Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Арефьев, Л. А. Багиров, О решениях уравнения теплопроводности в областях с особенностями, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 163–179

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:48:02

УДК 517.956.4

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ

В. Н. Арефьев, Л. А. Багиров

Изучается асимптотика решений задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в областях, зависящих от времени и имеющих особые точки.

Библиография: 18 названий.

Введение. С классической работы И. Г. Петровского 1934 года [1] начинается изучение рядом математиков краевых задач для параболических уравнений в нецилиндрических областях с особыми точками, в которых граничная поверхность касается гиперплоскости перпендикулярной оси t (см. [2]–[6]). Класс особых точек, рассмотренных в этих работах, можно охарактеризовать тем, что в окрестности такой точки область лежит по одну сторону от касательной гиперплоскости.

Были получены исчерпывающие результаты о гладкости решений таких задач и об асимптотике решений в окрестности особых точек.

Представляет интерес исследование решений параболических задач и для таких особых точек, в которых не выполнено это условие, а также таких, в которых касательная гиперплоскость не существует.

В настоящей работе такое исследование проведено в случае задачи Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности. Рассмотренные нами особые точки изображены на рис. 1–7.

Для изучения решения в более широком, чем в [2]–[6], классе особых точек возникла необходимость разработать новый метод, заключающийся в сведении модельной задачи к вырождающемуся операторному пучку на одномерном многообразии и последующем исследовании его резольвенты (п. 2). Нами показано, что свойства гладкости решения и его асимптотика определяются расположением корней функций параболического цилиндра с нецелыми показателями (п. 3). Информация об этих корнях, имеющаяся в литературе, недостаточна для наших целей и в п. 4 мы проводим их дополнительное исследование. В п. 6 подробно описываются полученные результаты о поведении решения в окрестности различных особых точек.

Общие краевые задачи для параболических уравнений в нецилиндрических областях с гладкой “боковой” поверхностью были исследованы в [7], [8]. Параболические задачи для уравнений высокого порядка в областях с коническими особенностями изучены в цикле работ В. Г. Мазы и В. А. Козлова (см. [9] и приведенную в ней библиографию). В [10] получено асимптотическое разложение решения параболического уравнения второго порядка в случае двугранных углов на боковой поверхности цилиндрической области. В работе [11] авторы рассмотрели задачу Дирихле для многомерной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00504, и фонда INTAS, грант № 93-351.

области с особыми точками первого и второго типа (см. определение 1). Некоторые результаты, полученные в этой статье, приведены в препринте [12].

1. Постановка задачи. Основные результаты.

Описание уравнения и области. В ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим параболическое уравнение вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv (\partial_t - \partial_x(a(x, t)\partial_x) + b(x, t)\partial_x + c(x, t))u(x, t) &= f(x, t), \\ \partial_t &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad (x, t) \in \overline{G}, \end{aligned} \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами $a(x, t), b(x, t), c(x, t) \in C^\infty(\overline{G})$.

Предположим, что граница области Γ состоит из конечного числа гладких кривых, пересекающихся в точках $\Gamma_j, j = 1, \dots, N$. Вне точек Γ_j граница не имеет касательных параллельных оси OX (см. рис. 8). В окрестности точек Γ_j граница Γ имеет определенную структуру, которая описана ниже.

Рис. 8

Так как все полученные в этой работе результаты носят локальный характер, без ограничения общности можно считать, что имеется лишь одна особая точка Γ_1 и она совпадает с началом координат.

Введем модельные области $K_j, j = 1, \dots, 7$, где

$K_1 = \{(x, t) : -\beta x^2 < t < \alpha x^2, x > 0, \alpha > 0, \beta > 0\}$ (рис. 1);

$K_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_1}$ (рис. 2);

K_3 – область с границей, состоящей из ветвей парабол $t = \alpha x^2$ при $x < 0$, $t = -\beta x^2$ при $x > 0$ и включающая полуось $t > 0$ (рис. 3);

$K_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_3}$ (рис. 4);

K_5 – область с границей, состоящей из ветвей парабол $t = -\alpha x^2$ при $x > 0$, $t = -\beta x^2$ при $x < 0$ и включающая полуось $t > 0$ (рис. 5);

$K_6 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_5}$ (рис. 6);

K_7 – область с границей, состоящей из ветвей парабол $t = \alpha x^2$ при $x > 0, t = \beta x^2$ при $x < 0$ и включающая полуось $t > 0$ (рис. 7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что область G имеет в точке $(0, 0)$ j -тип, если при некотором $\varepsilon > 0$

$$G \cap \Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon \cap K_j, \quad \text{где } \Delta_\varepsilon = \{(x, t) : x^4 + t^2 < \varepsilon^4\}.$$

В области G с границей Γ , проходящей через точку $(0, 0)$, рассмотрим слабое решение задачи Дирихле для уравнения (1), т.е. функцию $u(x, t) \in \dot{H}^{1,0}(G)$ (определение пространства см. ниже). При $f \in L_2(G)$, как следует из результатов работы [4], такое решение существует. Мы будем изучать дифференциальные свойства и асимптотическое поведение решения вблизи особых точек, имеющих j -тип, $j = 1, \dots, 5$. В областях, имеющих в точке $(0, 0)$ 6-тип и 7-тип, рассматривались более общие параболические задачи в работах [2]–[5], где получены исчерпывающие результаты.

Функциональные пространства. Нам понадобятся следующие пространства:

$\dot{H}^{1,0}(G)$ – пополнение множества $C_0^\infty(G)$ по норме пространства Соболева–Слободецкого $H_{x,t,2}^{1,0}(G)$;

$H_\gamma^{2l,l}(G), l \geq 0$ целое, $\gamma \in \mathbb{R}^1$, – пространство с нормой

$$\|u\|_{l,\gamma}^2 = \sum_{2k+s \leq 2l} \int_G r^{\gamma-2(2l-2k-s)} |\partial_t^k \partial_x^s u|^2 dx dt,$$

где $r = r(x, t)$ – функция положительная и гладкая в $\overline{G} \setminus \{(0, 0)\}$, совпадающая в окрестности Δ_ε точки $(0, 0)$ с функцией $(x^4 + t^2)^{1/4}$;

$H_\gamma^{2l,l}(K_j), l \geq 0$ целое, $\gamma \in \mathbb{R}^1$, – пространство с нормой

$$\|u\|_{l,\gamma}^2 = \sum_{2k+s \leq 2l} \int_{K_j} \rho^{\gamma-2(2l-2k-s)} |\partial_t^k \partial_x^s u|^2 dx dt,$$

где $\rho = (x^4 + t^2)^{1/4}, j = 1, \dots, 5$.

Формулировка основных результатов. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

$$|a(x, t) - a(0, 0)| \leq Ar(x, t), \quad |\partial_x a(x, t)| + |b(x, t)| + |c(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \overline{G}. \quad (2)$$

Всегда можно выбрать систему координат (x, t) так, чтобы $a(0, 0) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in \dot{H}^{1,0}(G)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f \in L_2(G)$ и выполнены условия (2). Тогда если область G в точке $(0,0)$ имеет 1-, 3- или 5-тип, то $u \in H_0^{2,1}(G)$ при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$; если область G имеет 2- или 4-тип, то при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ найдется δ , $0 < \delta < 1$, зависящее от β , такое, что $u \in H_\delta^{2,1}(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда $u(x, t) = O(r^{1/2})$ при $r \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u \in \dot{H}^{1,0}(G)$ – решение уравнения (1) и выполнены условия (2). Пусть $f \in L_2(G)$ и область G имеет в точке $(0,0)$ 2- или 4-тип. Тогда справедливо разложение

$$u(x, t) = d \cdot r^{\mu(\beta)} \psi(\omega) + w(x, t), \quad (3)$$

где $\mu(\beta)$ – наименьший корень уравнения $D_\mu(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$, $\psi(\omega)$ – соответствующая собственная функция, не зависящая от u и f , $d = \text{const}$. Если β_* – корень уравнения $D_{1/2}(-1/\sqrt{2\beta_*}) = 0$ и $0 < \beta < \beta_*$, то $0 < \mu(\beta) < 1/2$; если $\beta > \beta_*$, то $d = 0$ в (3), $w \in H_0^{2,1}(G)$ и справедлива оценка

$$\|w\|_{1,0} \leq C(\|f\|_{L_2} + \|u\|_{\dot{H}^{1,0}}).$$

Если $\beta = \beta_*$, то в (3) постоянная $d = 0$, $w \in H_\delta^{2,1}(G)$ при любом $\delta > 0$ и выполнено неравенство

$$\|w\|_{1,\delta} \leq C_\delta(\|f\|_{L_2} + \|u\|_{\dot{H}^{1,0}})$$

(через $D_\mu(x)$ обозначены функции параболического цилиндра [13, гл. 8]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если относительно коэффициентов уравнения (1) и его правой части известно, что они в особой точке Γ_1 разлагаются в асимптотические ряды по степеням r , то, как и в [3], можно получить разложение решения по степеням r .

СЛЕДСТВИЕ 2. При выполнении условий теоремы 2 функция

$$u(x, t) = d \cdot r^{\mu(\beta)} \psi(\omega) + O(r^\kappa),$$

где $d = 0$ и $\kappa = 1/2$, если $\beta > \beta_*$. Если $0 < \beta < \beta_*$, то $0 < \mu(\beta) < 1/2$ и $\kappa = 1/2$. Если $\beta = \beta_*$, то $d = 0$ и κ – любое число такое, что $0 < \kappa < 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из следствия 2 вытекает, что в случаях, когда $d \neq 0$, невозможно улучшение оценки решения при улучшении свойств правой части и коэффициентов уравнения.

Опишем те случаи, когда для обобщенного решения имеется лучшая оценка.

ТЕОРЕМА 3. Пусть область G в точке $(0,0)$ имеет 1-, 2- или 5-тип. Пусть функция $u \in \dot{H}^{1,0}(G)$ является решением уравнения (1) с $f \in H_\gamma^{0,0}(G)$ при $\gamma = -1 - 2\delta$, $\delta > 0$, и выполнены условия (2). Тогда $u(x, t) = O(r^{1+\delta})$ при $r \rightarrow 0$ и любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

2. Модельная задача.

Постановка модельной задачи и ее преобразование. В области $K = K_j$, где j – произвольное фиксированное число, $j = 1, \dots, 5$, рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}_0 u(x, t) \equiv (\partial_t - \partial_x^2) u(x, t) = f(x, t), \quad u|_{\partial K \setminus \{(0,0)\}} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно рассматривать как модельное, если в уравнении (1) отбросить младшие члены и зафиксировать коэффициент $a(x, t)$ в точке $(0, 0)$, без ограничения общности считая, что $a(0, 0) = 1$.

Рассмотрим преобразование координат $\psi: (x, t) \mapsto (\omega, \rho)$, где $\rho = (x^4 + t^2)^{1/4}$, $\omega \in \Omega = \{(x, t) : \rho = 1\}$. При $\rho \neq 0$ преобразование ψ бесконечно дифференцируемо и имеет невырожденный якобиан [14]. При этом область K переходит в $\Omega_0 \times (0, \infty)$, где $\Omega_0 = \Omega \cap K$. В уравнении (4), пока формально, выполним замену переменных ψ и преобразование Меллина

$$\tilde{u}(\omega, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \rho^{i\lambda-1} u(\omega, \rho) d\rho, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Получим уравнение с параметром λ вида

$$P(\omega, \partial\omega, \lambda) \tilde{u} \equiv (P_0(\omega) \lambda^2 + P_1(\omega, \partial\omega) \lambda + P_2(\omega, \partial\omega)) \tilde{u} = \tilde{F}(\omega, \lambda), \quad (5)$$

где $P_0(\omega)$ – гладкая функция, P_k – дифференциальные операторы порядка k на многообразии Ω_0 с гладкими коэффициентами. Функция $\tilde{F}$ – преобразование Меллина функции $f(x(\omega, \rho), t(\omega, \rho)) \cdot \rho^2$. Обозначим через $\dot{W}^1(\Omega_0)$ пополнение множества функций $C_0^\infty(\Omega_0)$ по норме пространства Соболева $W_2^1(\Omega_0)$ с естественной мерой $d\omega$, индуцированной мерой Лебега $dx dt$ в $\mathbb{R}^2$, т.е. $dx dt = \rho^2 d\rho d\omega$. Операторный пучок (5) не является эллиптическим с параметром в смысле работы [15], так как его коэффициенты могут вырождаться на Ω_0 . Тем не менее, используя параболичность задачи (4), порождающей этот пучок, можно исследовать его резольвенту.

Исследование резольвенты и асимптотика решения. Введем на Ω_0 оператор $\mathfrak{P}$ с областью определения $D_{\mathfrak{P}} = \dot{W}^1(\Omega_0)$. Он определяется как $\mathfrak{P}\varphi = P(\omega, \partial\omega, \lambda)\varphi$ на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$. На $\dot{W}^1(\Omega_0)$ он задается с помощью соответствующей билинейной формы. При этом используется тот факт, что оператор P_2 в (5) легко записывается в виде произведения двух дифференциальных операторов первого порядка с гладкими коэффициентами.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- i) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathfrak{P}$ имеет конечный индекс;
- ii) существуют $\theta \in (0, \pi/2)$ и $N > 0$ такие, что в области

$$\Lambda_{\theta, N} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\pm\lambda)| < \theta, |\lambda| > N\}$$

оператор $\mathfrak{P}$ имеет ограниченный обратный $R(\lambda): L_2(\Omega_0) \rightarrow \dot{W}^1(\Omega_0)$;

- iii) для любой функции $w \in \dot{W}^1(\Omega_0)$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнена оценка

$$\|w\|_{\dot{W}^1(\Omega_0)} + |\lambda| \cdot \|w\|_{L_2(\Omega_0)} \leq c(\|\mathfrak{P}w\|_{L_2(\Omega_0)} + \|w\|_{L_2(\Omega_0)}), \quad (6)$$

где c не зависит от w . Если $|\operatorname{Im} \lambda| < C_1 < \infty$, то постоянную c в (6) можно выбрать не зависящей от λ .

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [11], где рассмотрен многомерный случай.

СЛЕДСТВИЕ 3. Оператор $R(\lambda): L_2(\Omega_0) \rightarrow L_2(\Omega_0)$ является конечномероморфной операторной функцией λ и $\|R(\lambda)\| = O(|\lambda|^{-1})$ при $|\operatorname{Re} \lambda| \rightarrow \infty$, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq C_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу работы [16] из утверждений i) и ii) теоремы 4 вытекает, что $R(\lambda)$ – конечномероморфная функция λ . Оценка $\|R(\lambda)\| \leq c|\lambda|^{-1}$ при $|\operatorname{Im} \lambda| < C_1$ и $|\lambda| > N$ получается из неравенства (6).

ТЕОРЕМА 5. Все полюсы операторной функции $R(\lambda)$ лежат на мнимой оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в точке λ расположен полюс $R(\lambda)$, то функция $u(x, t) = \rho^{-i\lambda} v(\omega)$ является решением задачи (4) с $f \equiv 0$. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\alpha \neq 0$. Очевидно, что функции

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{Re} u = \rho^\beta (\operatorname{Re} v(\omega) \cos(\alpha \ln \rho) + \operatorname{Im} v(\omega) \sin(\alpha \ln \rho)), \\ z &= \operatorname{Im} u = \rho^\beta (\operatorname{Im} v(\omega) \cos(\alpha \ln \rho) - \operatorname{Re} v(\omega) \sin(\alpha \ln \rho)) \end{aligned}$$

также являются решениями задачи (4). Покажем, что $w \equiv z \equiv 0$ при $\alpha \neq 0$. Функция w обращается в 0 на границе области K и на кривых

$$\gamma_n = \left\{ (x, t) : \alpha \ln \rho = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\operatorname{Re} v}{\operatorname{Im} v} \right) + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Пусть Q – область, ограниченная кривыми ∂K , γ_{n_1} и γ_{n_2} , где $n_1, n_2, n_1 \neq n_2$, – произвольные целые числа. Тогда в силу уравнения (4) имеем

$$0 \equiv \int_Q (w \partial_t w - w \partial_x^2 w) dx dt = \int_Q (\partial_x w)^2 dx dt.$$

Отсюда вытекает, что $w \equiv 0$ в любой области вида Q , а значит, и везде в K . Аналогично доказывается, что $z \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 6. Если точка $\lambda = ih$, $h = (4l + 1 - \tau)/2$, не является точкой спектра операторного пучка $\mathfrak{P}$, то при любых $f \in H_\tau^{2l, l}(K)$ существует единственное решение $u \in H_\tau^{2(l+1), l+1}(K)$ задачи (4). При этом выполнено неравенство

$$\|u\|_{l+1, \tau} \leq c \|f\|_{l, \tau},$$

где c не зависит от u и f .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $u \in H_\tau^{2(l+1), l+1}(K)$ – решение задачи (4), $f \in H_\gamma^{2l, l}(K)$, $\gamma < \tau$, $h_1 = (4l + 1 - \gamma)/2$, и $\lambda = ih_1$ не является точкой спектра операторного пучка $\mathfrak{P}$. Тогда справедливо разложение

$$u(x, t) = \sum_{j, s} d_{js} \rho^{\mu_j} \psi_{js}(\omega) + w(x, t), \quad (7)$$

где $w(x, t) \in H_\gamma^{2(l+1), l+1}(K)$, и выполнена оценка

$$\|w\|_{l+1, \gamma} \leq c \|f\|_{l, \gamma}.$$

Числа $\mu_j = \operatorname{Im} \lambda_j$ – точки спектра задачи (5), лежащие в интервале $h < \operatorname{Im} \lambda < h_1$, $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, $h = (4l + 1 - \tau)/2$; $\psi_{js}(\omega)$ – соответствующие собственные функции; d_{js} – постоянные, зависящие от u , причем $s = 0, 1$ только в случае области $K = K_5$ при $\alpha = \beta$ и $\mu_j > 1$, и $s = 0$ в остальных случаях.

Теоремы 6 и 7 доказываются как теоремы 2 и 3 из [11]. При получении разложения (7) используется теорема 5, а также результаты п. 5 о спектре операторного пучка (5).

3. Вывод трансцендентных уравнений. В этом пункте для каждой из областей K_j , $j = 1, \dots, 5$, выписаны трансцендентные уравнения, корнями которых являются полюсы $R(\lambda)$. Для областей K_1 и K_3 эти уравнения были ранее приведены в [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Собственные значения операторного пучка (5) определяются из уравнений*

$$D_{-\mu-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)D_{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0, \quad \text{если } K = K_1, \quad (8)$$

$$D_{-\mu-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)D_{\mu}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0, \quad \text{если } K = K_2, \quad (9)$$

$$D_{-\mu-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)D_{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0, \quad \text{если } K = K_3, \quad (10)$$

$$D_{-\mu-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)D_{\mu}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0, \quad \text{если } K = K_4, \quad (11)$$

$$D_{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)D_{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right)\Gamma^{-1}\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2}\right) = 0, \quad \text{если } K = K_5. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области K_1 решение однородного уравнения (4) будем искать в виде

$$u(x, t) = \rho^{\mu} v(\omega) = x^{\mu} y\left(\frac{t}{x^2}\right), \quad (13)$$

где $y(\xi) = (1 + \xi^2)^{\mu/4} v(\xi)$, $\xi = t/x^2$, $\mu = \operatorname{Im} \lambda$. После подстановки (13) в (4) получим краевую задачу

$$4\xi^2 y'' + ((6 - 4\mu)\xi - 1)y' + \mu(\mu - 1)y = 0, \quad y(-\beta) = y(\alpha) = 0. \quad (14)$$

На интервале $0 < \xi < \alpha$ в (14) сделаем замену переменных

$$y(\xi) = \zeta^{-\mu} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) U(\zeta), \quad \xi = \frac{1}{2\zeta^2}.$$

Тогда уравнение преобразуется к виду

$$U'' + \left(-\left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \frac{\zeta^2}{4}\right)U = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} < \zeta < \infty. \quad (15)$$

Выполнив в (14) на интервале $-\beta < \xi < 0$ замену

$$y(\xi) = \eta^{-\mu} \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right) V(\eta), \quad \xi = -\frac{1}{2\eta^2}, \quad (16)$$

получим уравнение

$$V'' + \left(\left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \frac{\eta^2}{4}\right)V = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2\beta}} < \eta < \infty. \quad (17)$$

Отсюда, чтобы отыскать решение задачи (14), достаточно найти такие ограниченные решения $U(\zeta)$ и $V(\eta)$ уравнений (15) и (17) соответственно, которые удовлетворяют краевым условиям

$$U\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right) = 0, \quad V\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0 \quad (18)$$

и условию согласования

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^{-\mu} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) U(\zeta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^{-\mu} \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right) V(\eta). \quad (19)$$

Общие решения уравнений (15) и (17) выражаются через функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$ (свойства этих функций см. в [13, гл. 8]). Уравнение (15) имеет общее решение вида

$$U(\zeta) = c_1 D_{-\mu-1}(\zeta) + c_2 D_\mu(i\zeta), \quad (20)$$

а уравнение (17) – решение

$$V(\eta) = c_3 D_\mu(\eta) + c_4 D_{-\mu-1}(i\eta). \quad (21)$$

Функции $D_\nu(z)$ в области $|\arg z| < 3\pi/4$ при $|z| \rightarrow \infty$ обладают асимптотикой

$$D_\nu(z) = z^\nu \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) (1 + O(|z|^{-2})). \quad (22)$$

Поэтому предел в правой части (19) существует лишь при $c_4 = 0$ и равен c_3 , а предел в левой части существует при любых c_1 и равен $i^\mu c_2$. Таким образом, $c_3 = i^\mu c_2$. Из краевых условий (18) следуют соотношения

$$c_1 D_{-\mu-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right) + c_3 i^{-\mu} D_\mu\left(\frac{i}{\sqrt{2\alpha}}\right) = 0, \quad c_3 D_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0. \quad (23)$$

Система (23), а вместе с ней и задача (14), имеет нетривиальное решение только для μ , удовлетворяющих уравнению (8).

В случае области K_2 удобно рассмотреть вспомогательную область K' , в которую преобразуется K_2 после замены $x' = -x$, $t' = t$. После такой замены уравнение (4) не изменится. Поэтому уравнения для собственных чисел задачи (5) будут одинаковыми для областей K' и K_2 . Будем искать решение однородного уравнения (4) в виде $u(x', t') = |t'|^{\mu/2} y(x'/\sqrt{|t'|})$, $\omega = x'/\sqrt{|t'|}$. После подстановки в (4) получим при $t' > 0$

$$y'' + \frac{\omega}{2} y' - \frac{\mu}{2} y = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \omega < \infty, \quad (24)$$

а при $t' < 0$

$$y'' - \frac{\omega}{2} y' + \frac{\mu}{2} y = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{\beta}} < \omega < \infty. \quad (25)$$

Далее, при $t' > 0$ после замены переменных

$$y(\omega) = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) U(\zeta), \quad \zeta = \frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad (26)$$

в (24) приходим к уравнению (15) в интервале $-1/\sqrt{2\alpha} < \zeta < \infty$.

Если $t' < 0$, то после замены

$$y(\omega) = \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right) V(\eta), \quad \eta = \frac{\omega}{\sqrt{2}},$$

в (25) приходим к уравнению (17) в интервале $-1/\sqrt{2\beta} < \eta < \infty$.

Используя нулевое краевое условие и непрерывность решения на полуоси $x' > 0$ и проводя далее такие же рассуждения, как и для области K_1 , приходим к уравнению (9).

Область K_3 можно представить в виде объединения двух областей, одна из которых является частью области K_1 при $t < 0$, а другая — частью K_2 при $t > 0$. Поэтому естественно решение $U(x, t)$ при $t < 0$ искать в виде (13). Тогда после замены (16) получим уравнение (17). Если $t > 0$, то решение надо представить в виде $U(x, t) = t^{\mu/2} y(x/\sqrt{t})$, $w = x/\sqrt{t}$. Тогда в результате замены (26) приходим к уравнению (15) в интервале $(-1/\sqrt{2\alpha}, \infty)$. Нулевое краевое условие задачи (4) и условие непрерывности решения на полуоси $x > 0$ преобразуются в данном случае к виду

$$U\left(-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right) = 0, \quad V\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0,$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 2^{-\mu/2} \zeta^{-\mu} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) U(\zeta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^{-\mu} \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right) V(\eta).$$

Далее рассуждения ничем не отличаются от случая области K_1 . В результате получится уравнение (10).

В области K_4 решение однородной задачи (4) удобно искать в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} |x|^\mu y\left(\frac{t}{x^2}\right) & \text{при } t > 0, \\ |t|^{\mu/2} z\left(\frac{x}{\sqrt{|t|}}\right) & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Действуя так же, как и в предыдущих случаях, получим уравнение (11) для μ . Некоторые отличия от предыдущих рассуждений имеются в области K_5 , а именно, в этой области решение однородной задачи (4) удобно искать в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} x^\mu y_1\left(\frac{t}{x^2}\right) & \text{при } x > 0, \\ |x|^\mu y_2\left(\frac{t}{x^2}\right) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Для $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$ получаются уравнения вида (14), но для каждого из них выполнено только одно граничное условие: $y_1(-\alpha) = 0$ или $y_2(-\beta) = 0$ соответственно. Общее решение каждого из этих уравнений имеет следующий вид (вывод такой же, как и в области K_1):

$$y_1(\xi) = \begin{cases} \zeta^{-\mu} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) (c_1 D_{-\mu-1}(\zeta) + c_2 D_\mu(i\zeta)), & 0 < \xi = \frac{1}{2\zeta^2} < \infty, \\ \eta^{-\mu} \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right) (c_3 D_\mu(\eta) + c_4 D_{-\mu-1}(i\eta)), & -\alpha < \xi = -\frac{1}{2\eta^2} < 0, \end{cases}$$

$$y_2(\xi) = \begin{cases} \zeta^{-\mu} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) (c_5 D_{-\mu-1}(\zeta) + c_6 D_\mu(i\zeta)), & 0 < \xi = \frac{1}{2\zeta^2} < \infty, \\ \eta^{-\mu} \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right) (c_7 D_\mu(\eta) + c_8 D_{-\mu-1}(i\eta)), & -\beta < \xi = -\frac{1}{2\eta^2} < 0. \end{cases}$$

Проводя склейку для функции $y_1(\xi)$ на полуоси $x > 0$, $t = 0$, а для функции $y_2(\xi)$ на полуоси $x < 0$, $t = 0$, мы получим так же, как и в случае области K_1

$$c_4 = 0, \quad c_8 = 0, \quad c_3 = i^\mu c_2, \quad c_7 = i^\mu c_6.$$

Из граничных условий имеем

$$c_3 D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \right) = 0, \quad c_7 D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}} \right) = 0. \quad (27)$$

Остальные постоянные определим из условий непрерывности $u(x, t)$ и $\partial_x u(x, t)$ на полуоси $t > 0$, $x = 0$:

$$\begin{aligned} c_1 D_{-\mu-1}(0) + c_2 D_\mu(0) - c_5 D_{-\mu-1}(0) - c_6 D_\mu(0) &= 0, \\ c_1 D'_{-\mu-1}(0) + i c_2 D'_\mu(0) + c_5 D'_{-\mu-1}(0) + i c_6 D'_\mu(0) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В результате уравнение для определения μ имеет вид

$$D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \right) D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}} \right) D_{-\mu-1}(0) D'_{-\mu-1}(0) = 0.$$

Используя формулы

$$D_\nu(0) = 2^{\nu/2} \sqrt{\pi} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right), \quad D'_\nu(0) = -2^{\nu/2} \sqrt{2\pi} \Gamma^{-1} \left(-\frac{\nu}{2} \right), \quad (29)$$

это уравнение можно переписать в виде (12).

4. О нулях функций параболического цилиндра. В предыдущем пункте мы вывели ряд трансцендентных уравнений, корни которых определяют поведение решения рассматриваемой задачи в окрестности особых точек разных типов. Все корни этих уравнений являются нулями функций параболического цилиндра $D_\nu(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$D''_\nu(x) + \left(\left(\nu + \frac{1}{2} \right) - \frac{x^2}{4} \right) D_\nu(x) = 0 \quad (30)$$

и начальным условиям (29). Функции параболического цилиндра хорошо исследованы (см., например, [13]). Однако, нам не удалось найти в литературе всей необходимой для нашего исследования информации о корнях этих функций. Поэтому в этом пункте мы приводим необходимые результаты, доказывая те из них, на которые не можем указать ссылку. В [12] приведены графики корней трансцендентного уравнения $D_\nu(a) = 0$, полученные численными методами. Результаты, приводимые ниже, аналитически обосновывают полученную с помощью численных расчетов картину распределения корней.

При целых ν функции $D_\nu(z)$ выражаются через полиномы Эрмита. Поэтому будем исследовать только случай нецелых ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см., например, [17]). *Если ν вещественно, то $D_\nu(x)$ имеет $[\nu + 1]$ вещественных нулей, где $[\nu + 1]$ – наибольшее натуральное число, меньшее $\nu + 1$ и равное 0, если такое натуральное число не существует.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) *при $\nu \leq 0$ функция $D_\nu(x)$ не имеет нулей;*
- б) *при $0 < \nu \leq 1$ функция $D_\nu(x)$ имеет ровно один нуль x_0 , причем $x_0 < 0$ при $0 < \nu < 1$, $x_0 = 0$ при $\nu = 1$ и $\lim_{\nu \rightarrow 0} x_0(\nu) = -\infty$;*
- с) *при $1 < \nu \leq 2$ функция $D_\nu(x)$ имеет ровно два нуля $x_1(\nu)$ и $x_2(\nu)$, причем $x_1(\nu) < 0$, $x_2(\nu) > 0$, $x_1(2) = -1$, $x_2(2) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) является прямым следствием предложения 2 так же, как и первая часть утверждений б) и с). Из (29) следует, что при $0 < \nu < 1$ $D_\nu(0) > 0$, а из асимптотики (22) вытекает, что $D_\nu(x) > 0$ при больших x . Значит, если $D_\nu(x)$ имеет положительные нули, то их по крайней мере два. Из полученного противоречия следует, что $x_0(\nu) < 0$ при $0 < \nu < 1$.

Покажем, что $\lim_{\nu \rightarrow 0} x_0(\nu) = -\infty$. Предположим противное, т.е. $\lim_{\nu \rightarrow 0} x_0(\nu) = x^* > -\infty$. Это означает, что $D_0(x) = 0$ имеет корень, но $D_0(x) = \exp(-x^2/4)$. Пришли к противоречию. Заметим, что мы использовали монотонность $x_0(\nu)$, которую докажем в предложении 4.

Последняя часть утверждения с) следует из того, что $D_\nu(0) < 0$ при $1 < \nu < 2$, а значит, с учетом асимптотики (22) из предположения о положительности обоих корней вытекает наличие третьего корня, что невозможно. Следствие доказано.

Функция $D_\nu(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения с аналитическими по ν и x коэффициентами, и начальные условия в точке $x = 0$ – также аналитические функции. Поэтому $D_\nu(x)$ – аналитическая функция по ν и x . Если $D_\nu(x_0) = 0$, то $D'_\nu(x_0) \neq 0$, иначе $D_\nu(x) \equiv 0$, что невозможно.

Пусть a – фиксированное число. Рассмотрим относительно ν уравнение

$$D_\nu(a) = 0. \quad (31)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Уравнение (31) имеет только простые корни.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (30) для $D_\mu(x)$ при $\mu \neq \nu$ и вычтем одно из другого, получим

$$(D'_\nu(x)D_\mu(x) - D_\nu(x)D'_\mu(x))' = (\mu - \nu)D_\nu(x)D_\mu(x).$$

Отсюда после интегрирования от 0 до $+\infty$ с учетом асимптотики (22) имеем равенство

$$D'_\mu(a)D_\nu(a) - D'_\nu(a)D_\mu(a) = (\mu - \nu) \int_a^\infty D_\nu(x)D_\mu(x) dx. \quad (32)$$

Перепишем (32) в виде

$$D_\nu(a) \frac{D'_\mu(a) - D'_\nu(a)}{\mu - \nu} + D'_\nu(a) \frac{D_\nu(a) - D_\mu(a)}{\mu - \nu} = \int_a^\infty D_\nu(x)D_\mu(x) dx \quad (33)$$

и перейдем в (33) к пределу при $\mu \rightarrow \nu$. Имеем

$$D_\nu(a) \frac{\partial}{\partial \nu} D'_\nu(a) - D'_\nu(a) \frac{\partial}{\partial \nu} D_\nu(a) = \int_a^\infty D_\nu^2(x) dx. \quad (34)$$

Положим в (34) $\nu = \nu_0$, где ν_0 – корень уравнения (31). Тогда

$$-D'_{\nu_0}(a) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} D_{\nu}(a) \right)_{\nu=\nu_0} = \int_a^{\infty} D_{\nu_0}^2(x) dx.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} D_{\nu}(a) \right)_{\nu=\nu_0} \neq 0,$$

так как $D'_{\nu_0}(a) \neq 0$, как было показано выше.

Легко видеть, что уравнение (31) можно разрешить относительно a и получить, вообще говоря, многозначную функцию $a(\nu)$, описывающую корни уравнения (31) как нули функции двух переменных. Из теоремы о неявной функции следует, что каждая однозначная ветвь функции $a(\nu)$ является гладкой функцией.

Пусть $a_1(\nu)$ – однозначная ветвь $a(\nu)$, определенная при всех $0 < \nu < +\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Функция $a_1(\nu)$ монотонно возрастает.*

Доказательство этого факта получается дифференцированием равенства (31) по ν и последующим применением формулы (34).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналоги предложения 4 можно легко доказать для всех ветвей функции $a(\nu)$. Однако, в дальнейшем нам потребуется только ветвь $a_1(\nu)$.

ЛЕММА 1. *При любых $\mu > 1$ и $a > 0$ имеем $D_{\mu}(ia) \neq 0$.*

Доказательство основывается на известных свойствах функций параболического цилиндра (см. [13, с. 123–125]).

5. Описание спектра операторного пучка (5). Как следует из теоремы 7, асимптотика решения модельной задачи (4) в каждой из областей K_j , $j = 1, \dots, 5$, определяется собственными числами λ_s и собственными функциями ψ_s операторного пучка (5). В п. 3 мы вывели трансцендентные уравнения для определения λ_s и в п. 4 исследовали корни этих уравнений. В этом пункте мы исследуем расположение спектра пучка (5) и свойства соответствующих собственных функций для каждой из модельных областей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Спектр операторного пучка (5) в области K_j , $j = 1, \dots, 4$, при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ состоит из однократных собственных значений и соответствующие собственные подпространства одномерные. Кроме того, справедливы следующие утверждения.*

1) Для области K_1 спектр лежит вне отрезка $[-2, 1]$. В интервале $(1, \infty)$ собственные значения пучка (5) определяются уравнением $D_{\mu}(1/\sqrt{2\beta}) = 0$. В интервале $(-\infty, -2)$ они определяются уравнением $D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha}) = 0$, а соответствующие собственные функции ψ_s обращаются в 0 на кривой $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0\}$.

2) В случае области K_2 спектр лежит вне отрезка $[-1, 0]$. При $\mu > 0$ он определяется уравнением $D_{\mu}(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$. При $\mu < -1$ собственные значения определяются уравнением $D_{-\mu-1}(-1/\sqrt{2\alpha}) = 0$, а соответствующие собственные функции ψ_s обращаются в 0 на $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0\}$.

3) Для области K_3 спектр лежит вне отрезка $[-1, 1]$. В интервале $(1, \infty)$ собственные значения определяются уравнением $D_{\mu}(1/\sqrt{2\beta}) = 0$, а в интервале $(-\infty, -1)$ – уравнением $D_{-\mu-1}(-1/\sqrt{2\alpha}) = 0$. Соответствующие собственные функции ψ_s при $\mu < -1$ обращаются в 0 на $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0\}$.

4) Для области K_4 собственные значения пучка (5) лежат вне отрезка $[-2, 0]$ и при $\mu > 0$ определяются уравнением $D_\mu(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$, а при $\mu < -2$ — уравнением $D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha}) = 0$. Соответствующие собственные функции ψ_s при $\mu < -2$ обращаются в 0 на $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим область K_1 . Как следует из (8), возможны два случая.

а) Число μ является корнем уравнения $D_\mu(1/\sqrt{2\beta}) = 0$. Тогда в силу следствия 4 $\mu > 1$, и, таким образом, не может быть корнем уравнения $D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha}) = 0$. Вид собственных функций определяется формулами (20), (21), (23). Из (23), в частности, вытекает, что $c_3 \neq 0$. Так как по лемме 1 $D_\mu(i/\sqrt{2\alpha}) \neq 0$, то и $c_1 \neq 0$.

б) Выполнено условие $D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha}) = 0$. Это возможно только при $\mu < -2$. Тогда $D_\mu(1/\sqrt{2\beta}) \neq 0$. Следовательно, $c_3 = 0$, $c_1 \neq 0$, т.е. собственные функции на кривой $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0\}$ равны 0.

Для областей K_2 , K_3 и K_4 анализ уравнений (9), (10) и (11) приводит к утверждениям 2), 3) и 4).

Несколько иначе выглядит утверждение для области K_5 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для области K_5 спектр пучка (5) лежит вне множества $[-1, 1]$. При $\mu > 1$ спектр определяется уравнениями

$$D_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right) = 0, \quad (35)$$

$$D_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\right) = 0. \quad (36)$$

Если $\mu > 1$ и $\alpha \neq \beta$, то каждой точке спектра соответствует одномерное собственное подпространство. При этом соответствующая собственная функция ψ_s обращается в 0 либо на $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0, x < 0\}$, либо на $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0, x > 0\}$. Если $\mu > 1$ и $\alpha = \beta$, то собственное подпространство двумерное.

При $\mu \leq -1$ спектр состоит из точек

$$\mu_k = k, \quad k = -1, -2, -3, \dots; \quad (37)$$

каждому μ_k отвечает одномерное собственное подпространство, а собственные функции ψ_s обращаются в 0 на $\Omega_0 \cap \{(x, t) : t < 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $\mu > 1$ из (12) имеем (35) и (36). Если $\alpha \neq \beta$ и μ_0 удовлетворяет (35), то μ_0 не является корнем (36). Тогда из (27) следует, что $c_3 \neq 0$, $c_7 = 0$, а значит, и $c_6 = 0$. Из (28) вытекает, что c_1 и c_5 однозначно определяются через c_2 , так как соответствующий определитель не равен 0 при $\mu > 1$. Аналогично рассматривается случай, когда μ_0 — корень (36). Если $\alpha = \beta$, то $c_3 \neq 0$ и $c_7 \neq 0$. Тогда из (28) следует, что c_1 и c_5 являются линейными функциями c_2 и c_6 , т.е. собственное подпространство двумерное. В области $\mu \leq -1$ из (12) получаем, что спектр (5) имеет вид (37). Если $\mu_0 \in \{-1, -2, \dots\}$, то μ_0 не удовлетворяет (35) и (36). Следовательно, $c_3 = c_2 = c_7 = c_6 = 0$. Тогда определитель системы (28) обращается в 0 и

$$c_1 = \begin{cases} c_5 & \text{при } \mu_0 \in \{-1, -3, \dots\}, \\ -c_5 & \text{при } \mu_0 \in \{-2, -4, \dots\}. \end{cases}$$

6. Асимптотика решения модельных задач. В этом пункте мы на основе теоремы 7 и результатов о спектре операторного пучка (5), доказанных в п. 5, получим асимптотическое разложение решения задачи (4) в окрестности точки $(0, 0)$ для каждой из областей $K = K_j, j = 1, \dots, 5$.

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Пусть $\Gamma_{a,b} = \partial K_{a,b} \cap \partial K$, $K_{a,b} = \{(x, t) : (x, t) \in K, a < \rho < b\}$, $b > a > 0$. Пусть $u \in H_{x,t,2}^{2,1}(K_{a,b})$ является решением уравнения (4) в $K_{a,b}$ при любых a и b , $u|_{\Gamma_{a,b}} = 0$. Тогда если $u \in H_\gamma^{0,0}(K)$, $f \in H_{\gamma+4}^{0,0}(K)$, то $u \in H_{\gamma+4}^{2,1}(K)$ и выполнено неравенство

$$\|u\|_{1,\gamma+4} \leq c(\|f\|_{0,\gamma+4} + \|u\|_{0,\gamma}).$$

Доказательство леммы для областей $K = K_j, j = 1, \dots, 5$, проводится совершенно аналогично доказательству леммы 1 в [11].

Не ограничивая общности, будем считать везде в этом пункте, что $u \equiv 0$ и $f \equiv 0$ при $(x, t) \notin K_\varepsilon = K \cap \Delta_\varepsilon$. Относительно решения будем предполагать, что $u \in \hat{H}^{1,0}(K)$, значит $\partial_x u \in L_2(K_\varepsilon)$ и $u \in L_2(K_\varepsilon)$.

Пусть $f \in L_2(K_\varepsilon)$. Тогда в силу теорем о гладкости обобщенного решения параболического уравнения имеем $u \in H_{x,t,2}^{2,1}(K_{a,b})$ при любых $b > a > 0$. Используя лемму 2 при $\gamma = 0$, получим, что $u \in H_4^{2,1}(K_\varepsilon)$. Применим теперь теорему 7 при $l = 0, \tau = 4, \gamma = 0$. При таких значениях параметров $h_1 = 1/2$, а $h = -3/2$.

Из предложения 5 вытекает, что для области K_1 отрезок $[-3/2, 1/2]$ свободен от спектра и, следовательно, $u \in H_0^{2,1}(K_\varepsilon)$.

В области K_2 разложение (7) примет вид

$$u(x, t) = d_1 \rho^{\mu_1(\alpha)} \psi_1(\omega) + d_2 \rho^{\mu_2(\beta)} \psi_2(\omega) + w(x, t),$$

где $-3/2 \leq \mu_1(\alpha) < -1, 0 < \mu_2(\beta) < 1/2$, d_1 и d_2 – постоянные, $w \in H_0^{2,1}(K_2)$. Причем $d_1 = 0$, если $\alpha > \alpha_*$, где α_* – корень уравнения $D_{1/2}(-1/\sqrt{2\alpha_*}) = 0$. Так как априори $\partial_x u \in L_2(K_\varepsilon)$, получаем, что $d_1 = 0$ при любом α . Таким образом, для области K_2 имеем

$$u(x, t) = d \rho^{\mu(\beta)} \psi(\omega) + w(x, t), \quad (38)$$

где $d = \text{const}$, $\mu(\beta)$ – минимальный корень уравнения $D_\mu(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$. Причем $0 < \mu(\beta) < 1/2$, если $0 < \beta < \beta_*$, где β_* – корень уравнения $D_{1/2}(-1/\sqrt{2\beta_*}) = 0$. Если $\beta > \beta_*$, то $d = 0$ в (38) и $w \in H_0^{2,1}(K_2)$; если $\beta = \beta_*$, то $d = 0$ и $w \in H_\delta^{2,1}(K_2)$ при любом $\delta > 0$.

Из утверждения 3) предложения 5 вытекает, что для области K_3 отрезок $[-1, 1/2]$ свободен от спектра. Значит,

$$u(x, t) = d_1 \rho^{\mu_1(\alpha)} \psi_1(\omega) + w(x, t),$$

где $-3/2 \leq \mu_1(\alpha) < -1$, d_1 – постоянная, причем $d_1 = 0$, если $\alpha > \alpha_*$, α_* – корень уравнения $D_{1/2}(-1/\sqrt{2\alpha_*}) = 0$, $w \in H_0^{2,1}(K_3)$. Очевидно, из условия $\partial_x u \in L_2(K_\varepsilon)$ следует, что $d_1 = 0$ при любом α .

Из утверждения 4) предложения 5 вытекает, что для области K_4 отрезок $[-3/2, 0]$ свободен от спектра. Значит,

$$u(x, t) = d \rho^{\mu(\beta)} \psi(\omega) + w(x, t), \quad (39)$$

где $d = \text{const}$, $\mu(\beta)$ – минимальный корень уравнения $D_\mu(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$, $0 < \mu(\beta) < 1/2$, если $0 < \beta < \beta_*$; $d = 0$, если $\beta > \beta_*$. В этом случае $w \in H_0^{2,1}(K_4)$. Если $\beta = \beta_*$, то в (39) так же, как и в (38) постоянная $d = 0$ и $w \in H_\delta^{2,1}(K_4)$ при любом $\delta > 0$.

Из предложения 6 вытекает, что для области K_5

$$u(x, t) = d\rho^{-1}\psi(\omega) + w(x, t), \quad \text{где } d = \text{const}, \quad w \in H_0^{2,1}(K_5).$$

Очевидно, что $d = 0$, так как $\partial_x(\rho^{-1}\psi(\omega)) \notin L_2(K_\varepsilon)$.

Таким образом, мы доказали следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $u \in \mathring{H}^{1,0}(K_j)$, $j = 1, 3, 5$, является решением задачи (4) с $f \in L_2(K_j)$ и $\text{supp}(u, f) \subset K_j \cap \Delta_\varepsilon$. Тогда $u \in H_0^{2,1}(K_j)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $u \in \mathring{H}^{1,0}(K_j)$, $j = 2, 4$, является решением задачи (4) с $f \in L_2(K_j)$ и $\text{supp}(u, f) \subset K_j \cap \Delta_\varepsilon$. Тогда справедливо представление

$$u(x, t) = d\rho^{\mu(\beta)}\psi(\omega) + w(x, t), \quad (40)$$

где $\mu(\beta)$ – минимальный корень уравнения $D_\mu(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$, $\psi(\omega)$ – соответствующая собственная функция. Если β_* – корень уравнения $D_{1/2}(-1/\sqrt{2\beta_*}) = 0$ и $0 < \beta < \beta_*$, то $0 < \mu(\beta) < 1/2$. Если $\beta > \beta_*$, то $d = 0$ в (40), $w \in H_0^{2,1}(K_j)$ и имеет место оценка

$$\|w\|_{1,0} \leq c(\|f\|_{L_2} + \|u\|_{\mathring{H}^{1,0}}).$$

Если $\beta = \beta_*$, то $d = 0$ в (40), $w \in H_\delta^{2,1}(K_j)$ при любом $\delta > 0$ и справедливо неравенство

$$\|w\|_{1,\delta} \leq c_\delta(\|f\|_{L_2} + \|u\|_{\mathring{H}^{1,0}}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Более сильные ограничения на функцию f позволяют получить с помощью теоремы 7 несколько членов асимптотического разложения решения (40).

7. Асимптотическое поведение и гладкость решений задачи Дирихле для уравнения (1). В этом пункте мы докажем теоремы 1 и 2.

Без ограничения общности будем считать, что $\text{supp}(u, f) \subset \Delta_\varepsilon$. В общем случае доказательство теорем 1 и 2 проводится с помощью разбиения единицы (см., например, [3, § 6]). При этом вне окрестности Δ_ε используются известные теоремы о гладкости обобщенных решений внутри области и вблизи гладкого куска границы [18, гл. III, § 12]. Будем предполагать также, что $a(0, 0) = 1$. Запишем уравнение (1) в виде

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = f + (a(x, t) - 1)\partial_x^2 u + \partial_x a(x, t)\partial_x u - b(x, t)\partial_x u - c(x, t)u = f_1. \quad (41)$$

Так как $u \in L_2(\Delta_\varepsilon)$, то по лемме 2, справедливой при выполнении условий (2), получаем $u \in H_4^{2,1}(\Delta_\varepsilon)$. Из (41) следует, что $f_1 \in H_2^{0,0}(\Delta_\varepsilon)$. На основании теоремы 7 с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теорем 8 и 9, мы получаем $u \in H_2^{2,1}(\Delta_\varepsilon)$. С учетом условий (2) имеем $f_1 \in H_0^{0,0}(\Delta_\varepsilon)$. Значит, можно применить теоремы 8 и 9. В результате получим теоремы 1 и 2 соответственно.

Доказательства следствий 1 и 2 легко получаются из теорем 1 и 2 соответственно, так как функция $w(x, t)$ в (3) является решением уравнения (41) с $f_1 \in L_2(G)$. При этом используется следующая

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (2), функция $u(x) \in \dot{H}_0^{1,0}(G) \cap H_\gamma^{0,0}(G)$ является решением уравнения (1) с $f \in H_{\gamma+4}^{0,0}(G)$. Тогда

$$|u(x, t)| \leq cr^{-(3+\gamma)/2} \left(\int_G (u^2 r^\gamma + f^2 r^{\gamma+4}) dx dt \right)^{1/2}. \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из внутренних оценок для параболических уравнений и оценок вблизи нехарактеристической части границы при любом $(x, t) \in G_{1,2}$ следует неравенство

$$|u(x, t)|^2 \leq c \int_{G_{3/4, 9/4}} (|u|^2 + |f|^2) dx dt, \quad (43)$$

где $G_{a,b} = \{(x, t) : a < r(x, t) < b\} \cap G$, а постоянная c не зависит от $u(x, t)$ и $f(x, t)$.

Рассмотрим уравнение (1) в области $G_{\varepsilon, 2\varepsilon}$. После замены переменных $x' = x/\varepsilon$, $t' = t/\varepsilon^2$ уравнение (1) примет вид

$$\partial_{t'} V = \partial_{x'} (a(x', t') \partial_{x'} V) + \varepsilon b(x', t') \partial_{x'} V + \varepsilon c(x', t') V + \varepsilon^2 f(x', t'),$$

где $V(x', t') = u(\varepsilon x', \varepsilon^2 t')$, а область $G_{\varepsilon, 2\varepsilon}$ перейдет в область $G_{1,2}$. Очевидно, что для $V(x', t')$ при $(x', t') \in G_{1,2}$ справедливо неравенство (43) с той же постоянной c , т.е.

$$|V(x', t')|^2 \leq c \int_{G_{3/4, 9/4}} (|V|^2 + \varepsilon^4 |f|^2) dx' dt'. \quad (44)$$

Умножим (44) на $\varepsilon^{\gamma+3}$, положим $\varepsilon = 2^{-j}$ и просуммируем получившееся неравенство по всем целым j , сделав обратную замену $(x', t') \mapsto (x, t)$. В результате получим оценку (42).

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 1 с учетом леммы 3.

8. Некоторые частные случаи. Если в случае области K_1 или области K_3 перейти к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, то уравнение $D_{-\mu-1}(\pm 1/\sqrt{2\alpha}) = 0$ примет вид $D_{-\mu-1}(0) = 0$ или (см. (29)) $\Gamma^{-1}(1 + \mu/2) = 0$, корни которого равны $\mu_k = -2, -4, -6, \dots$. При $\mu > 1$ собственные значения совпадают с корнями уравнения $D_\mu(1/\sqrt{2\beta}) = 0$.

Если в случае области K_1 или области K_4 перейти к пределу при $\beta \rightarrow \infty$, то уравнение $D_\mu(\pm 1/\sqrt{2\beta}) = 0$ примет вид $D_\mu(0) = 0$ или $\Gamma^{-1}(1/2 - \mu/2) = 0$. Значит, $\mu_k = 1, 3, 5, \dots$. При $\mu < -2$ собственные значения совпадают с корнями уравнения $D_{-\mu-1}(1/\sqrt{2\alpha}) = 0$.

Если в случае области K_2 или области K_4 перейти к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, то уравнение $D_{-\mu-1}(\pm 1/\sqrt{2\alpha}) = 0$ примет вид $D_{-\mu-1}(0) = 0$ или $\Gamma^{-1}(1 + \mu/2) = 0$. Значит, $\mu_k = -2, -4, -6, \dots$. При $\mu > 0$ собственные значения совпадают с корнями уравнения $D_\mu(-1/\sqrt{2\beta}) = 0$.

Если в случае области K_2 или области K_3 перейти к пределу при $\beta \rightarrow \infty$, то уравнение $D_\mu(\pm 1/\sqrt{2\beta}) = 0$ примет вид $D_\mu(0) = 0$ или $\Gamma^{-1}(1/2 - \mu/2) = 0$. Значит, $\mu_k = 1, 3, 5, \dots$. При $\mu < -1$ собственные значения совпадают с корнями уравнения $D_{-\mu-1}(-1/\sqrt{2\alpha}) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петровский И. Г. О решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности // Уч. записки МГУ. 1934. № 2. С. 55–59.
- [2] Kohn J. J., Nirenberg L. Degenerate elliptic-parabolic equations of second order // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. № 4. P. 797–872.
- [3] Кондратьев В. А. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Тр. ММО. 1967. Т. 15. С. 400–451.
- [4] Михайлов В. П. О задаче Дирихле для параболического уравнения // Матем. сб. 1963. Т. 61(103). № 1. С. 40–64.
- [5] Фейгин В. И. О гладкости решений краевых задач для параболических и вырождающихся эллиптических уравнений // Матем. сб. 1970. Т. 82(124). № 4(8). С. 551–573.
- [6] Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Итоги науки и техн. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1969.
- [7] Ивасишен С. Д. Оценки функции Грина однородной первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Укр. матем. ж. 1969. Т. 21. № 1. С. 15–27.
- [8] Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. МИАН. Т. 83. М.–Л.: Наука, 1965.
- [9] Козлов В. А., Мазья В. Г. Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с конической точкой // Изв. вузов. Матем. 1987. № 2. С. 38–46; 1987. № 3. С. 37–44.
- [10] Доан Ван Нгок. Асимптотика решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка в окрестности угловой точки границы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 1. С. 34–36.
- [11] Арефьев В. Н., Багиров Л. А. Асимптотическое поведение решений задачи Дирихле для параболического уравнения в областях с особенностями // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 1. С. 12–23.
- [12] Арефьев В. Н., Багиров Л. А. Асимптотическое поведение решений уравнения диффузии в областях с особенностями. Препринт № 563. М.: ИПМ РАН, 1996.
- [13] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [14] Багиров Л. А. Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1979. Т. 110(152). № 4(12). С. 475–492.
- [15] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
- [16] Блехер П. М. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1969. № 5. С. 30–36.
- [17] Milne A. // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1914. V. 32. P. 2–14; 1915. V. 33. P. 48–64.
- [18] Ладыженская Л. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.