,j}(k)y_j(k-1) + y_{2,j}(k-1)y_j(k))\varphi_i(k+2)\varphi_i(k+1) \\ & - (y_{2,j}(k+2)y_j(k+1) + y_{2,j}(k+1)y_j(k+2))\varphi_i(k)\varphi_i(k-1)). \end{aligned}$$

Проделав преобразования, аналогичные преобразованиям при доказательстве равенства $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$, получим, что последнее выражение равно

$$\frac{1}{a_{N+2}\lambda_j^3} \sum_{k=-N}^N 2a_{k+1}^2 (y_{2,j}(k)y_j(k)\lambda_i\lambda_j\varphi_i^2(k+1) - y_{2,j}(k+1)y_j(k+1)\lambda_i\lambda_j\varphi_i^2(k)).$$

Рассмотрим случай $i = j$. Опустим индексы i, j . Пусть C таково, что $y_2 = C\varphi$. Тогда находим

$$\frac{2C}{a_{N+2}\lambda} \sum_{k=-N}^N a_{k+1}^2 (\varphi(k)y(k)\varphi^2(k+1) - \varphi(k+1)y(k+1)\varphi^2(k)).$$

Проделаем преобразование $a_{k+1}\varphi(k+1) = \lambda\varphi(k) - a_k\varphi(k-1)$:

$$\begin{aligned} \frac{2C}{a_{N+2}\lambda} \sum_{k=-N}^N a_{k+1}\lambda\varphi^2(k) & (y(k)\varphi(k+1) - y(k+1)\varphi(k)) \\ & + a_k\varphi(k)\varphi(k-1)a_{k+1}(y(k+1)\varphi(k) - y(k)\varphi(k+1)) \\ & = \frac{2C}{a_{N+2}\lambda} \sum_{k=-N}^N \lambda\varphi^2(k)W_k(y, \varphi) - a_k\varphi(k)\varphi(k-1)W_k(y, \varphi). \end{aligned}$$

Но $W_k(y, \varphi) = W_{-N}(y, \varphi) = a_{N+2}/C$, откуда

$$\left\{ \lambda_i, \frac{2F_i}{\lambda_i^3} \right\} = 2 \sum_{k=-N}^N \varphi^2(k) - \frac{2}{\lambda} \sum_{k=-N}^N a_k\varphi(k)\varphi(k-1).$$

Первое слагаемое равно 2 в силу нормировки φ . Рассмотрим второе слагаемое. Сделаем в нем преобразование $a_k\varphi(k-1) = \lambda\varphi(k) - a_{k+1}\varphi(k+1)$:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=-N}^N a_k\varphi(k)\varphi(k-1) = \sum_{k=-N}^N \varphi^2(k) - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-N}^N a_{k+1}\varphi(k+1)\varphi(k).$$

Во втором слагаемом можно сделать замену индекса $k+1 \mapsto k'$ и из полученного выражения можно найти, что

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=-N}^N a_k\varphi(k)\varphi(k-1) = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\{\lambda_i, 2F_i/\lambda_i^3\} = 1$.

Рассмотрим теперь случай $i \neq j$. Заменив $y_{2,j}(k)y_j(k)$ в выражении для $\{\lambda_i, 2F_j/\lambda_j^3\}$ выражением $((y_{2,j}(k) + y_j(k))^2 - y_{2,j}^2(k) - y_j^2(k))/2$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i}{a_{N+2}\lambda_j^2} \sum_{k=-N}^N a_{k+1}^2 & ((y_{2,j}(k) + y_j(k))^2 \varphi_i^2(k+1) - (y_{2,j}(k+1) + y_j(k+1))^2 \varphi_i^2(k)) \\ & - a_{k+1}^2 (y_{2,j}(k)^2 \varphi_i^2(k+1) - y_{2,j}(k+1)^2 \varphi_i^2(k)) \\ & - a_{k+1}^2 (y_j(k)^2 \varphi_i^2(k+1) - y_j(k+1)^2 \varphi_i^2(k)). \end{aligned}$$

После этого можно, как и раньше, воспользоваться леммой 4. С точностью до множителя мы получим

$$\mathcal{W}(y_{2,j} + y_j, \varphi_i) - \mathcal{W}(y_{2,j}, \varphi_i) - \mathcal{W}(y_j, \varphi_i).$$

Учитывая определения φ, y, y_2 , можно непосредственным вычислением убедиться, что это выражение равно 0.

Доказательство того, что $\{2F_i/\lambda_i^3, 2F_j/\lambda_j^3\} = 0$, проводится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения F_i видно, что если перейти от λ_i к $-\lambda_i$ и соответственно изменить F_i , то результаты теорем 1 и 2 не изменятся.

Рассмотрим теперь $\Delta(\lambda)$ – след матрицы монодромии U . Пусть $\Pi = \prod_{i=-N}^N a_i$ в нечетном случае и $\Pi = \prod_{i=-N}^{N+1} a_i$ в четном. Определим величины J_i следующим образом: при натуральных i это сумма всевозможных произведений i штук различных a_k^2 , в которых не встречаются a с соседними номерами (с учетом периодичности), а $J_0 = 1$.

ЛЕММА 5. *Выполнено*

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} \sum_{i=0}^N (-1)^i \lambda^{2N+1-2i} \frac{J_i}{\Pi}, & \text{в нечетном случае,} \\ \sum_{i=0}^{N+1} (-1)^i \lambda^{2N+2-2i} \frac{J_i}{\Pi}. & \text{в четном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим U в базисе y_1, y_2 . В нечетном случае, например, $\text{tr } U = y_1(N+1) + y_2(N+2)$. Пользуясь уравнением $ly_k = \lambda y_k$, $k = 1, 2$, как рекуррентным соотношением, можно найти $y_1(N+1), y_2(N+2)$ и получить утверждение леммы.

Пусть $I_k = J_k/\Pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко убедиться, что $I_k = 0$ при $k \geq N+1$ в нечетном случае и $k \geq N+2$ в четном.

ТЕОРЕМА 3. *Выражения I_k удовлетворяют соотношениям $\{I_0, f\}_1 = 0$, $\{I_k, f\}_2 = -\{I_{k+1}, f\}_1$, $\{I_N, f\}_2 = 0$, а в четном случае $\{I_{N+1}, f\}_2 = \{I_{N+1}, f\}_1 = 0$, где f – произвольная функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем величины $\check{J}_k(n)$ и $\hat{J}_k(n)$ следующим образом: $\check{J}_k(n)$ равно выражению J_k , из которого выкинуты все слагаемые, содержащие $a_n, a_{n\pm 1}$ (с учетом периодичности); $\hat{J}_k(n)$ равно выражению J_k , из которого выкинуты все слагаемые, содержащие $a_n, a_{n\pm 1}, a_{n\pm 2}$ (с учетом периодичности). Ясно, что $\partial J_k / \partial a_n = 2a_n \check{J}_{k-1}(n)$, причем для того чтобы это равенство сохранялось и при $k = 0, 1$, положим $\check{J}_{-1}(n) = 0$, $\check{J}_0(n) = 1$. Отметим также тождество

$$J_k - \check{J}_k(n) = a_n^2 \check{J}_{k-1}(n) + a_{n-1}^2 \check{J}_{k-1}(n-1) + a_{n+1}^2 \check{J}_{k-1}(n+1) - a_{n-1}^2 a_{n+1}^2 \hat{J}_{k-2}(n), \quad (4)$$

причем для того чтобы это равенство сохранялось и при $k = 0, 1, 2$, положим $\hat{J}_{-2}(n) = 0$, $\hat{J}_{-1}(n) = 0$, $\hat{J}_0(n) = 1$. Отметим также тождество $\partial \Pi / \partial a_n = \Pi / a_n$.

Теорему достаточно доказать для $f = c_n = a_n^2$. Докажем первое утверждение:

$$\left\{ \frac{J_0}{\Pi}, c_n \right\}_1 = \left\{ \frac{1}{\Pi}, c_n \right\}_1 = -\frac{1}{\Pi^2} \frac{\Pi}{2} (a_n^2 - a_n^2) = 0.$$

Перейдем ко второму утверждению. Можно подсчитать, что

$$\begin{aligned} -\left\{ \frac{J_{k+1}}{\Pi}, c_n \right\}_1 &= -\frac{a_n^2}{\Pi} (a_{n-1}^2 \check{J}_k(n-1) - a_{n+1}^2 \check{J}_k(n+1)), \\ \left\{ \frac{J_k}{\Pi}, c_n \right\}_2 &= \frac{a_n^2}{\Pi} J_k (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) + \frac{a_n^2}{\Pi} (\check{J}_{k-1}(n-1) a_{n-1}^2 (a_{n-1}^2 + a_n^2) \\ &\quad - \check{J}_{k-1}(n+1) a_{n+1}^2 (a_{n+1}^2 + a_n^2) + \check{J}_{k-1}(n-2) a_{n-2}^2 a_{n-1}^2 \\ &\quad - \check{J}_{k-1}(n+2) a_{n+2}^2 a_{n+1}^2) \\ &= \frac{a_n^2}{\Pi} (a_{n+1}^2 (J_k - \check{J}_{k-1}(n+1) a_{n+1}^2 - \check{J}_{k-1}(n+1) a_n^2 - \check{J}_{k-1}(n+2) a_{n+2}^2) \\ &\quad - a_{n-1}^2 (J_k - \check{J}_{k-1}(n-1) a_{n-1}^2 - \check{J}_{k-1}(n-1) a_n^2 - \check{J}_{k-1}(n-2) a_{n-2}^2)). \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользовавшись тождеством (4) при $n \pm 1$, получим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{J_k}{\Pi}, c_n \right\}_2 &= \frac{a_n^2}{\Pi} (a_{n+1}^2 (\check{J}_k(n+1) - \check{J}_{k-1}(n+1) a_n^2 + \check{J}_{k-1}(n) a_n^2 - \hat{J}_{k-2}(n+1) a_n^2 a_{n+2}^2) \\ &\quad - a_{n-1}^2 (\check{J}_k(n-1) - \check{J}_{k-1}(n-1) a_n^2 + \check{J}_{k-1}(n) a_n^2 - \hat{J}_{k-2}(n-1) a_n^2 a_{n-2}^2)). \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (5) и тождествами

$$\check{J}_{k-1}(n \mp 1) - \check{J}_{k-1}(n) = a_{n\pm 1}^2 \hat{J}_{k-2}(n) - a_{n\mp 2}^2 \hat{J}_{k-2}(n \mp 1),$$

получим

$$\begin{aligned} -\left\{ \frac{J_{k+1}}{\Pi}, c_n \right\}_1 + \frac{a_n^2}{\Pi} (a_n^2 a_{n+1}^2 (-a_{n-1}^2 \hat{J}_{k-2}(n)) - a_n^2 a_{n-1}^2 (-a_{n+1}^2 \hat{J}_{k-2}(n))) \\ = -\left\{ \frac{J_{k+1}}{\Pi}, c_n \right\}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, второе утверждение теоремы доказано. Заметим, что оно верно даже при J_k или J_{k+1} равных 0.

Рассмотрим четвертое утверждение теоремы. Заметим, что

$$\frac{J_{N+1}}{\Pi} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} + \frac{\Pi_2}{\Pi_1},$$

$$\Pi_1 = a_{-N}a_{-N+2} \cdots a_{N-2}a_N, \quad \Pi_2 = a_{-N+1}a_{-N+3} \cdots a_{N-1}a_{N+1}.$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что для любой функции f справедливости равенства $\{\Pi_1, f\}_1 = \{\Pi_2, f\}_1 = 0$, $\{\Pi_1/\Pi_2, f\}_2 = 0$, откуда следует четвертое утверждение леммы.

В четном случае третье утверждение следует из четвертого, а в нечетном из того, что $J_{N+1} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В нечетном случае аннулятор квадратичной скобки порождается функцией I_0 , а кубической – функцией I_N , поэтому обе скобки однократно вырождены. В четном случае аннулятор квадратичной скобки порождается функциями I_{N+1} и I_0 , а аннулятор кубической скобки порождается функциями I_{N+1} и I_N , поэтому обе скобки двукратно вырождены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нечетном случае утверждение следует из теоремы 3. В четном случае можно заметить, что функция I_{N+1} независима от функций I_N и I_0 , после чего утверждение также следует из теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Функции I_k находятся в инволюции относительно обеих скобок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении:

$$\begin{aligned} \{I_k, I_l\}_1 &= -\{I_k, I_{l-1}\}_2 = \{I_{l-1}, I_k\}_2 = -\{I_{l-1}, I_{k+1}\}_1 \\ &= \{I_{k+1}, I_{l-1}\}_1 = \cdots = \{I_{k+l}, I_0\}_1 = 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Интегралы $I_0, \dots, I_N$ совпадают с интегралами, получаемыми процедурой Магри [10] для пары скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1, \{\cdot, \cdot\}_2$.

ЛЕММА 6. Поток, порождаемый I_1 с помощью квадратичной скобки, на ее симплектических листах совпадает с точностью до множителя с потоком Вольтерра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симплектические листы задаются уравнениями $1/\Pi = C$ в нечетном случае и $1/\Pi = C$, $J_{N+1}/\Pi = C_1$ в четном. Поток с гамильтонианом I_1 имеет вид

$$\dot{c}_k = \left\{ \frac{J_1}{\Pi}, c_k \right\}_1 = \frac{c_k^2}{\Pi} (c_{k-1}^2 - c_{k+1}^2) = -C c_k^2 (c_{k+1}^2 - c_{k-1}^2),$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 6 объясняет интерес к потокам, порождаемым I_k . Заметим, что согласно лемме 6 и следствию 2 из леммы 5 имеет место интегрируемость системы Вольтерра. Рассмотрим потоки, порождаемые интегралами $I_1, \dots, I_N$ с помощью квадратичной скобки и, что то же самое, интегралами $-I_0, \dots, -I_{N-1}$ с помощью кубической скобки.

Заметим, что участвующий в определении $F_k = \ln(|\rho_k|)$ модуль необходим только для вещественности F_k , и его можно опустить без потери каких-либо результатов. Опустим его для простоты выкладок и будем использовать для квадратичной скобки

канонически сопряженные переменные $(\pm \mathcal{F}_k = (2 \ln \rho_k)/\lambda_k, \lambda_k)$, а для кубической скобки канонически сопряженные переменные $(\pm \mathcal{G}_k = (2 \ln \rho_k)/\lambda_k^3, \lambda_k)$. Знак $\pm$ возникает от неоднозначности выбора между ρ_k и $1/\rho_k$ и зависит от того, на каком листе лежит соответствующий λ_k полюс P_k .

Известно, что производящая функция канонического преобразования $p, q \mapsto I, \varphi$ перехода к переменным “действие-угол” I, φ выглядит так:

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q p(I, q) dq,$$

причем $\varphi = \partial S(I, q)/\partial I$. Мы же воспользуемся не переменными “действие”, а инволютивными интегралами I_k :

$$S(I_1, \dots, I_N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int_{\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{N,0}}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N} \sum_{k=1}^N \pm \mathcal{F}_k d\lambda_k$$

для квадратичной скобки и, аналогично,

$$S(-I_0, \dots, -I_{N-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int_{\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{N,0}}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N} \sum_{k=1}^N \pm \mathcal{G}_k d\lambda_k$$

для кубической скобки; при этом функции $\partial S/\partial I_k$ для квадратичной скобки и $\partial S/\partial(-I_k)$ для кубической скобки задают координаты на торе Лиувилля, отличающиеся от переменных “угол” на аффинное преобразование. Рассмотрим на кривой Γ базис голоморфных дифференциалов, инвариантных относительно инволюции σ следующего вида:

$$\omega_k = \begin{cases} \frac{\lambda^{2k+1} d\lambda}{y} & \text{в четном случае,} \\ \frac{\lambda^{2k} d\lambda}{y} & \text{в нечетном случае,} \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Пусть $Q_1, \dots, Q_N$ – набор точек на Γ . Определим модифицированное отображение Абеля $A: S^N \Gamma \rightarrow J(\Gamma/\sigma)$ следующим образом:

$$A^k(Q_1, \dots, Q_N) = \sum_{j=1}^N \int_P^{Q_j} \omega_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где P – некая фиксированная точка Γ .

ТЕОРЕМА 4. Координаты $\partial S/\partial I_k$ для квадратичной скобки и $\partial S/\partial(-I_k)$ для кубической скобки представляют собой с точностью до знака модифицированное отображение Абеля от $(P_1, \dots, P_N)$:

$$\frac{\partial S}{\partial I_k} = (-1)^k A^{N-k}(P_1, \dots, P_N) = \sum_{j=1}^N \int_P^{P_j} (-1)^k \omega_{N-k}, \quad k = 1, \dots, N,$$

для квадратичной скобки и

$$\frac{\partial S}{\partial(-I_k)} = (-1)^{k-1} A^{N-k-1}(P_1, \dots, P_N) = \sum_{j=1}^N \int_P^{P_j} (-1)^{k-1} \omega_{N-k-1},$$

$$k = 0, \dots, N-1,$$

для кубической скобки, где P – некая фиксированная точка, а P_j – вышеописанные полюсы $\psi(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только случай квадратичной скобки при нечетном периоде (остальные случаи аналогичны):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial I_k} &= \frac{\partial}{\partial I_k} \left(\sum_{j=1}^N \int_{\lambda_{j,0}}^{\lambda_j} \pm \mathcal{F}_j d\lambda_j \right) \Big|_{I_0=\text{const}} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\lambda_{j,0}}^{\lambda_j} \frac{2}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial I_k} \ln \left(\frac{\Delta(\lambda_j)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta(\lambda_j))^2}{4} - 1} \right) d\lambda_j \Big|_{I_0=\text{const}} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\lambda_{j,0}}^{\lambda_j} \frac{2}{\lambda_j} \frac{1}{\pm \sqrt{(\Delta(\lambda_j))^2/4 - 1}} \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(\lambda_j)}{\partial I_k} d\lambda_j \Big|_{I_0=\text{const}} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\lambda_{j,0}}^{\lambda_j} \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\pm \sqrt{R(\lambda_j)}} (-1)^k \lambda_j^{2N+1-2k} d\lambda_j = \sum_{j=1}^N \int_{\lambda_{j,0}}^{\lambda_j} (-1)^k \frac{\lambda_j^{2(N-k)}}{y} d\lambda_j, \end{aligned}$$

где знак плюс или минус соответствует листу, на котором лежит P_j .

Из полученного выражения, используя лемму 5, легко получить требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко заметить, что если заменить λ_j на $-\lambda_j$ и соответственно P_j на $P_{N+j} = \sigma(P_j)$, то результаты теоремы 4 не изменятся.

Автор хотел бы выразить свою признательность А. П. Веселову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [2] Damianou P. A. The Volterra model and its relation to the Toda lattice // Phys. Lett. A. 1991. V. 155. № 2–3. P. 126–132.
- [3] Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 2. С. 543–555.
- [4] Кас M., van Moerbeke P. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices // Adv. Math. 1975. V. 16. P. 160–169.
- [5] Flaschka H., McLaughlin D. W. Canonically conjugate variables for the Korteweg–de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions // Progr. Theoret. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 438–456.
- [6] Верещагин В. Л. Спектральная теория однофазных решений цепочки Вольтерра // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 145–148.
- [7] Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 79–136.
- [8] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
- [9] Веселов А. П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы // Функцион. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 2. С. 1–13.
- [10] Magri F. A simple model of integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1156–1162.