Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, О нулях вещественных тригонометрических сумм, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 792–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:56:50

УДК 511

О НУЛЯХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

М. Е. Чанга

Рассматривается задача о подсчете количества нулей вещественной тригонометрической суммы произвольного вида на заданном промежутке. С помощью принципа аргумента доказываются верхняя и нижняя оценки этого количества нулей, которые затем иллюстрируются примерами.

Библиография: 3 названия.

Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ заданы вещественные функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, причем $f(x)$ неотрицательна. Определим вещественную тригонометрическую сумму

$$S(\alpha) = \sum_{a \leq x \leq b} (g(x) \cos 2\pi\alpha f(x) + h(x) \sin 2\pi\alpha f(x)),$$

считая функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ такими, что $S(\alpha)$ не равна нулю тождественно. Обозначим через $N(u, v)$ количество нулей суммы $S(\alpha)$ на промежутке $u \leq \alpha < v$, причем каждый нуль считается столько раз, каков его порядок. Обозначим через M и m максимум и минимум функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$ соответственно; “длину” суммы $S(\alpha)$, т.е. величину $[b] - [a]$, обозначим через L . Будем придерживаться введенных обозначений на протяжении всей статьи.

В [1] поставлен вопрос о верхних и нижних оценках $N(u, v)$ и для некоторых классов вещественных тригонометрических сумм получены достаточно точные оценки. В частном случае целозначной функции $f(x)$ сумма $S(\alpha)$ представляет собой тригонометрический полином, причем $N(0, 1)$ оценивается снизу и сверху величинами $2m$ и $2M$ соответственно [2, с. 149, задача 184]. В настоящей работе этот результат обобщается на случай произвольной функции $f(x)$ и произвольных промежутков $u \leq \alpha < v$.

ТЕОРЕМА. *Справедливы неравенства*

$$2m(v - u) - 4L \leq N(u, v) \leq 2M(v - u) + 4L.$$

В качестве примера рассмотрим $f(x) = x^c$ при положительном c и $b = 2a$. В этом случае $N(u, v)$ имеет порядок $a^c \cdot (v - u)$, если только $v - u > 3a^{1-c}$. Другой пример

связан с так называемой овеществленной дзета-функцией Римана. Известно [3, с. 160], что при $T \leq t \leq T + T^{1/4}$ имеет место формула Римана–Зигеля

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leq P} \frac{\cos t \log P/n}{\sqrt{n}} + O(T^{-1/4} \log T),$$

где $P = \sqrt{T/2\pi}$. Верхняя оценка $N(u, v)$ для суммы, стоящей в правой части, есть

$$\frac{v-u}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} + 4\sqrt{\frac{T}{2\pi}};$$

нижняя оценка тривиальна. Но при любом фиксированном δ с условиями $0 < \delta < 1$ для суммы

$$\sum_{n \leq P^\delta} \frac{\cos t \log P/n}{\sqrt{n}}$$

теорема дает “правильный” порядок величины $N(u, v)$, т.е. $(v-u) \log T$, если только $v-u$ достаточно велико.

Доказательству теоремы предположим несколько вспомогательных утверждений. Здесь и далее $\Delta_C \arg F(z)$ обозначает приращение аргумента $F(z)$ вдоль контура C ; параметр R принимает положительные значения.

ЛЕММА 1. Пусть $c(k) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $0 \leq p(1) < \dots < p(n)$. Пусть в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси

$$F(z) = \sum_{k=1}^n c(k) z^{p(k)},$$

где $z^{p(k)}$ положительно на верхнем берегу этого разреза.

Пусть контур $C(R)$ начинается в точке $R+i0$, обходит начало координат по окружности радиуса R и заканчивается в точке $R-i0$. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \arg F(z) = 2\pi p(n), \quad \lim_{R \rightarrow 0} \Delta_{C_R} \arg F(z) = 2\pi p(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точки $z = \infty$ и $z = 0$ изолированы для нулей $F(z)$, поэтому при достаточно большом или достаточно малом R функция $F(z)$ не обращается в нуль на контуре C_R . При достаточно большом R

$$\Delta_{C_R} \arg F(z) = \Delta_{C_R} \arg z^{p(n)} = \Delta_{C_R} \arg F(z) \cdot z^{-p(n)}.$$

Первое слагаемое равно $2\pi p(n)$, а второе стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно,

$$F(z) \cdot z^{-p(n)} = c(n) + o(1)$$

при $R \rightarrow \infty$, а $c(n) \neq 0$. Случай малых R отличается лишь тем, что нужно выделять множитель $z^{p(1)}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $c(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 \leq p(1) < \dots < p(n)$.

$$F(x) = \sum_{k=1}^n c(k)x^{p(k)}.$$

Тогда число нулей $F(x)$ на промежутке $0 < x < \infty$ не превосходит $n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство индукцией по n . При $n = 1, 2$ лемма очевидна. Предположим, что лемма справедлива для сумм длины, строго меньшей n . Пусть функция $F(x)$ имеет на промежутке $0 < x < \infty$ N нулей. Рассмотрим функцию

$$G(x) = x^{p(1)+1} \frac{d}{dx} (x^{-p(1)} F(x)).$$

По предположению индукции $G(x)$ имеет не более $n - 2$ нулей на промежутке $0 < x < \infty$. С другой стороны, $G(x)$ имеет на промежутке $0 < x < \infty$ не менее $N - 1$ нулей. Действительно, по теореме Ролля между любыми двумя нулями функции лежит по крайней мере один нуль ее производной. Если же функция имеет нуль порядка l , то ее производная имеет в этой же точке нуль порядка $l - 1$. Это и завершает доказательство.

ЛЕММА 3. Пусть $c(k) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $0 \leq p(1) < \dots < p(n)$. Пусть в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси

$$F(z) = \sum_{k=1}^n c(k)z^{p(k)},$$

где $z^{p(k)}$ положительно на верхнем берегу этого разреза и $F(R \pm i0) \neq 0$. Пусть контур $\Gamma_{r,R}$ начинается в точке $R - i0$, идет вдоль нижнего берега разреза, огибая лежащие на нем нули $F(z)$ по полуокружностям радиуса r , обходит начало координат по окружности радиуса r , и идет вдоль верхнего берега разреза до точки $R + i0$, также огибая лежащие на нем нули $F(z)$ по полуокружностям радиуса r . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_{\Gamma_{r,R}} \arg F(z) \leq 2\pi n - 2\pi p(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предел при $r \rightarrow 0$ приращения аргумента $F(z)$ вдоль окружности, охватывающей начало координат, уже был вычислен в лемме 1 и равняется $-2\pi p(1)$. Точно так же получаем, что пределы при $r \rightarrow 0$ приращений аргумента $F(z)$ вдоль полуокружностей, огибающих нули $F(z)$ на берегах разреза, неположительны.

Заменяя при необходимости $F(z)$ на $iF(z)$, можно считать, что $\operatorname{Re} F(x + i0)$ не равно нулю тождественно. Пусть Γ — отрезок верхнего берега разреза, свободный от нулей $F(z)$. Тогда имеет место оценка

$$\Delta_{\Gamma} \arg F(z) \leq \pi(N_{\Gamma} + 1),$$

где N_{Γ} — число нулей $\operatorname{Re} F(x + i0)$ на Γ . Действительно, на каждый полуоборот кривой $F(\Gamma)$ вокруг начала координат приходится не менее одного ее пересечения с мнимой

осью, а в этих точках $\operatorname{Re} F(x + i0)$ обращается в нуль. Если функция $F(z)$ имеет на верхнем берегу разреза K нулей, то соответствующая часть контура $\Gamma_{r,R}$ состоит из не более, чем $K + 1$ отрезков, свободных от нулей $F(z)$. Согласно лемме 2 суммарное число нулей $\operatorname{Re} F(x + i0)$ на этих отрезках при любом достаточно малом r не превосходит $n - K - 1$, ибо порядок нуля $F(z)$ на верхнем берегу разреза не больше порядка соответствующего нуля $\operatorname{Re} F(x + i0)$. Таким образом, приращение аргумента $F(z)$ вдоль этой части контура не превосходит πn . Проводя те же рассуждения для нижнего берега разреза и переходя к пределу при $r \rightarrow 0$, получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Достаточно доказать теорему при $v - u = 1$. Действительно, число нулей $S(\alpha)$ на промежутке $u \leq \alpha < v$ равно числу нулей суммы $S(\beta(v - u))$ на промежутке $u/(v - u) \leq \beta < u/(v - u) + 1$. Последнюю сумму можно рассматривать как сумму $S(\beta)$, в которой функция $f(x)$ домножена на $v - u$, так что величины m и M тоже приобретают множителем $v - u$.

Оценим $N(u, u + 1)$ сверху. Для этого рассмотрим в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси функцию

$$Q(z) = \sum_{\alpha < x \leq b} (\overline{c(x)} e^{2\pi i u(M+f(x))} z^{M+f(x)} + c(x) e^{2\pi i u(M-f(x))} z^{M-f(x)}),$$

где $c(x) = g(x) + ih(x)$ и z^β положительно на верхнем берегу этого разреза. Очевидно, $Q(z)$ не равна нулю тождественно. Так как при $0 \leq \alpha < 1$

$$S(u + \alpha) = \frac{1}{2} e^{-2\pi i M(u+\alpha)} Q(e^{2\pi i \alpha}),$$

а производная функции $e^{2\pi i \alpha}$ обращается в нуль, то нули $S(u + \alpha)$ на промежутке $0 \leq \alpha < 1$ с учетом их кратностей отвечают нулям $Q(z)$ на единичной окружности. Заведомо огрубляя оценку, получаем, что $N(u, u + 1)$ не превосходит суммы числа N нулей $Q(z)$ во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси и числа K нулей $Q(z)$ на верхнем берегу этого разреза.

Оценим N с помощью принципа аргумента. При достаточно большом R и малом r рассмотрим контур, состоящий из контура C_R леммы 1 и контура $\Gamma_{r,R}$ леммы 3. Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ и пользуясь оценками лемм 1 и 3 для приращений аргумента $Q(z)$ вдоль частей контура, получим

$$N \leq 2M + 2L.$$

Здесь мы пользовались тем, что длина суммы в $Q(z)$ не превосходит $2L$, а наивысшая степень z в этой сумме не превосходит $2M$.

Заменяя при необходимости $Q(z)$ на $iQ(z)$, можно считать, что $\operatorname{Re} Q(x + i0)$ не равна нулю тождественно. В этом случае K не превосходит числа нулей $\operatorname{Re} Q(x + i0)$ на промежутке $0 < x < \infty$, которое, в свою очередь, не превосходит $2L$ согласно лемме 2. Таким образом, имеет место следующая оценка:

$$N(u, u + 1) \leq 2M + 4L.$$

Оценим $N(u, u+1)$ снизу. Для этого рассмотрим в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси функцию

$$P(z) = \sum_{a < x \leq b} \overline{c(x)} e^{2\pi i u f(x)} z^{f(x)},$$

где $c(x) = g(x) + ih(x)$ и z^β положительно на верхнем берегу этого разреза. Очевидно, $P(z)$ не равна нулю тождественно. Предположим, что $P(z)$ не имеет нулей на единичной окружности. В силу вещественности функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ при $0 \leq \alpha < 1$

$$S(u + \alpha) = \operatorname{Re} P(e^{2\pi i \alpha}).$$

Так же, как и при доказательстве леммы 3, получаем оценку

$$\Delta_{C_1} \arg P(z) \leq \pi(N(u, u+1) + 1),$$

где C_1 – контур леммы 1 при $R = 1$. Дополним контур C_1 контуром $\Gamma_{r,1}$ леммы 3 при достаточно малом r . Так как внутри полученного контура могут лежать лишь нули функции $P(z)$, согласно принципу аргумента

$$\Delta_{C_1} \arg P(z) + \Delta_{\Gamma_{r,1}} \arg P(z) \geq 0.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ и пользуясь оценкой леммы 3 для приращения аргумента $P(z)$ вдоль $\Gamma_{r,1}$, получим

$$N(u, u+1) \geq 2m - 2L - 1.$$

Здесь мы пользовались тем, что длина суммы в $P(z)$ не превосходит L , и наименьшая степень z в этой сумме не меньше m . Сумма $S(\alpha)$ не равна нулю тождественно, поэтому $L \geq 1$. Отсюда, немного огрубляя оценку, находим

$$N(u, u+1) \geq 2m - 4L.$$

Если $P(z)$ имеет нули на единичной окружности, то для любого достаточно малого положительного ε эта функция не имеет нулей на окружности $|z| = 1 + \varepsilon$. Рассмотрим сумму $S_\varepsilon(\alpha)$, которая отличается от суммы $S(\alpha)$ множителями $(1 + \varepsilon)^{f(x)}$ при каждом члене. Число нулей суммы $S_\varepsilon(\alpha)$ на промежутке $u \leq \alpha < u+1$ обозначим через $N_\varepsilon(u, u+1)$. Проводя те же рассуждения для контура $C_{1+\varepsilon}$, получим

$$N_\varepsilon(u, u+1) \geq 2m - 2L - 1.$$

Возьмем область D , содержащую отрезок $u \leq \alpha \leq u+1$ и такую, что ее замыкание не содержит других нулей $S(\alpha)$, кроме лежащих на этом отрезке. В этом случае число нулей $S(\alpha)$ в области D равняется сумме $N(u, u+1)$ и порядка возможного нуля при $\alpha = u+1$. Последний не превосходит числа нулей $\operatorname{Re} Q(x-i0)$ на промежутке $0 < x < \infty$,

которое, в свою очередь, не превосходит $2L - 1$ согласно лемме 2. При $\varepsilon \rightarrow 0$ на границе области D

$$S_\varepsilon(\alpha) = S(\alpha) + O(\varepsilon),$$

причем $S(\alpha)$ отлична там от нуля. Поэтому согласно теореме Руше при достаточно малом ε функция $S_\varepsilon(\alpha)$ имеет в D столько же нулей, сколько $S(\alpha)$. Но $S_\varepsilon(\alpha)$ имеет в области D не менее $N_\varepsilon(u, u + 1)$ нулей, так как содержит промежуток $u \leq \alpha < u + 1$. Таким образом, имеет место оценка

$$N(u, u + 1) + 2L - 1 \geq 2m - 2L - 1.$$

Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценки теоремы принципиально улучшены быть не могут. Чтобы в этом убедиться достаточно взять в качестве $S(\alpha)$ функцию $\cos 2\pi\alpha A$, где A — произвольное положительное число. Однако, если известно распределение нулей $P(z)$, то нижняя оценка $N(u, u + 1)$ может быть усилена. Из доказательства теоремы непосредственно получается оценка

$$N(u, u + 1) \geq 2m - 4L + 2N_1,$$

где через N_1 обозначено количество нулей $P(z)$ в области $0 < |z| \leq 1, 0 < \arg z < 2\pi$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карацуба А. А. О нулях тригонометрических сумм // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 1. С. 11–12.
- [2] Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978.
- [3] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: maris_changa@mail.ru

Поступило
28.05.2003