Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Максимальные подмодули и локально совершенные кольца, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 136–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:04:33

УДК 512

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДМОДУЛИ И ЛОКАЛЬНО СОВЕРШЕННЫЕ КОЛЬЦА

А. А. Туганбаев

Кольцо, над которым каждый ненулевой правый (левый) модуль обладает максимальным подмодулем, называется правым (левым) кольцом Басса. Для широкого класса колец, включающего в себя все кольца, являющиеся конечнопорожденными модулями над своими центрами, доказана эквивалентность следующих условий:

- (1) A – правое кольцо Басса;
- (2) A – левое кольцо Басса;
- (3) $A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – t -нильпотентный справа и слева идеал.

Библиография: 10 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Через $C(A)$, $J(A)$ и $\text{max}(A)$ обозначаются соответственно центр, радикал Джекобсона и множество всех максимальных идеалов кольца A . Кольца, над которыми каждый ненулевой правый модуль обладает максимальным подмодулем, называются *правыми кольцами Басса*. В [1], [2] доказан следующий результат:

ТЕОРЕМА А [1], [2]. *Если A – коммутативное кольцо, то A – кольцо Басса $\iff A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – исчезающий идеал $\iff A_M$ – совершенное кольцо для любого $M \in \text{max}(A)$ $\iff A_M$ – кольцо Басса для любого $M \in \text{max}(A)$.*

Основным результатом данной работы является теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A – локально модульно конечное кольцо с центром C (это так, например, если A – конечнопорожденный C -модуль). Тогда равносильны условия:*

- (1) A – правое кольцо Басса;
- (2) A – левое кольцо Басса;
- (3) A – локально бассово справа кольцо;
- (4) A – локально бассово слева кольцо;
- (5) A – локально совершенное справа кольцо;
- (6) A – локально совершенное слева кольцо;
- (7) C – локально совершенное кольцо;
- (8) $C/J(C)$ – регулярное кольцо, $J(C)$ – исчезающий идеал;
- (9) A – строго π -регулярно, $J(A)$ – исчезающий слева идеал;
- (10) A – строго π -регулярно, $J(A)$ – исчезающий справа идеал.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд результатов, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведем необходимые определения и обозначения. Слова типа “кольцо Басса” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Кольцо A называется *модульно конечным*, если A – конечнопорожденный модуль над своим центром. Кольцо A называется *ортогонально конечным*, если A не содержит бесконечного множества ненулевых ортогональных идемпотентов. Идеал B кольца A называется *исчезающим слева (справа)*, если для любой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется номер n такой, что $b_n \cdots b_1 = 0$ ($b_1 \cdots b_n = 0$). Кольцо A называется *совершенным справа (слева)*, если A – полулокальное кольцо и $J(A)$ – исчезающий слева (справа) идеал. Кольцо A называется *строго π -регулярным* при выполнении следующих эквивалентных [3] условий:

- (1) для любого $a \in A$ существует n такое, что $a^n \in a^{n+1}A$;
- (2) для любого $a \in A$ существует n такое, что $a^n \in Aa^{n+1}$.

Кольцо A называется *π -регулярным*, если для любого $a \in A$ найдется n такое, что $a^n \in a^n Aa^n$. Любое строго π -регулярное кольцо π -регулярно [4]. Кольцо A называется *локально совершенным справа (локально ортогонально конечным, локально модульно-конечным, локально бассовым справа и т.п.)*, если для любого $M \in \max(C(A))$ кольцо частных A_M является совершенным справа (ортогонально конечным, модульно конечным, правым кольцом Басса и т.п.). Модульно конечные кольца являются локально модульно-конечными кольцами. Коммутативное кольцо A называется *нульмерным* при выполнении следующих эквивалентных [5] условий:

- (1) все идеалы кольца A простые;
- (2) $A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – нильидеал.

ЛЕММА 1. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A – правое кольцо Басса;
- (2) $A/J(A)$ – правое кольцо Басса, $J(A)$ – исчезающий слева идеал;
- (3) все факторкольца кольца A являются правыми кольцами Басса.

В лемме 1 эквивалентность (1) $\iff$ (2) доказана в [6, с. 470], а эквивалентность (1) $\iff$ (3) проверяется непосредственно.

ЛЕММА 2. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A – строго π -регулярное кольцо;
- (2) все первичные факторкольца кольца A строго π -регулярны;
- (3) факторкольцо кольца A по его первичному радикалу является строго π -регулярным кольцом;
- (4) все факторкольца кольца A по минимальным первичным идеалам строго π -регулярны;
- (5) все факторкольца кольца A строго π -регулярны.

В лемме 2 эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [7]. Импликации (1) $\implies$ (3), (3) $\implies$ (4), (4) $\implies$ (2), (1) $\implies$ (5), (5) $\implies$ (2) следуют из того, что факторкольца строго π -регулярных колец являются строго π -регулярными кольцами, причем каждый первичный идеал содержит минимальный первичный идеал.

ЛЕММА 3 [6]. A – совершенное справа (слева) кольцо $\iff A$ – полулокальное правое (левое) кольцо Басса.

ЛЕММА 4 [8]. A – строго π -регулярное кольцо $\iff A_M$ – строго π -регулярное кольцо для любого $M \in \text{max}(C(A))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть R – унитарное подкольцо центра C кольца A . Равносильны условия:

- (1) A – правое кольцо Басса;
- (2) для любого мультипликативно замкнутого подмножества $T \subset C$ кольцо частных A_T является правым кольцом Басса;
- (3) A_M – правое кольцо Басса для любого $M \in \text{max}(R)$, причем в каждом факторкольце кольца A все центральные неделители нуля обратимы;
- (4) для любого $M \in \text{max}(R)$ верно, что A_M – правое кольцо Басса, а канонический гомоморфизм $A \rightarrow A_M$ сюръективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\implies$ (1) следует из того, что можно положить $T = \{1\}$.

(1) $\implies$ (2). Пусть $Q \equiv A_T$, F – ненулевой правый Q -модуль, $f: A \rightarrow Q$ – канонический кольцевой гомоморфизм, превращающий F в правый A -модуль. Так как A – правое кольцо Басса, F_A обладает максимальным подмодулем N_A . Остается доказать, что N – Q -подмодуль. Достаточно для любого $t \in T$ доказать включение $Nf(t)^{-1} \subseteq N$. Допустим противное. Так как $f(t) \in C(Q)$, то $Nf(t)^{-1}$ – подмодуль в F_A , не лежащий по предположению в максимальном подмодуле N_A модуля F_A . Поэтому $F = Nf(t)^{-1} + N$. Тогда $Ff(t) = N + Nf(t) = N$. Так как F – Q -модуль, имеем $F = Ff(t)$. Поэтому $F = N$ и получено противоречие.

(2) $\implies$ (3). По лемме 1 достаточно доказать, что A совпадает с кольцом частных Q кольца A относительно множества T всех центральных неделителей нуля. Допустим противное. Тогда ненулевой модуль $(Q/A)_A$ обладает максимальным подмодулем $(N/A)_A$. Поэтому N – максимальный подмодуль модуля Q_A . Пусть $h: Q \rightarrow Q/N$ – естественный эпиморфизм. Простой модуль Q/N обладает образующим $h(at^{-1})$, где $a \in A, t \in T$. Поэтому найдется элемент $b \in A$ такой, что $h(at^{-2}) = h(at^{-1})b$. Тогда $h(at^{-1}) = h(at^{-2})t = h(at^{-1})bt = h(ab) \in h(A) \subseteq h(N) = 0$. Поэтому $Q/N = 0$ и получено противоречие.

(3) $\implies$ (4). Пусть $M \in \text{max}(R)$, $f: A \rightarrow A_M$ – канонический гомоморфизм, $h: A \rightarrow A/\text{Ker}(f) \equiv B$ – естественный эпиморфизм, $t \in R \setminus M$. Тогда $h(t)$ – центральный неделитель нуля в кольце B . По условию найдется элемент $a \in A$ такой, что $h(a) = h(t)^{-1}$. Тогда $f(t)^{-1} = f(a) \in f(A)$. Поэтому $A_T = f(A)$. Докажем (4) $\implies$ (1). Пусть F_A – ненулевой A -модуль. Тогда найдется такой максимальный идеал M кольца R , что модуль частных F_M не равен нулю. По условию ненулевой A_M -модуль F_M обладает максимальным подмодулем N . Так как канонический кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow A_M$ по условию сюръективен, канонический модульный гомоморфизм $g: F \rightarrow F_M$ также сюръективен. Поэтому достаточно доказать, что N является максимальным A -подмодулем модуля частных F_M . Пусть $x, y \in F_M \setminus N$. Так как F_M/N – простой A_M -модуль, найдется такой элемент $b \in A_M = f(A)$, что $xb - y \in N$. Тогда $xf(a) - y \in N$ для некоторого элемента $a \in A$. Поэтому N – максимальный A -подмодуль модуля F_M .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть R – унитарное центральное подкольцо π -регулярного кольца A . Тогда A – правое кольцо Басса $\iff A_M$ – правое кольцо Басса для любого $M \in \max(R)$.

Так как все факторкольца π -регулярных колец π -регулярны, то следствие 1 следует из предложения 1 и того, что в π -регулярном кольце каждый неделитель нуля обратим.

СЛЕДСТВИЕ 2. A – строго π -регулярное правое кольцо Басса $\iff A_M$ строго π -регулярное правое кольцо Басса для любого $M \in \max(C(A))$.

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть R – унитарное подкольцо центра кольца A . Тогда:

- (1) A – полупервичное кольцо $\iff A$ – локально полупервичное кольцо;
- (2) A – регулярное кольцо $\iff A$ – локально регулярное кольцо;
- (3) A – регулярное локально ортогонально конечное кольцо $\iff A_M$ – полупервичное артиново кольцо для любого $M \in \max(R)$;
- (4) если S – исчезающий идеал кольца R , порождающий в кольце A идеал B , то B – исчезающий справа и слева идеал кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно; (2) доказано в [5]; (3) следует из (2) и того, что ортогонально конечное регулярное кольцо является артиновым. Докажем (4). Верен факт (см. [9, теорема 11.5.5]):

- (*) если X – идеал кольца Y , то X – исчезающий слева идеал $\iff NX \neq N$ для каждого ненулевого правого модуля N_Y .

Пусть N – ненулевой правый A -модуль. Из (*) следует, что $NS \neq N$. Но $NS = NB$. Поэтому $NB \neq N$. Из (*) следует, что B – исчезающий слева идеал кольца A . Аналогично, B – исчезающий справа идеал.

ЛЕММА 6. Пусть n – натуральное число и кольцо A является n -порожденным модулем над унитарным центральным подкольцом R . Тогда:

- (1) для любого $M \in \max(R)$ кольцо частных A_M является n -порожденным модулем над своим локальным центральным подкольцом R_M ;
- (2) $AJ(R) \subseteq J(A)$;
- (3) $A_M J(R_M) \subseteq J(A_M)$ для любого $M \in \max(R)$;
- (4) A_M – модульно конечное полулокальное и, в частности, ортогонально конечное кольцо для любого $M \in \max(R)$;
- (5) A – регулярное кольцо $\iff A_M$ – полупервичное артиново кольцо для любого $M \in \max(R)$;
- (6) если R – нульмерное кольцо, то $A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – ниль-идеал, $J(R) = R \cap J(A)$;
- (7) если R – регулярное кольцо, то для любого $M \in \max(R)$ кольцо R_M является полем, а кольцо A_M является конечномерной R_M -алгеброй, размерность которой не превосходит n ;
- (8) если R – регулярное кольцо, то $A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – нильпотентный идеал;
- (9) если R – полулокальное кольцо, то $A/J(R)A$ – вполне приводимое кольцо, A – полулокальное и, в частности, ортогонально конечное кольцо;

(10) если R – совершенное кольцо, то A – совершенное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно; (2) доказано в [10, глава 3, следствие 2.5]; (3) вытекает из (2), примененного к A_M и R_M ; (4) следует из (1), (3) и того, что $(A_M)/(A_M J(R_M))$ – конечномерная алгебра над полем $R_M/J(R_M)$; (5) следует из (4) и из леммы 5; (6) доказано в [5]; (7) следует из (1) и того, что все локализации коммутативного регулярного кольца по максимальным идеалам являются полями; (8) следует из (6) и (7); (9) проверяется с помощью (2); (10) следует из (9) и из леммы 5 (4).

ЛЕММА 7. *Совершенное справа полупервичное кольцо A является артиновым кольцом.*

Так как кольцо A ортогонально конечно, то лемма 7 вытекает из следующих хорошо известных утверждений: каждый ненулевой левый идеал совершенного справа кольца содержит минимальный правый идеал; каждый минимальный правый идеал полупервичного кольца порождается идемпотентом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) A – локально полулокальное правое кольцо Басса;
- (2) A – локально полулокальное локально бассово справа кольцо;
- (3) A – локально совершенное справа кольцо;
- (4) A – локально полулокальное строго π -регулярное правое кольцо Басса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из предложения 1. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 3. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) вытекает из следствия 2 и того, что по леммам 2 и 3 каждое совершенное справа кольцо является строго π -регулярным правым кольцом Басса. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) очевидна. Импликация (1), (3) $\Rightarrow$ (4) следует из леммы 4 и того, что по лемме 2 совершенные справа кольца являются строго π -регулярными.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть A – локально модульно конечное кольцо. Тогда A – правое кольцо Басса $\iff A$ – локально бассово справа кольцо $\iff A$ – строго π -регулярное правое кольцо Басса $\iff A$ – локально совершенное справа кольцо.*

Следствие 3 вытекает из предложения 2 и леммы 6 (4).

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть A – локально модульно конечное кольцо. Равносильны условия:*

- (1) A – полупервичное правое кольцо Басса;
- (2) A – локально полупервичное локально совершенное справа кольцо;
- (3) A – локально полупервичное локально артиново кольцо;
- (4) A – регулярное кольцо.

В следствии 4 эквивалентность условий (1) и (2) вытекает из следствия 3 и леммы 4, а эквивалентность условий (3) и (4) – из лемм 4 (3) и 5 (5). Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 6.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть факторкольцо $A/J(A)$ кольца A является локально модульно-конечным кольцом. Тогда A – правое кольцо Басса $\iff A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – исчезающий слева идеал.*

Следствие 5 вытекает из леммы 1 и следствия 4.

ЛЕММА 8. Пусть C – центр строго π -регулярного кольца A . Тогда C – нульмерное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. C – коммутативное строго π -регулярное кольцо [4]. Если P – простой идеал кольца A , то A/P – строго π -регулярная область. Поэтому C/P – поле, C – нульмерное кольцо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть кольцо A является конечнопорожденным модулем над своим центром C . Тогда равносильны условия:

- (1) A – правое кольцо Басса;
- (2) A – левое кольцо Басса;
- (3) A – локально бассово справа кольцо;
- (4) A – локально бассово слева кольцо;
- (5) A – локально совершенное справа кольцо;
- (6) A – локально совершенное слева кольцо;
- (7) A – строго π -регулярное правое кольцо Басса;
- (8) A – строго π -регулярное левое кольцо Басса;
- (9) C – локально совершенное кольцо;
- (10) C – кольцо Басса;
- (11) $C/J(C)$ – регулярное кольцо, $J(C)$ – исчезающий идеал;
- (12) $A/J(A)$ – регулярное кольцо, $J(A)$ – исчезающий справа и слева идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как условие (12) симметрично, достаточно доказать эквивалентность условий (1), (3), (5), (7), (9), (10), (11) и (12). Эквивалентность условий (1), (3) и (5) вытекает из следствия 3. Так как $A/J(A)$ – модульно конечное кольцо, эквивалентность условий (1) и (12) вытекает из следствия 5. Эквивалентность условий (5) и (7) вытекает из следствия 3. Эквивалентность условий (9), (10), (11) следует из теоремы А.

(7) $\implies$ (11). По лемме 8 C – нульмерное кольцо. Так как по лемме 6(6) $J(C) = C \cap J(A)$, причем по лемме 1 $J(A)$ – исчезающий слева идеал, $J(C)$ – исчезающий идеал.

(11) $\implies$ (12). По лемме 6(6) $A/J(A)$ – регулярное кольцо. Пусть $h: A \rightarrow A/J(C)A$ – естественный эпиморфизм. Так как кольцо $h(A)$ является конечнопорожденным модулем над коммутативным регулярным кольцом $C/J(C)$, по лемме 6(8) $h(J(A))$ – нильпотентный идеал. Кроме того, поскольку $J(C)$ – исчезающий идеал, по лемме 5(4) $J(C)A$ – исчезающий справа и слева идеал кольца A . Поэтому $J(A)$ – исчезающий справа и слева идеал кольца A .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть кольцо A является конечнопорожденным модулем над своим центром C . Тогда равносильны условия:

- (1) A – совершенное справа кольцо;
- (2) A – совершенное слева кольцо;
- (3) C – совершенное кольцо.

Следствие 6 вытекает из предложения 3, лемм 3 и 6(10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как условие (8) симметрично, то достаточно доказать эквивалентность условий (1), (3), (5), (7), (8) и (9). Эквивалентность условий

(1), (3) и (5) доказана в следствии 3. Эквивалентность условий (7) и (8) следует из теоремы А. Импликация (7) $\implies$ (5) вытекает из леммы 6(10). Импликация (1) $\implies$ (9) вытекает из леммы 1 и следствия 3. Докажем импликацию (9) $\implies$ (8). Так как A – локально модульно конечное кольцо, то $J(C) \subseteq J(A)$ [5]. Поэтому $J(C)$ – исчезающий идеал. По лемме 8 $C/J(C)$ – регулярное кольцо.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hamsher R. M. Commutative rings over which every module has a maximal submodule // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. №6. P. 1133–1137.
- [2] Faith C. Locally perfect commutative rings are those whose modules have maximal submodules // Comm. Algebra. 1995. V. 22. №13. P. 4885–4886.
- [3] Dischinger F. Sur les anneaux fortement π -reguliers // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1976. V. 283. P. 571–573.
- [4] Azumaya G. Strongly π -regular rings // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I. 1954. V. 13. P. 34–39.
- [5] Goodearl K. R., Warfield R. B. Algebras over zero-dimensional rings // Math. Ann. 1976. V. 223. P. 157–168.
- [6] Bass H. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. №3. P. 466–488.
- [7] Fisher J. V., Snider R. L. On the Von Neumann regularity of rings with regular prime factor rings // Pacific J. Math. 1974. V. 54. №1. P. 135–144.
- [8] Armendariz E. P., Fisher J. V., Steinberg S. A. Central localizations of regular rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 46. №3. P. 315–321.
- [9] Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
- [10] Басс Х. Алгебраическая K -теория. М.: Мир, 1973.

Московский энергетический институт

Поступило
02.04.96