Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Садов, О ширине зон параметрического резонанса для уравнений на торе, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 129–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 07:38:09

УДК 517.925.52

О ШИРИНЕ ЗОН ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НА ТОРЕ

С. Ю. Садов

Даны новые доказательства теоремы о ширине запрещенных зон для уравнения Хилла с малым потенциалом и теоремы о ширине зон параметрического резонанса для дифференциального уравнения первого порядка на торе. Эти результаты являются частными случаями теоремы, доказанной в работе при помощи метода нормальной формы.

Библиография: 7 названий.

Введение. Настоящая работа является вариацией на тему работы В. И. Арнольда [1]. Напомним основные результаты [1].

ТЕОРЕМА А [1, теорема 7]. Для оператора Хилла

$$Hu(t) = -\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon a(t)u$$

с произвольным тригонометрическим многочленом степени p с комплексными коэффициентами

$$a(t) = \sum_{|j| \leq p} a_j e^{ijt}$$

и граничными условиями одного из двух видов:

- а) $u(t + 2\pi) = u(t)$,
- б) $u(t + 2\pi) = -u(t)$,

величина расщепления двукратного собственного числа $\lambda = n^2$, где $n \geq 1$ целое в случае а) и $n \geq 1/2$ полуцелое в случае б), допускает при малых ε оценку сверху

$$|\Delta\lambda| \leq C|\varepsilon|^r, \quad r = \left\lceil \frac{2n}{p} \right\rceil.$$

Здесь $\lceil s \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq s\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01411.

ТЕОРЕМА Б [1, теорема 8]. Пусть целые m и $n \geq 1$ взаимно просты. Для отображения окружности на себя $x \mapsto x + a + \varepsilon f(x)$, где $f(x)$ – тригонометрический многочлен степени p , число вращения Пуанкаре равно m/n при малых ε , если $a \in [A_-(\varepsilon), A_+(\varepsilon)]$, где $A_{\pm}$ – аналитические функции в окрестности $\varepsilon = 0$, зависящие от a и $f(x)$, разность которых допускает оценку

$$A_+(\varepsilon) - A_-(\varepsilon) \leq C|\varepsilon|^r, \quad r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil. \quad (1)$$

Во введении к [1] В. И. Арнольд пишет: “Я не пытался формулировать единую абстрактную теорему, из которой вытекали бы приведенные выше свойства резонансных зон сразу и для уравнений Хилла типа Матье, и для отображений окружности на себя, хотя алгебраическая причина степенного убывания ширины зоны с амплитудой модуляции в обоих случаях, видимо, одинакова (гипотеза, что такая общая теория должна существовать, была сообщена мне И. М. Гельфандом . . . в 1959 г.).”

Цель настоящей публикации – прояснить указанную аналогию между линейной спектральной задачей (в теореме А) и задачей о параметрическом резонансе в нелинейной системе (в теореме Б). При стремлении довести аналогию результатов и некоторых вычислений в доказательствах теорем А и Б до их объединения в рамках единого формализма имеется препятствие, состоящее в том, что динамика в теореме А непрерывна, а в теореме Б дискретна. Наше обобщение охватывает поэтому теорему А и следующую теорему В, являющуюся аналогом теоремы Б для систем с непрерывным временем.

ТЕОРЕМА В [2, с. 50]. Для дифференциального уравнения на торе

$$\frac{dx}{dt} = a + \varepsilon f(x, t), \quad f(x + 2\pi, t) = f(x, t + 2\pi) = f(x, t), \quad (2)$$

где $f(x, t)$ – тригонометрический многочлен по x степени p , число вращения равно m/n при малых ε , если $a \in [A_-(\varepsilon), A_+(\varepsilon)]$, при этом справедлива оценка (1) ширины резонансной зоны.

Эта теорема – частный случай (для тора размерности 2) теоремы О. Г. Галкина [3] (см. также [4], [5]).

Основной результат настоящей работы – теорема 1 – имеет дело с дифференциальным уравнением первого порядка на торе, содержащим, в отличие от (2), два малых параметра. Преобразование уравнения (2) к такому виду совсем просто, а по отношению к уравнению Хилла наше уравнение есть некоторая модификация соответствующего уравнения Риккати. Доказательство теоремы 1 мы проводим при помощи приведения уравнения к нормальной форме. Этот же метод использован в [3]–[5] для исследования сечений резонансных зон (или областей фазового захвата) в случае векторных полей, близких к постоянным, на многомерных торах. Поскольку теорема 1 не является формальным следствием результатов [3]–[5], ее доказательство приводится полностью.

Интересно, что алгебраическая причина степенного убывания ширины зоны с амплитудой модуляции для теорем А и В не совсем одинакова. При сведении этих теорем к теореме 1 необходимо проверить условие ii) последней. В обоих случаях мы имеем некоторое исходное множество целых чисел и нужно найти такое минимальное натуральное r , что среди сумм r элементов исходного множества содержится ненулевое кратное “знаменателя числа вращения” (n в теореме В и $2n$ в теореме А). В случае теоремы А

оценка для r получается “метрически”: исходное множество лежит на отрезке $[-p, p]$. В ситуации теоремы В аналогичная оценка получается “арифметически”: образ исходного множества по модулю n лежит на отрезке $[-p, p]$.

Отметим, что выкладки, аналогичные проведенным в доказательстве теоремы 1 или в доказательстве леммы 1 в [4], позволяют легко вывести формальную асимптотику “ширины зон параметрического резонанса” для так называемых натуральных неавтономных гамильтоновых систем с одной степенью свободы, периодических по координате и времени:

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = f(x, t), \quad f(x + 2\pi, t) = f(x, t + 2\pi) = f(x, t).$$

В этом случае резонансные зоны на цилиндре с координатами $(x \bmod 2\pi, y)$ выглядят как островки устойчивости вокруг периодических точек отображения Пуанкаре

$$(x(t), p(t)) \mapsto (x(t + 2\pi), p(t + 2\pi)).$$

Границы этих островков – фракталы, образованные разрушенными сепаратрисами, и строгая интерпретация вычислений ширины резонансных зон представляет трудности [6].

1. Общая теорема. Рассмотрим дифференциальное уравнение на торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ с двумя малыми параметрами

$$\frac{dx}{dt} = \delta K_{01}(x, t) + \varepsilon K_{10}(x, t). \quad (3)$$

Функции K_{01} и K_{10} – периодические с периодом 2π по каждой из переменных x и t и аналитические в окрестности $\mathbb{R}^2$. Для функции $U(x, t)$ на $\mathbb{T}^2$ носитель ее преобразования Фурье – это подмножество $\text{Fsupp } U \subset \mathbb{Z}^2$ индексов ненулевых коэффициентов ряда Фурье

$$U(x, t) = \sum u_{km} e^{i(kx + mt)}.$$

Сумма подмножеств в $\mathbb{Z}^2$ определяется как множество сумм элементов; будем использовать обозначения типа $m \cdot \text{Fsupp } U$, когда множества-слагаемые совпадают.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ значений (ε, δ) , при которых уравнение (3) имеет 2π -периодическое решение. Обозначим

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \{\delta : (\varepsilon, \delta) \in \mathcal{P}\}$$

сечение множества $\mathcal{P}$ на уровне ε .

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции K_{01} и K_{10} в уравнении (3) вещественны и удовлетворяют условиям:

- i) $\text{Fsupp } K_{01} \ni (0, 0)$;
- ii) множества $j \cdot \text{Fsupp } K_{10} + l \cdot \text{Fsupp } K_{01}$ не содержат точек вида $(k, 0)$, $k \neq 0$ при $0 < j + l < r$.

Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ множество $\mathcal{P}(\varepsilon)$ либо состоит из одной точки, либо является отрезком длины, не превосходящей $C|\varepsilon|^r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда $K_{01}, K_{10}, \varepsilon, \delta$ в (3) могут быть комплексными, обозначим через $\mathcal{P}(\varepsilon, M)$ множество тех $\delta \in \mathbb{C}$, для которых уравнение (3) имеет 2π -периодическое решение $x(t)$ и $|\operatorname{Im} x(t)| \leq M$. Утверждение теоремы 1 модифицируется следующим образом: если выполнены условия i), ii), то при достаточно малых $|\varepsilon|$ множество $\mathcal{P}(\varepsilon, M) \subset \mathbb{C}$ является непрерывным образом окружности и его диаметр не превосходит $C|\varepsilon|^r$. Здесь C зависит от K_{01}, K_{10}, M , но не от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение Π за период, которое начальному условию $x = x(0)$ для уравнения (3) ставит в соответствие значение $\Pi(x; \varepsilon, \delta) = x(2\pi)$. Начальные данные 2π -периодических решений суть решения уравнения $\Psi(x; \varepsilon, \delta) \equiv \Pi(x; \varepsilon, \delta) - x = 0$. Имеем $\Psi(x; 0, 0) \equiv 0$. Ниже мы выведем из условий теоремы, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \delta}(x; 0, 0) \neq 0. \quad (4)$$

Следовательно, при малом ε и любом $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ уравнение $\Psi(x; \varepsilon, \delta) = 0$ однозначно разрешимо относительно δ . Очевидно, решение δ непрерывно зависит от x . Итак, множество $\mathcal{P}(\varepsilon)$ является непрерывным образом окружности $\{x \bmod 2\pi\}$ и лежит на вещественной прямой. Следовательно, $\mathcal{P}(\varepsilon)$ – точка или отрезок.

В комплексном случае (в условиях замечания 1) $\mathcal{P}(\varepsilon)$ – непрерывный образ кольца $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-M, M]$.

Идея оценки длины множества $\mathcal{P}(\varepsilon)$ или диаметра $\mathcal{P}(\varepsilon, M)$ состоит в приведении уравнения (3) к нормальной форме посредством замены переменной

$$x = y + H(t, y; \varepsilon, \delta) \equiv y + \sum_{j, k \geq 1} \varepsilon^j \delta^k H_{jk}(t, y). \quad (5)$$

Наша цель – получить автономное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y; \varepsilon, \delta) \equiv \sum_{j, k \geq 1} \varepsilon^j \delta^k \Phi_{jk}(y). \quad (6)$$

Как известно, такую замену, вообще говоря, можно найти лишь в классе формальных рядов. Эти ряды определяют асимптотику истинных решений. Мы покажем, что в условиях теоремы нормальная форма системы (3) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \Phi_{01}\delta + \Xi(\varepsilon, \delta) + R_r(y; \varepsilon, \delta), \quad (7)$$

где $\Phi_{01} = \text{const} \neq 0$, $\Xi(\varepsilon, \delta) = O(|\varepsilon| + |\delta|^2)$ – полином суммарной степени не выше $r - 1$ по ε, δ с не зависящими от y коэффициентами, и $R_r(y; \varepsilon, \delta) = O((|\varepsilon| + |\delta|)^r)$ (в формальном смысле). Откладывая пока доказательство этого факта, выведем из него утверждение теоремы.

Рассмотрим укорочение нормализующего преобразования (5), сохраняя в нем члены суммарной степени $< r$ по ε, δ . Легко видеть, что такая замена переменной приведет опять к уравнению вида (7), только теперь R_r будет не формальным рядом, начинающимся с членов суммарной степени r , а функцией от $y, t, \varepsilon, \delta$ с такой же асимптотической оценкой. Для преобразования Π за период и функции $\Psi = \Pi - x$ имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta}(x, 0, 0) = \frac{\partial \Psi}{\partial \delta}(x, 0, 0) = 2\pi\Phi_{01},$$

откуда следует неравенство (4) и оценка $\delta = O(\varepsilon)$ решения уравнения $\Psi(x; \varepsilon, \delta) = 0$. Далее, диаметр множества $\mathcal{P}(\varepsilon)$ равен максимальному расстоянию между решениями этого уравнения с двумя разными $x \in [0, 2\pi)$, т.е. не превосходит $2\pi \max |\partial\delta/\partial x|$. Но $\partial\delta/\partial x = \partial\delta/\partial y(1+o(1))$, а поскольку правая часть уравнения (7) постоянна с точностью до $O((|\varepsilon| + |\delta|)^r)$, имеем

$$\frac{\partial\delta}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi/\partial y}{\partial\Psi/\partial\delta} = O(R_r) = O(\varepsilon^r),$$

что и требовалось.

Перейдем к доказательству утверждения о структуре (7) нормальной формы. Выпишем рекуррентные соотношения для коэффициентов в (5), (6). На этом этапе удобно собрать вместе члены, однородные в совокупности по ε, δ . Обозначим

$$K \equiv K_{(1)} = \delta K_{01}(x, t) + \varepsilon K_{10}(x, t), \quad H_{(l)} = \sum_{j+k=l} H_{jk}, \quad \Phi_{(l)} = \sum_{j+k=l} \Phi_{jk}.$$

Введем еще обозначения: $Q = (q_1, q_2, \dots)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами, $|Q| = \sum q_j$, $Q! = \prod q_j!$, $\langle Q \rangle = \sum j q_j$, $H^Q = \prod H_{(j)}^{q_j}$, $\partial_y = \partial/\partial y$. В этих обозначениях член, однородный степени l по ε, δ в выражении $K(y + H, t; \varepsilon, \delta)$, имеет вид

$$W_{(l)}(y, t; \varepsilon, \delta) = \sum_{\langle Q \rangle = l-1} \frac{1}{Q!} \partial_y^{|Q|} K(y, t; \varepsilon, \delta) \cdot H^Q.$$

Подставляя теперь (5) и (6) в (3) и приравнивая члены степени однородности l , находим

$$\frac{\partial H_{(1)}}{\partial t} + \Phi_{(1)} = K, \quad \frac{\partial H_{(l)}}{\partial t} + \Phi_{(l)} = W_{(l)} - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\partial H_{(l-j)}}{\partial y} \Phi_j, \quad l > 1. \quad (8)$$

В процессе рекуррентных вычислений приходится многократно решать гомологическое уравнение теории усреднения вида

$$\frac{\partial U(y, t)}{\partial t} + \varphi(y) = V(y, t).$$

Здесь $V(y, t)$ – функция на торе, т.е. 2π -периодическая по обоим переменным, и решение также ищется в классе функций на торе. Легко выписать ответ в явном виде: если $V = \sum v_{jk} e^{i(jy+kt)}$, то

$$\varphi(y) = \sum_j v_{j0} e^{ijy}, \quad U(y, t) = \sum_{j, k: k \neq 0} (ik)^{-1} v_{jk} e^{i(jy+kt)}.$$

Для нас важно, что носители преобразований Фурье функций U и φ содержатся в носителе ПФ функции V . Из (8) по индукции получаем

$$\text{Fsupp } H_{(j)} \subset j \cdot \text{Fsupp } K, \quad \text{Fsupp } \Phi_{(j)} \subset j \cdot \text{Fsupp } K \cap \{(k, 0) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Теперь из условия ii) теоремы следует, что $\text{Fsupp } \Phi_{(j)} = \{(0, 0)\}$ при $j < r$, т.е. зависимость правой части нормальной формы от y начинается не раньше, чем с членов r -го порядка. Наконец, Φ_{01} есть свободный член ряда Фурье функции K_{01} , и он отличен от нуля по условию i) теоремы. Это завершает доказательство структурной формулы (7) и теоремы.

2. Вывод теоремы А из теоремы 1. Для простоты будем считать возмущающий многочлен $a(t)$ в теореме А вещественным. При этом наша редукция имеет простой и красивый геометрический смысл.

Если записать уравнение Хилла

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} + \varepsilon a(t)u = \lambda u \quad (9)$$

в полярных координатах $bu = \rho \cos \theta$, $\dot{u} = \rho \sin \theta$, где b – неопределенный пока параметр, то уравнение для угла θ отделяется и имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} - b \cos^2 \theta + b^{-1}(\varepsilon a(t) - \lambda) \sin^2 \theta = 0. \quad (10)$$

(Такое преобразование называется *преобразованием Прюфера* [7].) Легко видеть, что решения уравнения (10), удовлетворяющие условию

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с Флоке-решениями уравнения (9), имеющими вещественные мультипликаторы, т.е. с решениями, для которых $u(t+2\pi) = \mu u(t)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Положительным мультипликаторам соответствует четное число k полуоборотов, а отрицательным – нечетное.

Поэтому любое λ , при котором уравнение (10) имеет решение со свойством (11), принадлежит запрещенной зоне уравнения Хилла или является собственным значением спектральной задачи с граничным условием а) или б) (см. формулировку теоремы А). При $\varepsilon = 0$ кратному целому или полужелому собственному значению n в теореме А соответствует $k = 2n$ в (11).

Положим $b = n$, $x(t) = \theta(t) - nt$, $\lambda = n^2 + \delta$. Тогда λ принадлежит n -й запрещенной зоне (возможно, вырожденной в точку) для уравнения (9) в том и только том случае, когда относительно x уравнение

$$\frac{dx}{dt} + n^{-1}(\varepsilon a(t) - \delta) \sin^2(x + nt) = 0 \quad (12)$$

имеет 2π -периодическое решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае комплексного возмущения $a(t)$ с помощью теоремы о неявной функции можно показать, что паре собственных значений уравнения Хилла, рождающихся из двукратного собственного значения, и отвечающим им собственным функциям, соответствуют пара малых значений δ и 2π -периодические решения уравнения (12).

Уравнение (12) – частный случай уравнения (3) из предыдущего раздела. Здесь

$$K_{01} = -n^{-1} \sin^2(x + nt), \quad K_{10} = n^{-1} a(t) \sin^2(x + nt).$$

Носитель преобразования Фурье функции K_{01} состоит из трех точек: $(0, 0)$ и $\pm(2, 2n)$. Условие i) теоремы 1, следовательно, выполнено. Далее, $\text{Fsupp } K_{10} \subset \text{Fsupp } K_{01} + \{(0, m) : |m| \leq p\}$ лежит в полосе $(k, m) : |m - nk| \leq p$ (напомним, что p – степень тригонометрического многочлена $a(t)$). Эта полоса пересекает ось $m = 0$ по отрезку $[-p/n, p/n]$. Кратная сумма $j \cdot \text{Fsupp } K$ лежит в полосе, пересекающей ось $m = 0$ по отрезку $[-jp/n, jp/n]$. Точки $(\pm 1, 0)$ не принадлежат множествам $j \cdot \text{Fsupp } K$ из соображений четности. Значит, множество $j \cdot \text{Fsupp } K$ может содержать точки вида $(k, 0)$ с $k \neq 0$ только при $jp/n \geq 2$. Таким образом, условие ii) теоремы 1 выполнено с $r = [2n/p]$, и мы получаем утверждение теоремы А.

3. Вывод теоремы В из теоремы 1. Уравнение (2) приводится к виду (3) подстановкой

$$a = \frac{m}{n} + \delta, \quad x = y + \frac{m}{n}t, \quad t = n\tau.$$

При этом получается уравнение

$$\frac{dy}{d\tau} = \delta n + \varepsilon n f(y + m\tau, n\tau). \quad (13)$$

Число вращения уравнения (2) равно m/n тогда и только тогда, когда число вращения уравнения (13) равно нулю, т.е. когда (13) имеет 2π -периодическое решение.

Проверим выполнение условий теоремы 1 для уравнения (13). Здесь $K_{01} = n$, так что $\text{Fsupp } K_{01} = \{(0, 0)\}$ и условие i) выполнено. Далее,

$$K_{10}(y, \tau) = n f(y + m\tau, n\tau) = n \sum_{l, j: |l| \leq p} f_{lj} e^{ily + i(lm + jn)\tau},$$

так что носитель преобразования Фурье функции K_{10} есть подмножество решетки, порожденной векторами $\vec{e}_1 = (1, m)$ и $\vec{e}_2 = (0, n)$, причем для $\vec{Q} = l\vec{e}_1 + j\vec{e}_2 \in \text{Fsupp } K_{10}$ всегда $|l| \leq p$. Предположим, что r -кратная сумма $r \cdot \text{Fsupp } K_{10}$ содержит точку $(k, 0)$, $k \neq 0$. Имеем

$$(k, 0) = \sum_1^r (l_i \vec{e}_1 + j_i \vec{e}_2), \quad |l_i| \leq p.$$

Отсюда $\sum l_i = k$, $mk + \sum j_i \cdot n = 0$. Следовательно, mk делится на n , и поскольку m и n взаимно просты, а $k \neq 0$, то $|k| \geq n$. Но k есть сумма r слагаемых l_i , каждое из которых не превосходит p , так что $pr \geq n$, т.е. выполнено условие ii) теоремы 1 при $r = \lceil n/p \rceil$. По теореме 1 получаем утверждение теоремы В.

Я благодарен М. Ф. Кондратьевой, В. В. Сидоренко и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье // УМН. 1983. Т. 38. № 4. С. 189–203.
- [2] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Динамические системы. I. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985.
- [3] Galkin O. G. Resonance regions for Mathieu type dynamical systems on a torus // Phys. D. 1989. V. 39. P. 287–298.
- [4] Галкин О. Г. Фазовый захват для векторных полей на торе типа Матье // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 1. С. 1–8.
- [5] Галкин О. Г. Фазовый захват для отображений тора типа Матье // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 27. № 1. С. 1–11.
- [6] Садов С. Ю. Плоские движения почти симметричного спутника относительно центра масс с рациональными числами вращения. Препринт. Т. 31. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1997.
- [7] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: sadov@spp.keldysh.ru

Поступило
27.01.97
Исправленный вариант
17.07.97