Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, О восстановлении дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с особенностями внутри интервала, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 143–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:18:52

УДК 517

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В. А. Юрко

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале при наличии произвольного конечного числа регулярных особых точек внутри интервала. Доказана теорема единственности, получены необходимые и достаточные условия и процедура решения обратной задачи.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу $L = L(p(x), h_0, h_1)$:

$$ly \equiv -y'' + p(x)y = \lambda y, \quad p(x) = \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{(x - \gamma_j)^2} + q(x), \quad 0 < x < T, \quad (1)$$

$$U_0(y) \equiv y'(0) + h_0 y(0) = 0, \quad U_1(y) \equiv y'(T) + h_1 y(T) = 0, \quad (2)$$
$$0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_N < T,$$

с регулярными особенностями внутри интервала $(0, T)$. Здесь $q(x)$ – комплекснозначная функция; a_j, h_0, h_1 – комплексные числа, т.е. L является, вообще говоря, несамосопряженной. Положим $a_j = \nu_j^2 - 1/4$ и, для определенности, будем считать, что $\operatorname{Re} \nu_j > 0$, $\nu_j \notin \mathbb{N}$. Пусть

$$q(x) \prod_{j=1}^N |x - \gamma_j|^{1-2\operatorname{Re} \nu_j} \in \mathcal{L}(0, T).$$

При выполнении этих условий будем говорить, что $L \in V$. Дифференциальные уравнения с особенностями внутри интервала возникают в различных разделах математики и в приложениях. К уравнению (1) также сводятся многие дифференциальные уравнения с точками поворота внутри интервала.

В статье исследуется обратная задача восстановления дифференциального уравнения и линейных форм (1), (2) по заданным спектральным характеристикам. Дается постановка обратной задачи, изучаются свойства спектральных характеристик, доказана

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования (КЦФЕ), грант № 96-1.7-4, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

теорема единственности решения обратной задачи, получены необходимые и достаточные условия и алгоритм решения.

Обратная задача Штурма–Лиувилля при отсутствии особенностей ($a_j = 0$) достаточно полно изучена (см. [1], [2] и литературу в них). Важную роль в этих исследованиях сыграл метод оператора преобразования. В случае, когда особая точка лежит на конце интервала ($N = 1, \gamma_1 = 0$), обратная задача исследовалась в работах [3]–[9] и др. Наличие особых точек внутри интервала вносит существенные качественные изменения в исследование обратных задач. Метод оператора преобразования в этом случае является неудобным, и мы будем использовать другой метод, связанный с развитием идей метода контурного интеграла. Отметим, что метод контурного интеграла при исследовании обратных задач для уравнений без особенностей впервые применялся в работах [10], [11]. При исследовании краевой задачи (1), (2) важным является построение специальных фундаментальных систем решений (ФСР), обеспечивающих склейку решений в особой точке, получение асимптотики соответствующих множителей Стокса, исследование решений, являющихся аналогами решений Вейля. Расположение собственных значений (СЗ) задачи L в общем случае может быть достаточно произвольным. Отсутствие асимптотики СЗ вносит дополнительные технические трудности. Отметим, что в [12] изучалось поведение спектра для уравнения с особенностью внутри интервала в частном случае, когда $q(x)$ – регулярная функция. При этом склейка решений осуществлялась за счет аналитического продолжения через верхнюю полуплоскость $\text{Im } x > 0$.

Несколько слов о структуре статьи. В п. 2 строятся специальные ФСР уравнения (1), изучаются их свойства и свойства спектра задачи L . В п. 3 доказана теорема единственности решения обратной задачи, а в п. 4 приводятся необходимые и достаточные условия и процедура решения обратной задачи.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\lambda = \rho^2, \rho = \sigma + i\tau$. Положим

$$C_{kj}(x, \lambda) = (x - \gamma_j)^{\mu_{kj}} \sum_{m=0}^{\infty} c_{kmj} (\rho(x - \gamma_j))^{2m}, \quad \mu_{kj} = (-1)^k \nu_j + \frac{1}{2},$$

$$c_{10j} c_{20j} = (2\nu_j)^{-1}, \quad c_{kmj} = (-1)^m c_{k0j} \left(\prod_{s=1}^m ((2s + \mu_{kj})(2s + \mu_{kj} - 1) - a_j) \right)^{-1},$$

$$k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N.$$

Здесь и далее $z^\mu = e^{\mu(\ln|z| + i \arg z)}$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Пусть функции $S_{kj}(x, \lambda)$, $k = 1, 2, j = 1, \dots, N$, являются решениями интегральных уравнений

$$S_{kj}(x, \lambda) = C_{kj}(x, \lambda) + \int_{\gamma_j}^x g_j(x, t, \lambda) \left(p(t) - \frac{a_j}{(t - \gamma_j)^2} \right) S_{kj}(t, \lambda) dt, \quad x \in \omega_j \cup \omega_{j-1},$$

где $\omega_j = (\gamma_j, \gamma_{j+1})$, $\gamma_0 = 0, \gamma_{N+1} = T$, $g_j(x, t, \lambda) = C_{1j}(t, \lambda) C_{2j}(x, \lambda) - C_{2j}(t, \lambda) C_{1j}(x, \lambda)$. Функции $S_{kj}(x, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$ и образуют ФСР уравнения (1), причем $\det[S_{kj}^{(m-1)}(x, \lambda)]_{k,m=1,2} \equiv 1$ и

$$|S_{kj}^{(m)}(x, \lambda)| \leq C |(x - \gamma_j)^{\mu_{kj} - m}|, \quad |S_{kj}(x, \lambda) - C_{kj}(x, \lambda)| \leq C |(x - \gamma_j)^{2\nu_j + \mu_{kj}}|,$$

$$|\rho(x - \gamma_j)| \leq 1.$$

Здесь и далее одним и тем же символом C обозначаются различные положительные константы в оценках, не зависящие от x, ρ .

В [7], [8] исследовались асимптотические свойства функций $S_{kj}(x, \lambda)$ и свойства соответствующих множителей Стокса. В частности,

$$S_{kj}^{(m)}(x, \lambda) = \beta_{kj} \rho^{-\mu_{kj}} \left((-i\rho)^m e^{-i\rho(x-\gamma_j)} [1]_j + (i\rho)^m e^{i\pi\mu_{kj} \operatorname{sign}(\gamma_j-x)} e^{i\rho(x-\gamma_j)} [1]_j \right),$$

$$x \in \omega_j \cup \omega_{j-1}, \quad (\rho, x) \in \Omega, \quad (3)$$

где $\Omega = \{(\rho, x) : |\rho(x - \gamma_j)| \geq 1, j = 1, \dots, N\}$, $[1]_j = 1 + O((\rho(x - \gamma_j))^{-1})$, $\beta_{1j}\beta_{2j} = (-4i \sin \pi\nu_j)^{-1}$. Отметим, что ФСР $\{S_{kj}(x, \lambda)\}$ будут использоваться для склейки решений уравнения (1) в окрестностях особых точек. В частном случае, когда $q(x)$ – регулярная функция, это соответствует склейке за счет аналитического продолжения через верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} x > 0$.

Продолжим функции $S_{kj}(x, \lambda)$ на весь отрезок $[0, T]$ по формуле

$$S_{kj}(x, \lambda) = A_{kj}^{1s}(\lambda) S_{1s}(x, \lambda) + A_{kj}^{2s}(\lambda) S_{2s}(x, \lambda), \quad x \in \omega_s \cup \omega_{s-1}. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. При $x \in \omega_s$, $(\rho, x) \in \Omega$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$S_{kj}^{(m)}(x, \lambda) = \beta_{kj} \rho^{-\mu_{kj}} \left((-i\rho)^m e^{-i\rho(x-\gamma_j)} [1]_\gamma + (i\rho)^m e^{-i\pi\mu_{kj}} e^{i\rho(x-\gamma_j)} [1]_\gamma - 2i(i\rho)^m \sum_{p=j+1}^s \cos \pi\nu_p e^{i\rho(x+\gamma_j-2\gamma_p)} [1]_\gamma \right), \quad s \geq j, \quad (5)$$

$$S_{kj}^{(m)}(x, \lambda) = \beta_{kj} \rho^{-\mu_{kj}} \left((-i\rho)^m e^{-i\rho(x-\gamma_j)} [1]_\gamma + (i\rho)^m e^{i\pi\mu_{kj}} e^{i\rho(x-\gamma_j)} [1]_\gamma + 2i(i\rho)^m \sum_{p=s+1}^{j-1} \cos \pi\nu_p e^{i\rho(x+\gamma_j-2\gamma_p)} [1]_\gamma \right), \quad s < j, \quad (6)$$

$$[1]_\gamma = 1 + \sum_{j=1}^N O((\rho(x - \gamma_j))^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по индукции. Для определенности ограничимся случаем $s \geq j$. При $s = j$ (т.е. для $x \in \omega_j$) формула (5) верна в силу (3). Зафиксируем $s > j$ и предположим, что при $x \in \omega_{s-1}$

$$S_{kj}^{(m)}(x, \lambda) = \beta_{kj} \rho^{-\mu_{kj}} \left((-i\rho)^m e^{-i\rho(x-\gamma_j)} [1]_\gamma + (i\rho)^m e^{-i\pi\mu_{kj}} e^{i\rho(x-\gamma_j)} [1]_\gamma - 2i(i\rho)^m \sum_{p=j+1}^{s-1} \cos \pi\nu_p e^{i\rho(x+\gamma_j-2\gamma_p)} [1]_\gamma \right). \quad (7)$$

В силу (3) при $x \in \omega_{s-1}$ имеем

$$S_{ks}^{(m)}(x, \lambda) = \beta_{ks} \rho^{-\mu_{ks}} \left((-i\rho)^m e^{-i\rho(x-\gamma_s)} [1]_\gamma + (i\rho)^m e^{i\pi\mu_{ks}} e^{i\rho(x-\gamma_s)} [1]_\gamma \right). \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (4) и приравнявая соответствующие коэффициенты, получим линейную алгебраическую систему для определения $A_{kj}^{rs}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A_{kj}^{1s}(\lambda)\beta_{1s}\rho^{-\mu_{1s}}[1] + A_{kj}^{2s}(\lambda)\beta_{2s}\rho^{-\mu_{2s}}[1] &= \beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}e^{i\rho(\gamma_j-\gamma_s)}, \\ A_{kj}^{1s}(\lambda)\beta_{1s}\rho^{-\mu_{1s}}e^{i\pi\mu_{1s}}[1] + A_{kj}^{2s}(\lambda)\beta_{2s}\rho^{-\mu_{2s}}e^{i\pi\mu_{2s}}[1] &= \beta_{kj}\rho^{-\mu_{kj}}B_{kjs}(\lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} [1] &= 1 + O(\rho^{-1}), \\ B_{kjs}(\lambda) &= e^{-i\pi\mu_{kj}}e^{i\rho(\gamma_s-\gamma_j)} - 2i \sum_{p=j+1}^{s-1} \cos \pi\nu_p e^{i\rho(\gamma_s+\gamma_j-2\gamma_p)}[1]. \end{aligned}$$

Так как $\mu_{1s} + \mu_{2s} = 1$, $\beta_{1s}\beta_{2s} = (-4i \sin \pi\nu_s)^{-1}$, $e^{i\pi\mu_{1s}} - e^{i\pi\mu_{2s}} = 2 \sin \pi\nu_s$, определитель системы (9) равен $(2i\rho)^{-1}[1]$. Разрешая (9), вычисляем

$$\begin{aligned} A_{kj}^{1s}(\lambda) &= 2i\rho^{1-\mu_{kj}-\mu_{2s}}\beta_{kj}\beta_{2s}(e^{i\pi\mu_{2s}}e^{i\rho(\gamma_j-\gamma_s)}[1] - B_{kjs}(\lambda)[1]), \\ A_{kj}^{2s}(\lambda) &= 2i\rho^{1-\mu_{kj}-\mu_{1s}}\beta_{kj}\beta_{1s}(-e^{i\pi\mu_{1s}}e^{i\rho(\gamma_j-\gamma_s)}[1] + B_{kjs}(\lambda)[1]). \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть теперь $x \in \omega_s$. Тогда в силу (3)

$$S_{ks}^{(m)}(x, \lambda) = \beta_{ks}\rho^{-\mu_{ks}}((-i\rho)^m e^{-i\rho(x-\gamma_s)}[1]_\gamma + (i\rho)^m e^{-i\pi\mu_{ks}}e^{i\rho(x-\gamma_s)}[1]_\gamma). \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (4), получим асимптотическую формулу (5). Соотношение (6) доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Положим

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, \lambda) &= (-1)^{k-1}(S_{2j}^{(2-k)}(0, \lambda)S_{1j}(x, \lambda) - S_{1j}^{(2-k)}(0, \lambda)S_{2j}(x, \lambda)), \\ \varphi(x, \lambda) &= \varphi_1(x, \lambda) - h_0\varphi_2(x, \lambda), \quad \Delta(\lambda) = U_1(\varphi), \quad \delta(\lambda) = U_1(\varphi_2), \\ \psi(x, \lambda) &= \delta(\lambda)\varphi(x, \lambda) - \Delta(\lambda)\varphi_2(x, \lambda) = U_1(S_{2j})S_{1j}(x, \lambda) - U_1(S_{1j})S_{2j}(x, \lambda), \\ \Phi(x, \lambda) &= -(\Delta(\lambda))^{-1}\psi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \\ M(\lambda) &= \Phi(0, \lambda) = -(\Delta(\lambda))^{-1}\delta(\lambda). \end{aligned} \quad (12)$$

Функция $M(\lambda)$ называется *функцией Вейля* задачи L . Ясно, что

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(m-1)}(0, \lambda) &= \delta_{km}, \quad \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 1, \quad \langle \varphi, \Phi \rangle = 1, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = -\Delta(\lambda), \\ \delta(\lambda) &= \psi(0, \lambda), \quad \varphi(0, \lambda) = \psi(T, \lambda) = U_0(\Phi) = 1, \quad U_0(\varphi) = U_1(\psi) = U_1(\Phi) = 0, \end{aligned}$$

где $\langle y, z \rangle = yz' - y'z$, а δ_{km} — символ Кронекера.

Используя асимптотические формулы (5), (6), получаем при $x \in \omega_s$, $(\rho, x) \in \Omega$

$$\begin{aligned}\varphi^{(m)}(x, \lambda) &= \frac{1}{2} \left((i\rho)^m e^{i\rho x} [1]_\gamma + (-i\rho)^m e^{-i\rho x} [1]_\gamma - 2i(i\rho)^m \sum_{j=1}^s \cos \pi \nu_j e^{i\rho(x-2\gamma_j)} [1]_\gamma \right), \\ \psi^{(m)}(x, \lambda) &= \frac{1}{2} \left((-i\rho)^m e^{i\rho(T-x)} [1]_\gamma + (i\rho)^m e^{-i\rho(T-x)} [1]_\gamma \right. \\ &\quad \left. + 2i(i\rho)^m \sum_{j=s+1}^N \cos \pi \nu_j e^{i\rho(T+x-2\gamma_j)} [1]_\gamma \right).\end{aligned}\tag{13}$$

В частности, при $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \frac{i\rho}{2} \left(e^{i\rho T} [1] - e^{-i\rho T} [1] - 2i \sum_{j=1}^N \cos \pi \nu_j e^{i\rho(T-2\gamma_j)} [1] \right), \\ \delta(\lambda) &= \frac{1}{2} \left(e^{i\rho T} [1] + e^{-i\rho T} [1] + 2i \sum_{j=1}^N \cos \pi \nu_j e^{i\rho(T-2\gamma_j)} [1] \right).\end{aligned}\tag{14}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y(x)$ называется *собственной функцией* задачи L при $\lambda = \lambda^*$, если существуют числа a_{1j} , a_{2j} ($|a_{1j}| + |a_{2j}| > 0$) такие, что $y(x) = a_{1j} S_{1j}(x, \lambda^*) + a_{2j} S_{2j}(x, \lambda^*)$ и $U_0(y) = U_1(y) = 0$. Те значения λ , при которых существуют собственные функции, называются *собственными значениями* (СЗ).

Очевидно, что СЗ $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ задачи L совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda)$, причем $\varphi(x, \lambda_k)$, $\psi(x, \lambda_k)$ являются собственными функциями и, следовательно, $\psi(x, \lambda_k) = \beta_k \varphi(x, \lambda_k)$. Ясно, что

$$\beta_k = \psi(0, \lambda_k) = (\varphi(T, \lambda_k))^{-1} \neq 0.$$

Используя (14), известными методами (см., например, [13, гл. 12]) получаем следующие свойства характеристической функции $\Delta(\lambda)$ и СЗ $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ задачи L :

- 1) $\Delta(\lambda) = O(|\rho|e^{|\tau|T})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$;
- 2) существуют $h > 0$, $C_h > 0$ такие, что $|\Delta(\lambda)| \geq C_h |\rho| e^{|\tau|T}$ при $|\operatorname{Im} \rho| \geq h$ и, следовательно, все СЗ лежат в полосе $|\operatorname{Im} \rho| < h$;
- 3) число нулей N_a функции $\Delta(\lambda)$ в прямоугольнике $R_a = \{\rho : |\tau| \leq h, \sigma \in [a, a+1]\}$ ограничено по a ;
- 4) если $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_k| \geq \delta, k \geq 0\}$, $\lambda_k = \rho_k^2$, то
$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho| e^{|\tau|T}, \quad \rho \in G_\delta;\tag{15}$$
- 5) существуют $R_n \rightarrow \infty$ такие, что при достаточно малых $\delta > 0$ окружности $|\rho| = R_n$ лежат в G_δ при всех n ;
- 6) если $\{\rho_k^0\}$ – нули функции

$$\Delta_0(\rho) = \rho \left(e^{i\rho T} - e^{-i\rho T} - 2i \sum_{j=1}^N \cos \pi \nu_j e^{i\rho(T-2\gamma_j)} \right),$$

то при $k \rightarrow \infty$

$$\rho_k = \rho_k^0 + O\left(\frac{1}{\rho_k^0}\right).\tag{16}$$

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем, когда характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ имеет только простые нули. Будем писать $L \in V'$, если $L \in V$ и L имеет простой спектр. Обозначим

$$\alpha_k = \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda). \quad (17)$$

В силу (12) имеем

$$\alpha_k = -(\dot{\Delta}(\lambda_k))^{-1} \beta_k \neq 0. \quad (18)$$

Совокупность чисел $\{\lambda_k, \alpha_k\}_{k \geq 0}$ будем называть *спектральными данными* задачи L .

3. Постановка обратной задачи. Теорема единственности. Обратная задача ставится следующим образом.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. По заданным спектральным данным $\{\lambda_k, \alpha_k\}_{k \geq 0}$ построить L .

Данная постановка обратной задачи является обобщением известной обратной задачи для уравнения без особенности, когда $a_j = 0$, $j = 1, \dots, N$.

Сначала докажем теорему единственности решения обратной задачи. Для этого условимся, что наряду с L мы будем рассматривать задачу $\tilde{L} = L(\tilde{p}(x), \tilde{h}_0, \tilde{h}_1)$. Если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект для задачи $\tilde{L}$, а $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $L = \tilde{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G_\delta^+ = G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$, $P(x, \lambda) = [P_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1,2}$, где

$$P_{jk}(x, \lambda) = (-1)^{k-1} (\varphi^{(j-1)}(x, \lambda) \tilde{\Phi}^{(2-k)}(x, \lambda) - \Phi^{(j-1)}(x, \lambda) \tilde{\varphi}^{(2-k)}(x, \lambda)). \quad (19)$$

Так как $\Phi(x, \lambda) = -(\Delta(\lambda))^{-1} \psi(x, \lambda)$, в силу (13)–(15) при $(\rho, x) \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} |\varphi^{(m)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho|^m e^{|\tau|x}, \quad |\varphi^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}^{(m)}(x, \lambda)| \leq C|\rho|^{m-1} e^{|\tau|x}, \\ |\Phi^{(m)}(x, \lambda)| &\leq C|\rho|^{m-1} e^{-|\tau|x}, \quad |\Phi^{(m)}(x, \lambda) - \tilde{\Phi}^{(m)}(x, \lambda)| \leq C|\rho|^{m-2} e^{-|\tau|x}, \end{aligned} \quad \rho \in G_\delta^+. \quad (20)$$

Отсюда получаем оценки

$$|P_{jk}(x, \lambda) - \delta_{jk}| \leq C_\delta |\rho|^{-1}, \quad j \leq k, \quad |P_{21}(x, \lambda)| \leq C_\delta |\rho|, \quad \rho \in G_\delta^+, \quad (\rho, x) \in \Omega. \quad (21)$$

С другой стороны, так как

$$\Phi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad (22)$$

при условиях теоремы имеем

$$P_{jk}(x, \lambda) = (-1)^{k-1} (\varphi^{(j-1)}(x, \lambda) \tilde{\varphi}_2^{(2-k)}(x, \lambda) - \varphi_2^{(j-1)}(x, \lambda) \tilde{\varphi}^{(2-k)}(x, \lambda))$$

и, следовательно, при фиксированном $x \neq \gamma_1, \dots, \gamma_N$ функции $P_{jk}(x, \lambda)$ являются целыми по λ . Вместе с (21) это, в частности, дает $P_{11}(x, \lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x, \lambda) \equiv 0$. Но тогда

$$\varphi(x, \lambda) \tilde{\Phi}(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda) \Phi(x, \lambda),$$

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = (\varphi(x, \lambda) \tilde{\Phi}'(x, \lambda) - \Phi(x, \lambda) \tilde{\varphi}'(x, \lambda)) \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\Phi}(x, \lambda) \rangle = \varphi(x, \lambda),$$

т.е. $\varphi(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(x, \lambda)$, $\Phi(x, \lambda) \equiv \tilde{\Phi}(x, \lambda)$, и, следовательно, $L = \tilde{L}$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство*

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (23)$$

причем ряд сходится “со скобками”:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < r_n} \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad r_n = R_n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \{\lambda = u + iv : u = (2h^2)^{-2}v^2 - h^2\}$ – образ прямых $\operatorname{Im} \rho = \pm h$ при отображении $\lambda = \rho^2$. Пусть $\Gamma_n = \Gamma \cap \{\lambda : |\lambda| \leq r_n\}$. Рассмотрим замкнутые контуры

$$\begin{aligned} \Gamma_{n0} &= \Gamma_n \cup \{\lambda : |\lambda| = r_n, \lambda \notin \operatorname{int} \Gamma\}, \\ \Gamma_{n1} &= \Gamma_n \cup \{\lambda : |\lambda| = r_n, \lambda \in \operatorname{int} \Gamma\} \end{aligned}$$

с обходом против часовой стрелки.

Так как внутри Γ_{n0} функция Вейля $M(\lambda)$ регулярна, по теореме Коши

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n0}} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad \lambda \in \operatorname{int} \Gamma_{n0}.$$

В силу (12), (14), (15) имеем $|M(\lambda)| \leq C_\delta |\rho|^{-1}$, $\rho \in G_\delta$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_n} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = 0,$$

т.е.

$$M(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{M(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu.$$

Применяя теорему о вычетах, приходим к (23). Теорема 2 доказана.

Очевидным следствием теорем 1 и 2 является следующая теорема единственности решения обратной задачи.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$, $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$, $k \geq 0$, то $L = \tilde{L}$.*

4. Решение обратной задачи. Необходимые и достаточные условия. Пусть задачи $L, \tilde{L} \in V'$ выбраны так, что

$$a_j = \tilde{a}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k \alpha_k| \xi_k < \infty,$$

где $\xi_k = |\rho_k - \tilde{\rho}_k| + |1 - (\alpha_k)^{-1}\tilde{\alpha}_k|$. Обозначим

$$\begin{aligned}\Omega_\varepsilon &= \{x : x \in [0, T], |x - \gamma_j| \geq \varepsilon, j = 1, \dots, N\}, \quad \varepsilon > 0, \\ \lambda_{k0} &= \lambda_k, \quad \lambda_{k1} = \tilde{\lambda}_k, \quad \alpha_{k0} = \alpha_k, \quad \alpha_{k1} = \tilde{\alpha}_k, \quad \tilde{\varphi}_{kj}(x) = \tilde{\varphi}(x, \lambda_{kj}), \\ \tilde{D}_{kj}(x, \lambda) &= \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle}{\lambda - \lambda_{kj}}, \quad \tilde{D}_{ni,kj}(x) = \tilde{D}_{kj}(x, \lambda_{ni}), \quad \tilde{P}_{ni,kj}(x) = \tilde{D}_{ni,kj}(x) \alpha_{kj}, \\ \chi_k &= \begin{cases} \xi_k^{-1}, & \xi_k \neq 0, \\ 0, & \xi_k = 0, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{k0}(x) \\ \tilde{\psi}_{k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_k (\tilde{\varphi}_{k0}(x) - \tilde{\varphi}_{k1}(x)) \\ \tilde{\varphi}_{k1}(x) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{H}_{n0,k0}(x) & \tilde{H}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{H}_{n1,k0}(x) & \tilde{H}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{n0,k0}(x) & \tilde{P}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{P}_{n1,k0}(x) & \tilde{P}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются функции $\varphi_{kj}(x), \psi_{kj}(x), D_{ni,kj}(x), P_{ni,kj}(x), H_{ni,kj}(x)$.

ЛЕММА 2. При $x \in \Omega_\varepsilon$ имеют место оценки

$$|\tilde{\varphi}_{kj}^{(m)}(x)| \leq C(|\rho_k^0| + 1)^m, \quad |\tilde{\psi}_{kj}^{(m)}(x)| \leq C(|\rho_k^0| + 1)^m, \quad k \geq 0, \quad j = 0, 1, \quad (24)$$

$$|\tilde{D}_{kj}(x, \lambda)| \leq C(|\rho - \rho_k^0| + 1)^{-1}, \quad |\operatorname{Im} \rho| \leq h, \quad k \geq 0, \quad j = 0, 1, \quad (25)$$

$$|\tilde{D}_{k0}(x, \lambda) - \tilde{D}_{k1}(x, \lambda)| \leq C|\hat{\rho}_k|(|\rho - \rho_k^0| + 1)^{-1}, \quad |\operatorname{Im} \rho| \leq h, \quad k \geq 0, \quad (26)$$

$$|\tilde{P}_{ni,kj}(x)| \leq C|\alpha_{kj}|(|\rho_n^0 - \rho_k^0| + 1)^{-1}, \quad n, k \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \quad (27)$$

$$|\tilde{H}_{ni,kj}(x)| \leq C\xi_k|\alpha_k|(|\rho_n^0 - \rho_k^0| + 1)^{-1}, \quad n, k \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \quad (28)$$

$$|\tilde{H}_{ni,kj}^{(m+1)}(x)| \leq C\xi_k|\alpha_k|(|\rho_n^0| + |\rho_k^0| + 1)^m, \quad n, k \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \quad (29)$$

где C зависит от ε . Те же оценки верны и для функций $\varphi_{kj}(x), \psi_{kj}(x), D_{kj}(x, \lambda), P_{ni,kj}(x), H_{ni,kj}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Omega_\varepsilon$. В силу (20) имеем

$$|\tilde{\varphi}^{(m)}(x, \lambda)| \leq C(|\rho| + 1)^m, \quad |\operatorname{Im} \rho| \leq h, \quad (30)$$

и, следовательно, с учетом (16) получаем (24) для $\tilde{\varphi}_{ni}^{(m)}(x)$. Теперь, используя лемму Шварца [14, с. 363], приходим к оценке

$$|\tilde{\varphi}_{n0}^{(m)}(x) - \tilde{\varphi}_{n1}^{(m)}(x)| \leq C|\rho_n - \tilde{\rho}_n|(|\rho_n^0| + 1)^m$$

и, следовательно, верна оценка (24) для $\tilde{\psi}_{ni}^{(m)}(x)$. Далее, учитывая (24) и (30), вычисляем

$$|\tilde{D}_{kj}(x, \lambda)| \leq C(|\rho| + |\rho_k^0| + 2)|\lambda - \lambda_{kj}|^{-1} \leq C|\rho - \rho_{kj}|^{-1}, \quad |\operatorname{Im} \rho| \leq h. \quad (31)$$

Зафиксируем достаточно малое $\delta > 0$. Тогда $|\tilde{D}_{kj}(x, \lambda)| \leq C$ при $\rho \in G_\delta^+, |\operatorname{Im} \rho| \leq h$. Пользуясь принципом максимума модуля для аналитических функций, получаем, что последняя оценка верна при всех ρ в полосе $|\operatorname{Im} \rho| \leq h$, что вместе с (31) дает $|\tilde{D}_{kj}(x, \lambda)| \leq C(|\rho - \rho_{kj}| + 1)^{-1}, |\operatorname{Im} \rho| \leq h$, и, следовательно, с учетом (16) приходим к (25). Оценка (27) теперь становится очевидной. Снова, используя лемму Шварца, получаем оценки (26) и (28). Наконец, оценка (29) для производных получается аналогичным образом с учетом соотношения

$$\tilde{D}'_{kj}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) \tilde{\varphi}_{kj}(x). \quad (32)$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{D}_{k0}(x, \lambda) \alpha_{k0} \varphi_{k0}(x) - \tilde{D}_{k1}(x, \lambda) \alpha_{k1} \varphi_{k1}(x)), \quad (33)$$

$$\tilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\lambda - \lambda_{k0}} \alpha_{k0} \varphi_{k0}(x) - \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\lambda - \lambda_{k1}} \alpha_{k1} \varphi_{k1}(x) \right), \quad (34)$$

$$\tilde{\varphi}_{ni}(x) = \varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x) \varphi_{k1}(x)), \quad (35)$$

$$P_{ni,lj}(x) - \tilde{P}_{ni,lj}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x) P_{k0,lj}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x) P_{k1,lj}(x)) = 0, \quad (36)$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно при $x \in \Omega_\varepsilon$ при каждом $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (21), тем же приемом, что и при доказательстве теоремы 2, получаем при фиксированных $x \neq \gamma_1, \dots, \gamma_N$, $\lambda \notin \text{int } \Gamma$

$$P_{1k}(x, \lambda) = \delta_{1k} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{P_{1k}(x, \mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad (37)$$

$$\frac{P_{jk}(x, \lambda) - P_{jk}(x, \mu)}{\lambda - \mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{P_{jk}(x, \xi)}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)} d\xi, \quad j, k = 1, 2. \quad (38)$$

Из (19), в частности, вытекает

$$P_{11}(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda) \tilde{\varphi}'(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda). \quad (39)$$

Отсюда и из (37) имеем

$$\varphi(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} (\tilde{\varphi}(x, \lambda) P_{11}(x, \mu) + \tilde{\varphi}'(x, \lambda) P_{12}(x, \mu)) \frac{d\mu}{\lambda - \mu}. \quad (40)$$

Из (40) с учетом (19) и (22) вычисляем

$$\varphi(x, \lambda) = \tilde{\varphi}(x, \lambda) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \widehat{M}(\mu) \varphi(x, \mu) d\mu.$$

Применяя теорему по вычетам и используя (17), получаем соотношение (33). Соотношение (34) доказывается совершенно аналогично, если вместо (39) воспользоваться равенством

$$P_{11}(x, \lambda) \tilde{\Phi}(x, \lambda) + P_{12}(x, \lambda) \tilde{\Phi}'(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda).$$

Подставляя в (33) $\lambda = \lambda_{ni}$, получаем (35). Далее, так как в силу (19)

$$P(x, \xi) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \end{bmatrix} = \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\Phi}(x, \xi) \rangle \begin{bmatrix} \varphi(x, \xi) \\ \varphi'(x, \xi) \end{bmatrix} - \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \begin{bmatrix} \Phi(x, \xi) \\ \Phi'(x, \xi) \end{bmatrix},$$

$$\det \left((P(x, \lambda) - P(x, \mu)) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \\ \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \mu) \\ \varphi'(x, \mu) \end{bmatrix} \right) = \langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle - \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle,$$

используя (38) и (22), вычисляем

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n1}} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\lambda - \xi} \frac{\langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \mu) \rangle}{\xi - \mu} \widehat{M}(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему о вычетах и подставляя $\lambda = \lambda_{ni}$, $\mu = \lambda_{lj}$, получаем соотношение (36). Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$\kappa(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{k0} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi_{k0}(x) - \alpha_{k1} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi_{k1}(x)). \quad (41)$$

ЛЕММА 4. *Имеют место равенства*

$$p(x) = \tilde{p}(x) - 2\kappa'(x), \quad (42)$$

$$h_0 = \tilde{h}_0 + \kappa(0), \quad h_1 = \tilde{h}_1 + \kappa(T). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (33) по x и пользуясь (32), вычисляем

$$\tilde{\varphi}'(x, \lambda) - \kappa(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi'(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{D}_{k0}(x, \lambda) \alpha_{k0} \varphi'_{k0}(x) - \tilde{D}_{k1}(x, \lambda) \alpha_{k1} \varphi'_{k1}(x)), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}''(x, \lambda) - (\kappa(x) \tilde{\varphi}(x, \lambda))' - \tilde{\varphi}(x, \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{k0} \tilde{\varphi}_{k0}(x) \varphi'_{k0}(x) - \alpha_{k1} \tilde{\varphi}_{k1}(x) \varphi'_{k1}(x)) \\ & = \varphi''(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{D}_{k0}(x, \lambda) \alpha_{k0} \varphi''_{k0}(x) - \tilde{D}_{k1}(x, \lambda) \alpha_{k1} \varphi''_{k1}(x)). \end{aligned} \quad (45)$$

Заменим в (45) вторые производные из уравнения (1), а затем заменим $\varphi(x, \lambda)$ из (33). В итоге слагаемые, содержащие $\tilde{\varphi}'(x, \lambda)$, сократятся, а слагаемые с $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ дадут (42).

Далее из (33) и (44) при $x = 0$ и $x = T$ имеем

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}'(mT, \lambda) + (h_m - \kappa(mT)) \tilde{\varphi}(mT, \lambda) \\ & = U_m(\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{D}_{k0}(mT, \lambda) \alpha_{k0} U_m(\varphi_{k0}) - \tilde{D}_{k1}(mT, \lambda) \alpha_{k1} U_m(\varphi_{k1})), \quad m = 0, 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Так как $U_0(\varphi) = U_0(\varphi_{kj}) = 0$, из (46) при $m = 0$ вытекает, что

$$\tilde{\varphi}'(0, \lambda) + (h_0 - \kappa(0)) \tilde{\varphi}(0, \lambda) = 0,$$

т.е. $h_0 - \kappa(0) = \tilde{h}_0$.

Так как $U_1(\varphi) = \Delta(\lambda)$, $U_1(\varphi_{k0}) = 0$,

$$\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{kj}(x) \rangle|_{x=T} = \tilde{\varphi}(T, \lambda) \tilde{\Delta}(\lambda_{kj}) - \tilde{\varphi}(T, \lambda_{kj}) \tilde{\Delta}(\lambda), \quad (47)$$

из (46) при $m = 1$ следует, что

$$\tilde{\varphi}'(T, \lambda) + (h_1 - \kappa(T))\tilde{\varphi}(T, \lambda) = \Delta(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_k) \tilde{\alpha}_k \Delta(\tilde{\lambda}_k). \quad (48)$$

В силу (18) имеем $\tilde{\alpha}_k \tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_k) \tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}_k) = -1$. Тогда из (48) при $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_n$ получаем $\tilde{\varphi}'(T, \tilde{\lambda}_n) + (h_1 - \kappa(T))\tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_n) = 0$. С другой стороны, $\tilde{\varphi}'(T, \tilde{\lambda}_n) + \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_n) = \tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}_n) = 0$ и, следовательно, $(h_1 - \kappa(T) - \tilde{h}_1)\tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_n) = 0$. Так как $\tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_n) = \tilde{\beta}_n^{-1} \neq 0$, то $h_1 - \kappa(T) - \tilde{h}_1 = 0$, и лемма 4 доказана.

Обозначим $\psi(x) = [\psi_{ni}(x)]$, $H(x) = [H_{ni,kj}(x)]$ ($n, k \geq 0, i, j = 0, 1$) и рассмотрим банахово пространство m ограниченных последовательностей $a = [a_{ni}]_{n \geq 0, i=0,1}$ с нормой $\|a\| = \sup_{n,i} |a_{ni}|$. Соотношения (35) и (36) с учетом введенных обозначений переписуется в виде

$$\tilde{\psi}(x) = (E + \tilde{H}(x))\psi(x), \quad (49)$$

$$(E + \tilde{H}(x))(E - H(x)) = E, \quad (50)$$

причем ряды в (49), (50) сходятся абсолютно и равномерно при $x \in \Omega_\varepsilon$ при каждом $\varepsilon > 0$. Уравнение (49) называется *основным уравнением* обратной задачи.

Меняя местами L и $\tilde{L}$, получаем аналогично

$$\psi(x) = (E - H(x))\tilde{\psi}(x), \quad (E - H(x))(E + \tilde{H}(x)) = E.$$

Из (28), (49) и (50) следует, что при каждом фиксированном $x \neq \gamma_1, \dots, \gamma_N$ оператор $E + \tilde{H}(x)$, действующий из m в m , является линейным ограниченным оператором;

$$\|\tilde{H}(x)\|_{m \rightarrow m} = \sup_{n,i} \sum_{k,j} |\tilde{H}_{ni,kj}(x)| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \xi_k < \infty,$$

причем оператор $E + \tilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный.

Теперь сформулируем теорему о необходимых и достаточных условиях разрешимости обратной задачи.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы комплексные числа $\{\lambda_k, \alpha_k\}_{k \geq 0}$, $\alpha_k \neq 0$, $\lambda_k \neq \lambda_n$ ($k \neq n$), были спектральными данными для $L \in V'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *асимптотика: существует $\tilde{L} \in V'$ такая, что*

$$a_j = \tilde{a}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k \alpha_k| \xi_k < \infty;$$

2) *условие Р: при каждом фиксированном $x \neq \gamma_1, \dots, \gamma_N$ линейный ограниченный оператор $E + \tilde{H}(x)$, действующий из m в m , имеет ограниченный обратный;*

3) *$\kappa'(x) \prod_{j=1}^N |x - \gamma_j|^{1-2 \operatorname{Re} \nu_j} \in \mathcal{L}(0, T)$, где $\kappa(x)$ строится по формуле (41).*

При выполнении этих условий L строится по формулам (42) и (43).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* теоремы 4 доказана выше. Докажем *достаточность*. Пусть $\psi(x)$ – решение основного уравнения (49). Определим функции $\varphi_{ni}(x)$ по формулам $\varphi_{n1}(x) = \psi_{n1}(x)$, $\varphi_{n0}(x) = \varphi_{n1}(x) + \xi_n \psi_{n0}(x)$, $n \geq 0$. Нетрудно убедиться, что функции $\varphi_{ni}^{(m)}(x)$, $m = 0, 1$, абсолютно непрерывны при $x \in \Omega_\varepsilon$ при каждом $\varepsilon > 0$ и $|\varphi_{ni}^{(m)}(x)| \leq C(|\rho_n^0| + 1)^m$, $|\varphi_{n0}^{(m)}(x) - \varphi_{n1}^{(m)}(x)| \leq C\xi_n(|\rho_n^0| + 1)^m$. Кроме того, имеет место соотношение (35).

Построим функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\Phi(x, \lambda)$ по формулам (33), (34). Тогда $\varphi_{ni}(x) = \varphi(x, \lambda_{ni})$. Построим L по формулам (42), (43). Ясно, что $L \in V$.

ЛЕММА 5. *Имеют место равенства*

$$l\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda), \quad l\Phi(x, \lambda) = \lambda\Phi(x, \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, используя (33), вычисляем с учетом (42):

$$\begin{aligned} \tilde{l}\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= l\varphi(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{D}_{k0}(x, \lambda)\alpha_{k0}l\varphi_{k0}(x) - \tilde{D}_{k1}(x, \lambda)\alpha_{k1}l\varphi_{k1}(x)) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (\langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle \alpha_{k0}\varphi_{k0}(x) - \langle \tilde{\varphi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle \alpha_{k1}\varphi_{k1}(x)). \end{aligned} \quad (51)$$

При $\lambda = \lambda_{ni}$ отсюда имеем

$$\begin{aligned} \tilde{l}\tilde{\varphi}_{ni}(x) &= l\varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x)l\varphi_{k0}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x)l\varphi_{k1}(x)) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (\langle \tilde{\varphi}_{ni}(x), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle \alpha_{k0}\varphi_{k0}(x) - \langle \tilde{\varphi}_{ni}(x), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle \alpha_{k1}\varphi_{k1}(x)). \end{aligned} \quad (52)$$

В силу равенств $\tilde{l}\tilde{\varphi}_{ni}(x) = \lambda_{ni}\tilde{\varphi}_{ni}(x)$ и (35) соотношение (52) дает

$$f_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x)f_{k0}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x)f_{k1}(x)) = 0, \quad f_{ni}(x) = l\varphi_{ni}(x) - \lambda_{ni}\varphi_{ni}(x).$$

Согласно условию Р теоремы 4 отсюда получаем $f_{ni}(x) = 0$, т.е.

$$l\varphi_{ni}(x) = \lambda_{ni}\varphi_{ni}(x). \quad (53)$$

Подставляя теперь (53) в (51) и учитывая (33), получаем $l\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda)$. Совершенно аналогично доказывается, что $l\Phi(x, \lambda) = \lambda\Phi(x, \lambda)$.

ЛЕММА 6. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \varphi(0, \lambda) &= 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = -h_0, \quad U_0(\Phi) = 1, \quad U_1(\Phi) = 0, \\ \Delta(\lambda_k) &= 0, \quad \alpha_k = \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь (33) и (34), вычисляем с учетом (43):

$$\tilde{U}_m(\tilde{\varphi}) = U_m(\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{D}_{k0}(mT, \lambda) \alpha_{k0} U_m(\varphi_{k0}) - \tilde{D}_{k1}(mT, \lambda) \alpha_{k1} U_m(\varphi_{k1})), \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m(\tilde{\Phi}) = U_m(\Phi) + \sum_{k=0}^{\infty} & \left(\left. \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k0}(x) \rangle}{\lambda - \lambda_{k0}} \right|_{x=mT} \alpha_{k0} U_m(\varphi_{k0}) \right. \\ & \left. - \left. \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle}{\lambda - \lambda_{k1}} \right|_{x=mT} \alpha_{k1} U_m(\varphi_{k1}) \right), \quad m = 0, 1. \end{aligned} \quad (55)$$

Так как $\tilde{D}_{kj}(0, \lambda) = 0$, $\tilde{\varphi}(0, \lambda) = 1$, $\tilde{U}_0(\tilde{\varphi}) = 0$, из (33) при $x = 0$ и (54) при $m = 0$ вытекает, что $\varphi(0, \lambda) = 1$, $U_0(\varphi) = 0$ и, следовательно, $\varphi'(0, \lambda) = -h_0$. Далее в силу (47)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{n1}} \tilde{D}_{k1}(T, \lambda) \alpha_{k1} = -\delta_{nk} \tilde{\varphi}(T, \tilde{\lambda}_k) \dot{\tilde{\Delta}}(\tilde{\lambda}_k) \tilde{\alpha}_k = \delta_{nk},$$

т.е. $\tilde{P}_{n1, k1}(T) - \delta_{nk} = 0$. Тогда из (54) при $m = 1$, $\lambda = \tilde{\lambda}_n$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{n1, k0}(T) \Delta(\lambda_k) = 0, \quad n \geq 0.$$

Используя условие Р, отсюда получаем $\Delta(\lambda_k) = 0$. Так как $\langle \tilde{\Phi}(x, \lambda), \tilde{\varphi}_{k1}(x) \rangle|_{x=T} = 0$, из (55) с учетом только что полученного равенства $\Delta(\lambda_k) = 0$ вычисляем $U_0(\Phi) = 1$, $U_1(\Phi) = 0$. Наконец, из (34) при $x = 0$ имеем

$$\widehat{M}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{\tilde{\alpha}_k}{\lambda - \tilde{\lambda}_k} \right)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda) = \alpha_k.$$

Лемма 6 доказана.

Таким образом, числа $\{\lambda_k, \alpha_k\}_{k \geq 0}$ являются спектральными данными задачи L , и теорема 4 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из приведенных выше рассуждений, теорема 4 остается верной, если в третьем условии вместо функции $\varkappa(x)$ использовать

$$\tilde{\varkappa}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{k0} \tilde{\varphi}_{k0}^2(x) - \alpha_{k1} \tilde{\varphi}_{k1}^2(x)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\{\mu_k\}_{k \geq 0}$ — нули функции $\delta(\lambda)$, т.е. СЗ краевой задачи L_1 для уравнения (1) с краевыми условиями $y(0) = U_1(y) = 0$. Так как $M(\lambda) = -(\Delta(\lambda))^{-1} \delta(\lambda)$, а функции $\Delta(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$ однозначно определяются своими нулями $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, из теоремы 1 следует, что задание двух спектров задач L и L_1 однозначно определяет коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий (1), (2). Это является обобщением известного результата Борга [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты, аналогичные приведенным выше, имеют место и для случая, когда уравнение содержит также особые точки и на концах интервала $x = 0$ и (или) $x = T$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [2] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
- [3] Сташевская В. В. Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 3. С. 409–412.
- [4] Гасымов М. Г. Определение уравнения Штурма–Лиувилля с особенностью по двум спектрам // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. С. 274–276.
- [5] Жорницкая Л. А., Серов В. С. Об одной теореме единственности для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, имеющим неинтегрируемую особенность // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2125–2134.
- [6] Carlson R. Inverse spectral theory for some singular Sturm–Liouville problems // J. Differential Equations. 1993. V. 106. P. 121–140.
- [7] Юрко В. А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1355–1362.
- [8] Yurko V. A. On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 495–502.
- [9] Юрко В. А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 133–160.
- [10] Levinson N. The inverse Sturm–Liouville problem // Math. Tidsskr. Ser. B. 1949. V. 2–3. P. 25–30.
- [11] Лейбензон З. Л. Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков // Тр. ММО. 1966. Т. 15. С. 70–144.
- [12] Боровиков В. А. О задаче Штурма–Лиувилля с нерегулярной асимптотикой собственных значений // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 43–51.
- [13] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
- [14] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.
- [15] Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. V. 78. P. 1–96.

Саратовский государственный университет

Поступило
21.05.97