Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Арешкина, Ряды Фурье аддитивных векторных мер и их почленное дифференцирование, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 180–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:12:59

УДК 517.518

РЯДЫ ФУРЬЕ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОРНЫХ МЕР И ИХ ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

А. Г. Арешкина

На измеримом пространстве (T, Σ, μ) фиксируется аддитивная мера $\nu: \Sigma \rightarrow Z$ (Z – B -пространство) со свойством: $\forall e \in \Sigma \int_e x d\nu = 0 \implies x \stackrel{\mu}{\sim} 0$, задающая на $L^2(T, \Sigma, \mu)$ неопределенный интеграл по мере ν . Доказано, что если $\{\tau_n(t)\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в L^2 и $\theta_n(e) = \int_e \tau_n(t) d\nu$, то всякая аддитивная мера $\varphi: \Sigma \rightarrow Z$, производная Радона–Никодима которой $d\varphi/d\nu \in L^2$, однозначно разлагается в равномерно относительно $e \in \Sigma$ сходящийся к $\varphi(e)$ ряд $\varphi(e) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n(e)$ с условием $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 < \infty$, допускающий почленное дифференцирование. В случае $L^2[0, 2\pi]$, $Z = \mathbb{R}$ ряд Фурье 2π -периодической абсолютно непрерывной функции $F(t)$, для которой $F'(t) \in L^2[0, 2\pi]$, суперравномерно сходится к $F(t)$.

Библиография: 4 названия.

1. Пусть $L^2(T, \Sigma, \mu)$ – гильбертово пространство и $\{\tau_n(t)\}_{n=1}^\infty$ – его ортонормированный базис; Z – некоторое B -пространство; $\nu: \Sigma \rightarrow Z$ – аддитивная ограниченная мера. Из результатов работы [1] следует, что мера ν задает на L^2 неопределенный интеграл

$$\left\{ \int_e x(t) d\nu \mid e \in \Sigma \right\}_{x \in L^2}. \quad (1)$$

В работе показано, что всякая аддитивная мера $\varphi: \Sigma \rightarrow Z$, дифференцируемая относительно ν , однозначно разлагается в ряд Фурье по мерам $\theta_n(e) = \int_e \tau_n(t) d\nu$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(e) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n(e), \quad (2)$$

который сходится к $\varphi(e)$ в метрике пространства Z равномерно относительно $e \in \Sigma$. Почленное дифференцирование (2) дает ряд Фурье производной φ'_ν , сходящийся к ней по мере μ .

В случае, когда $L^2 = L^2[0, 2\pi]$, μ – мера Лебега, $Z = \mathbb{R}$, $F(t)$ – абсолютно непрерывная 2π -периодическая функция с суммируемым квадратом производной, ряд (2) превращается в ряд Фурье функции $F(t)$, который сходится к ней суперравномерно. Почленное дифференцирование этого ряда дает ряд Фурье производной $F'(t)$, сходящийся к ней по мере μ . Это усиливает известную теорему из теории рядов Фурье (см. [2, гл. VIII, § 1, п. 2]), утверждающую, что ряд Фурье функции $F(t)$ сходится к $F(t)$ равномерно.

Понятие суперравномерной сходимости было введено в работе [3]. В вопросах интегрирования скалярных функций по аддитивной векторной мере будем опираться на работу [1].

2. Пусть (T, Σ, μ) – пространство с σ -алгеброй измеримых множеств Σ и с σ -аддитивной полной мерой $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$. Пусть, далее, $\{\tau_n(t)\}_{n=1}^\infty$ – некоторый ортонормированный базис вещественного гильбертова пространства $L^2(T, \Sigma, \mu)$, Z – некоторое B -пространство. Обозначим через H множество всех Σ -простых функций из L^2 . Каждое $h \in H$ представимо в виде $h = \sum_{\Pi} \lambda_i \chi_{e_i}$, где $\Pi = \{e_i\}_{i=1}^k$ – некоторое измеримое подразделение множества T . Аддитивная мера $\nu: \Sigma \rightarrow Z$ называется *ограниченной на H* , если

$$\sup_H \frac{\|\sum_{\Pi} \lambda_i \nu(e_i)\|}{\|h\|} = \|\nu\| < \infty, \quad \|h\| > 0$$

(см. [1, п. 3, определение 2]). Из результатов работы [1] следует, что всякая аддитивная мера $\nu: \Sigma \rightarrow Z$, ограниченная на H и абсолютно непрерывная относительно μ (т.е. $\forall e \in \Sigma \quad \mu(e) = 0 \implies \nu(e) = 0$, обозначение $\nu \ll \mu$) задает на L^2 неопределенный интеграл (1). При этом

$$\left\| \int_T x(t) d\nu \right\| \leq \|\nu\| \cdot \|x\|. \quad (3)$$

При фиксированном $x \in L^2$ (1) задает неопределенный интеграл от функции $x(t)$ по мере ν . Будем говорить, что *аддитивная мера $\varphi: \Sigma \rightarrow Z$ дифференцируема по ν* , если существует функция $x(t) \in L^2$ такая, что

$$\forall e \in \Sigma \quad \varphi(e) = \int_e x(t) d\nu. \quad (4)$$

Функция $x(t)$ называется *производной Радона-Никодима* от φ по ν и обозначается через $d\varphi/d\nu$ или $\varphi'_\nu(t)$.

3. Зафиксируем какую-нибудь аддитивную ограниченную меру $\nu: \Sigma \rightarrow Z$, $\nu \ll \mu$, и потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\forall e \in \Sigma \quad \int_e x(t) d\nu = 0 \implies x \overset{\mu}{\sim} 0.$$

Обозначим через Φ_ν множество всех аддитивных мер $\varphi: \Sigma \rightarrow Z$, дифференцируемых относительно ν . Легко поверить, что справедлива следующая

ЛЕММА. *Множество Φ_ν является векторным пространством, изоморфным пространству L^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства линейности интеграла по мере ν множество Φ_ν является векторным пространством. Обозначая неопределенный интеграл (4) через $\varphi = \int x d\nu$ и учитывая, что μ -эквивалентные функции задают один и тот же неопределенный интеграл, получаем однозначное отображение пространства L^2 на пространство Φ_ν . Это отображение является биекцией, так как из $x_1 \overset{\mu}{\sim} x_2$ следует, что

$$\varphi_1 = \int x_1 d\nu \neq \varphi_2 = \int x_2 d\nu.$$

В противном случае выполнялось бы равенство

$$\forall e \in \Sigma \quad \int_e (x_1 - x_2) d\nu = 0,$$

откуда в силу (4) следовало бы, что $x_1 \overset{\mu}{\sim} x_2$.

4. Положим

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n(e) = \int_e \tau_n(t) d\nu, \quad e \in \Sigma. \quad (5)$$

Тогда $\theta_n \in \Phi_\nu$. Условимся говорить, что мера $\varphi: \Sigma \rightarrow Z$ разлагается в ряд по мерам $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$, и писать

$$\varphi = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n, \quad (6)$$

если для каждого $e \in \Sigma$ ряды $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n(e)$ сходятся (по норме пространства Z) к $\varphi(e)$:

$$\forall e \in \Sigma \quad \varphi(e) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n(e). \quad (7)$$

Будем говорить, что ряд (6) равномерно сходится к φ , если ряды (7) сходятся равномерно относительно $e \in \Sigma$ к $\varphi(e)$.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая мера $\varphi \in \Phi_\nu$ разлагается по мерам $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ в равномерно сходящийся ряд (6) с условием $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 < \infty$. Такое разложение единственно. Почленное дифференцирование ряда (6) дает ряд Фурье производной $\varphi'_\nu(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \Phi_\nu$. Тогда

$$\forall e \in \Sigma \quad \varphi(e) = \int_e \varphi'_\nu(t) d\nu,$$

где $\varphi'_\nu(t) \in L^2$. Разложим $\varphi'_\nu(t)$ в ряд Фурье по базису $\{\tau_n(t)\}_{n=1}^\infty$

$$\varphi'_\nu(t) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tau_n(t). \quad (8)$$

Ряд (8) сходится к $\varphi'_\nu(t)$ по норме пространства L^2 . Следовательно, полагая

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \tau_k(t), \quad (9)$$

имеем

$$\|\varphi'_\nu(t) - s_n(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (10)$$

Интегрируя почленно (формально) ряд (8) по любому множеству $e \in \Sigma$, получим ряды (7). Проверим, что эти ряды сходятся равномерно относительно $e \in \Sigma$ к $\varphi(e)$. Действительно, полагая

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall e \in \Sigma \quad S_n(e) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \theta_k(e), \quad (11)$$

имеем (учли последовательно формулу (4), в которой $x(t) = \varphi'_\nu(t)$, формулы (11), (5), (9) и (3), а также очевидное в L^2 неравенство $\|x\chi_e\| \leq \|x\|$)

$$\begin{aligned} \|\varphi(e) - S_n(e)\| &= \left\| \int_e \varphi'_\nu(t) d\nu - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_e \tau_k(t) d\nu \right\| \\ &= \left\| \int_e (\varphi'_\nu(t) - s_n(t)) d\nu \right\| = \left\| \int_T (\varphi'_\nu(t) - s_n(t)) \chi_e d\nu \right\| \\ &\leq \|\nu\| \cdot \|(\varphi'_\nu(t) - s_n(t)) \chi_e\| \leq \|\nu\| \cdot \|\varphi'_\nu(t) - s_n(t)\|. \end{aligned}$$

Последнее выражение в этой формуле не зависит от ϵ и согласно (10) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, равномерная сходимость рядов (7) доказана.

Перейдем к доказательству того, что разложение (6) в равномерно сходящийся ряд с условием $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ единственно. Предположим противное: существует другое разложение меры φ

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \theta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty, \quad (12)$$

в равномерно сходящийся ряд. Согласно теореме Фишера–Рисса в пространстве L^2 существует функция $y(t)$, ряд Фурье которой имеет вид

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tau_n(t). \quad (13)$$

Пусть

$$\forall e \in \Sigma \quad \tilde{\varphi}(e) = \int_e y(t) \, d\nu.$$

Тогда, применяя к $\tilde{\varphi}$ уже доказанную часть теоремы, получим, что

$$\tilde{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \theta_n \quad (14)$$

равномерно сходится к $\tilde{\varphi}$. Сравнивая (14) с (12), видим, что $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$. Следовательно, $\varphi'_\nu \stackrel{\mu}{\sim} \tilde{\varphi}'_\nu \stackrel{\mu}{\sim} y(t)$. Итак, оказалось, что μ -эквивалентные функции $\varphi'_\nu(t)$ и $y(t)$ имеют разные ряды Фурье (8) и (13). Получили противоречие. Наконец, почленное дифференцирование ряда (6), очевидно, дает ряд Фурье производной $\varphi'_\nu(t)$ (разложение (8)). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку в каждом банаховом фундаментальном пространстве сходимость по норме влечет сходимость по мере (см. [4, гл. IV, § 3, теорема 1]), ряд Фурье производной $\varphi'_\nu(t)$ сходится к ней не только по норме, но и по мере.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Соответствующие коэффициенты Эйлера–Фурье меры φ по мерам $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ее производной по базису $\{\tau_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ совпадают.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Последовательность мер $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ однозначно определяет векторное пространство Φ_ν . Аддитивная мера $\varphi: \Sigma \rightarrow Z$ дифференцируема по ν тогда и только тогда, когда она может быть разложена в равномерно сходящийся ряд с условием $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$.*

5. Применим теорему 1 к случаю, когда $L^2 = L^2[0, 2\pi]$, μ – мера Лебега, $Z = \mathbb{R}$, $F(t)$ – абсолютно непрерывная 2π -периодическая функция, производная которой суммируема с квадратом. Докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Ряд Фурье абсолютно непрерывной 2π -периодической функции $F(t)$, производная которой суммируема с квадратом, сходится на $[0, 2\pi]$ к $F(t)$ суперравномерно, а ряд, полученный его почленным дифференцированием, является рядом Фурье производной $F'(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого измеримого по Лебегу множества $e \subseteq [0, 2\pi]$ положим

$$F(e) = \int_e F'(t) d\mu.$$

Функция множества $F(e)$, $e \in \Sigma$, является σ -аддитивной обобщенной мерой. Пусть $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в $L^2[0, 2\pi]$. Согласно теореме 1 ряд Фурье $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tau_n(t)$ производной $F'(t)$ сходится по мере μ к $F'(t)$:

$$F'(t) \stackrel{\mu}{=} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tau_n(t),$$

а этот же ряд, проинтегрированный почленно по множеству $e \in \Sigma$, сходится равномерно относительно e к $F(e)$:

$$F(e) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n(e), \quad e \in \Sigma.$$

В частности, при $e = [0, t]$ отсюда получаем

$$F([0, t]) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \theta_n([0, t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n([0, t]).$$

Поскольку

$$F([0, t]) = F(t) - F(0), \quad S_n([0, t]) = S_n(t) - S_n(0),$$

имеем для любого $t \in [0, 2\pi]$

$$F(t) = F(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(t) - S_n(0)).$$

Таким образом, последовательность абсолютно непрерывных на $[0, 2\pi]$ функций

$$F_n(t) = F(0) - S_n(0) + S_n(t)$$

сходится на этом сегменте к функции $F(t)$. Функции $F(t)$ и $F_n(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 работы [3], согласно которой $F_n(t)$ сходится к $F(t)$ на $[0, 2\pi]$ суперравномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя изоморфность Φ_ν и L^2 , мы можем перенести метрику пространства L^2 на Φ_ν . Тогда Φ_ν превратится в гильбертово пространство, изометрически изоморфное L^2 . В этом пространстве меры $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ образуют ортонормированный базис, а разложение (6) превращается в ряд Фурье меры φ . Однако, отсюда еще не следует справедливость теоремы 1, устанавливающей равномерную “поточечную” сходимость этого ряда.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арешкина А. Г. Интегралы от скалярных функций по векторной мере и линейные операторы // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Межвузовский сб. научн. тр. Л., 1988. С. 37–42.
- [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
- [3] Арешкин Г. Я., Ягшимурадов С. О сходимости абсолютно непрерывных функций и их производных // Изв. вузов. Матем. 1966. Т. 2. С. 3–8.
- [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.