Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Об одном свойстве L_p -пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 185–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:55:16

УДК 517.986.33

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ L_p -ПРОСТРАНСТВ НА ПОЛУКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Получена характеристика следов в широком классе весов на алгебрах фон Неймана. Доказано новое свойство “идеалов определений” таких следов. В полуконечном случае доказано одно равенство для точного нормального следа. Этот результат является новым и для алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Получены приложения основного результата к структурной теории алгебр фон Неймана и к теории двойственности Кёте для идеальных пространств измеримых по Сигалу операторов.

Библиография: 10 названий.

1. Характеризация следов на алгебрах фон Неймана. Пусть алгебра фон Неймана M действует в гильбертовом пространстве H . Через $M^{\natural}$, M^u , M^+ , M^p обозначим ее эрмитову, унитарную, положительную части и логику ортопроекторов соответственно; e – единица M , $\|\cdot\|$ – C^* -норма на M .

Весом на M называется отображение $\varphi: M^+ \rightarrow [0, +\infty]$ такое, что

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \quad x, y \in M^+, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \cdot \infty \equiv 0.$$

Вес φ на M называется

- *точным*, если $\varphi(x) = 0 \implies x = 0, x \in M^+$;
- *нормальным*, если $\varphi(x) = \sup \varphi(x_i), x_i \nearrow x, x_i, x \in M^+$;
- *полуконечным*, если линейная оболочка $\mathfrak{M}_\varphi^+$ конуса $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{x \in M^+ : \varphi(x) < +\infty\}$ плотна в M в ультраслабой топологии;
- *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*), x \in M$.

Вес φ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$. Такое продолжение дает возможность отождествлять конечные веса с положительными функционалами на M .

ЛЕММА 1. *Вес φ на алгебре фон Неймана M является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(qxq) = \varphi(x^{1/2}qx^{1/2})$ для любых $x \in M^+$ и $q \in M^p$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00025.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* очевидна. Проверим *достаточность*. С использованием результатов Упмаера [1] в теореме 1.4.2 [2] фактически доказано, что вес φ на M является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(sxs) = \varphi(x)$ для любых $x \in M^+$ и $s \in M^y \cap M^\vartheta$. Формула $s = 2q - e$ задает взаимно однозначное соответствие между симметриями $s \in M^y \cap M^\vartheta$ и ортопроекторами $q \in M^n$. Пусть $r \equiv e - q$. Тогда $e - s = 2r$, $e + s = 2q$. Для $y \in M^+$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi(y + sys) &= \frac{1}{2}\varphi((e - s)y(e - s) + (e + s)y(e + s)) \\ &= 2\varphi(ryr) + 2\varphi(qyq) = 2\varphi(y^{1/2}ry^{1/2}) + 2\varphi(y^{1/2}qy^{1/2}) = 2\varphi(y).\end{aligned}$$

Если $\varphi(y) < +\infty$ или $\varphi(y) = \varphi(sys) = +\infty$, лемма установлена. Допустим, что $\varphi(sys) < \varphi(y) = +\infty$. Повторяя приведенные выше рассуждения для пары $x = sys$ и $sxs(= y)$, имеем

$$+\infty = \varphi(y + sys) = \varphi(x + sxs) = 2\varphi(x) < +\infty.$$

Получили противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть вес φ на алгебре фон Неймана M удовлетворяет условию

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x, \quad x_n \nearrow x \implies \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n), \quad x, x_n \in M^+. \quad (1)$$

Тогда φ – след $\iff \varphi(ghg) = \varphi(hgh)$ для всех $g, h \in M^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим лишь *достаточность*. Дословно повторяя доказательство леммы 1 с $y = g \in M^n$, получаем равенство $\varphi(sgs) = \varphi(g)$ для всех $g \in M^n$ и $s = 2h - e \in M^y \cap M^\vartheta$. Аддитивность и положительная однородность веса φ дают равенство $\varphi(sys) = \varphi(y)$ для любого оператора вида

$$y = \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i, \quad \lambda_i > 0, \quad g_i \in M^n, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

и симметрии $s \in M^y \cap M^\vartheta$. Для произвольного оператора $x \in M^+$ спектральная теорема позволяет определить последовательность (x_n) операторов вида (2), удовлетворяющую предпосылке условия (1). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть φ – положительный функционал на алгебре фон Неймана M . Тогда φ – след $\iff \varphi(gh) = \varphi(hg)$ для всех $g, h \in M^n$.

Действительно, в силу эрмитовости φ имеем (черта сверху означает комплексное сопряжение)

$$\varphi(ghg) = \varphi(gh) = \overline{\varphi(hg)} = \overline{\varphi(hgh)} = \varphi(hgh)$$

для всех $g, h \in M^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть след φ на алгебре фон Неймана M удовлетворяет условию (1). Если $x, y \in M^+$ и $xy \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $x^{1/2}yx^{1/2}, y^{1/2}xy^{1/2} \in \mathfrak{M}_\varphi^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем $\|y\| \leq 1$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем непрерывную функцию на $[0, +\infty)$ следующим образом: $f_n(t) = t(t + n^{-1})^{-1/2}$, если $0 \leq t \leq 1$, f_n линейна на отрезке $[1, 2]$ с $f_n(2) = 1$, $f_n(t) = 1$ при $t > 2$. Очевидно, $0 \leq f_n \leq 1$. Рассмотрим $y_n \equiv (y + n^{-1}e)^{-1/2} \in M^+$. Поскольку $\mathfrak{M}_\varphi$ – двусторонний идеал в M [3, с. 318], операторы $z_n \equiv f_n(y) \cdot xy \cdot y_n \in \mathfrak{M}_\varphi$. Фактически $z_n = f_n(y) \cdot x \cdot f_n(y) \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность функций (f_n^2) равномерно на $[0, +\infty)$ сходится к

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Тогда в силу [4, теорема VII.2 (b)] имеем $\|f_n(y)^2 - y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, $f_n(y)^2 \nearrow y$. Условие (1) дает

$$\begin{aligned} \varphi(x^{1/2}y x^{1/2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x^{1/2}f_n(y)^2 x^{1/2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n(y) \cdot x \cdot f_n(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(xy \cdot y_n \cdot f_n(y)) \leq \sup_n \|y_n \cdot f_n(y)\| \cdot \varphi(|xy|) \leq \varphi(|xy|) < +\infty. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством [3, с. 319]

$$\varphi(ab) = \varphi(ba), \quad a \in M, \quad b \in \mathfrak{M}_\varphi,$$

с $a = f_n(y)$, $b = xy \cdot y_n$ и учли неравенство $f_n(t) \cdot (t + n^{-1})^{-1/2} = t(t + n^{-1})^{-1} < 1$ при $0 \leq t \leq 1$. Осталось заметить, что $z \in \mathfrak{M}_\varphi \iff |z| \equiv (z^*z)^{1/2} \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полунепрерывные снизу по норме веса удовлетворяют условию (1); таковы, в частности, нормальные или конечные веса. Ж. Диксмье [5] построил на алгебре $M = B(H)$ всех ограниченных операторов в сепарабельном бесконечномерном пространстве H след, не являющийся нормальным. Можно показать, что этот след не удовлетворяет условию (1).

2. Предварительные сведения из теории некоммутативного интегрирования. Всюду далее считаем алгебру фон Неймана M с точным нормальным полуконечным следом τ фиксированной. Оператор в H (необязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным* к M , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта M . Замкнутый плотно определенный оператор x , присоединенный к M , называется τ -измеримым, если выполнено условие

$$\tau(e - e_{(-\infty, \lambda)}(|x|)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty$$

(здесь $e_B(y)$ – спектральный проектор самосопряженного оператора y , соответствующий борелевскому подмножеству $B \subset \mathbb{R}$). Множество $K \equiv K(M, \tau)$ τ -измеримых операторов замкнуто относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. Через $\mu_t(x)$ обозначим невозрастающую перестановку оператора $x \in K$, т.е. функцию $\mu_t: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau(e_{(\lambda, +\infty)}(|x|)) \leq t\}.$$

Далее, *-подалгебра τ -компактных операторов

$$K_0 \equiv \left\{ x \in K : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_t(x) = 0 \right\}$$

есть двусторонний идеал в K [6], [7]. Пусть K^+ – конус неотрицательных операторов из K ; L_p , $1 \leq p < +\infty$, – банахово пространство операторов из K , p -степень модуля которых τ -интегрируема. Пусть $L^+ = L \cap K^+$ для $L \subset K$. Продолжение τ до единственного ограниченного функционала с $\mathfrak{M}_\tau^+$ на $\mathfrak{M}_\tau (= M \cap L_1)$, а затем и на все L_1 также обозначим через τ .

ЛЕММА 2 [8]. *Справедливы разложения $K = K_0 + M$, $K^+ = K_0^+ + M^+$ (т.е. всякий оператор $y \in K$ имеет вид $y_1 + y_2$ с $y_1 \in K_0$, $y_2 \in M$).*

ЛЕММА 3 [9, теорема 17]. *Если операторы $a, b \in K$ и $ab, ba \in L_1$, то $\tau(ab) = \tau(ba)$.*

ЛЕММА 4. *Для любого $z \in K$ имеет место соотношение $\mu_t(z^*z) = \mu_t(zz^*)$. В частности, $z^*z \in L_1 \iff zz^* \in L_1$, при этом $\tau(z^*z) = \tau(zz^*)$.*

3. Основные результаты. Следующая теорема является новой для алгебры $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , снабженной каноническим следом tr . Ясно, что

$$K(B(H), \text{tr}) = B(H) \quad \text{и} \quad \mu_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x) \chi_{[n-1, n)}(t),$$

где $(s_n(x))$ есть последовательность s -чисел оператора x . Пространство L_1 ядерных операторов совпадает с идеалом $\mathfrak{M}_{\text{tr}}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть операторы $x, y \in K^+$ таковы, что $xy \in L_1$. Тогда*

$$x^{1/2}yx^{1/2}, y^{1/2}xy^{1/2} \in L_1^+ \quad \text{и} \quad \tau(xy) = \tau(x^{1/2}yx^{1/2}) = \tau(y^{1/2}xy^{1/2}). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть операторы $x, y \in M^+$. Поскольку $\mathfrak{M}_\tau^+ = M \cap L_1^+$, по теореме 2 имеем $y^{1/2}xy^{1/2} \in L_1^+$. Применяя лемму 3 с $a = y^{1/2}$, $b = xy^{1/2}$, получаем $\tau(xy) = \tau(y^{1/2}xy^{1/2})$. Осталось применить лемму 4 с $z = y^{1/2}x^{1/2}$.

2. Частный случай утверждения для $y \in K_0^+$ установлен в теореме 3.4 [7].

3. Рассмотрим случай, когда $y \in K^+$, $x \in M^+$. Пусть $y = y_1 + y_2$ – представление по лемме 2. Для числа $\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_t(y)$ и множеств $A = [0, \alpha]$, $B = (\alpha, +\infty)$ справедливо представление $y_2 = y \cdot e_A(y) + \alpha \cdot e_B(y)$ [8]. Тогда

$$x \cdot y_2 = xy \cdot e_A(y) + \alpha x \cdot e_B(y), \quad (4)$$

и первое слагаемое в правой части – элемент L_1 . В силу “коммутативного” неравенства $\alpha^2 e_B(y) \leq y^2$ имеем $|\alpha e_B(y)x|^2 = x \cdot \alpha^2 e_B(y) \cdot x \leq xy \cdot yx$. Операторная монотонность функции $t \mapsto \sqrt{t}$ ($t \geq 0$) дает неравенство $|\alpha e_B(y)x| \leq |yx|$, значит и второе слагаемое в (4) принадлежит L_1 . Следовательно, оператор $xy_2 \in L_1$. Теперь $xy_1 = xy - xy_2 \in L_1$. Применяя пункт 2 этого доказательства к x, y_1 и пункт 1 к x, y_2 , имеем $x^{1/2}y_1x^{1/2}, x^{1/2}y_2x^{1/2} \in L_1^+$, и их сумма $x^{1/2}yx^{1/2} \in L_1^+$. Осталось повторить завершающие рассуждения пункта 1 доказательства.

4. Рассмотрим общий случай $x, y \in K^+$. Пусть $x = x_1 + x_2$ – представление из леммы 2. Рассуждая как в пункте 3, имеем $x_1y, x_2y \in L_1$. Применяя пункты 2 и 3 к парам операторов x_1, y и x_2, y соответственно, получаем $y^{1/2}x_1y^{1/2}, y^{1/2}x_2y^{1/2} \in L_1^+$. Тогда и сумма этих операторов $y^{1/2}xy^{1/2} \in L_1^+$. Осталось применить лемму 4 с $z = y^{1/2}x^{1/2}$. Теорема доказана.

Далее $z^n \equiv z \cdots z$ – произведение n экземпляров $z \in K$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $p \in \mathbb{N}$ и операторы $x, y \in K^+$ таковы, что $(xy)^p \in L_1$. Тогда

$$x^{1/2}yx^{1/2}, y^{1/2}xy^{1/2} \in L_p^+ \quad \text{и} \quad \tau((xy)^p) = \tau((x^{1/2}yx^{1/2})^p) = \tau((y^{1/2}xy^{1/2})^p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 3 к операторам $x, y_1 \equiv y \cdot (xy)^{p-1} \in K^+$ и заметим, что $x^{1/2}y_1x^{1/2} = (x^{1/2}yx^{1/2})^p$. Поскольку $((xy)^p)^* = (yx)^p \in L_1$, аналогично получаем $\tau((y^{1/2}xy^{1/2})^p) = \tau((yx)^p)$. Лемма 3 дает

$$\tau((xy)^p) = \tau(xy_1) = \tau(y_1x) = \tau((yx)^p).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. $z \in L_p \implies z^p \in L_1$ ($z \in K, p \in \mathbb{N}$), поскольку

$$\|z^p\|_1 \equiv \int_0^{+\infty} \mu_t(z^p) dt \leq \int_0^{+\infty} \mu_t(z)^p dt = \|z\|_p^p < +\infty$$

в силу [7, предложение 3.10]. Обратная импликация неверна: если $\dim H = +\infty$, то в $B(H)$ существует некомпактный нильпотент второго порядка, т.е. оператор $z \neq 0$ такой, что $z^2 = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Оператор вида xy , $x, y \in K^+$, не может быть нильпотентом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, операторы $x, y \in K^+$ и $p \in \mathbb{N}$ таковы, что $xy \neq 0 = (xy)^p$. Согласно следствию 2 имеем

$$0 = \tau((xy)^p) = \tau((y^{1/2}xy^{1/2})^p)$$

и в силу точности следа $\tau(y^{1/2}xy^{1/2})^p = 0$. Тогда $y^{1/2}xy^{1/2} = |x^{1/2}y^{1/2}|^2 = 0$. Тем самым, $x^{1/2}y^{1/2} = 0 = x^{1/2} \cdot x^{1/2}y^{1/2} \cdot y^{1/2} = xy$. Получили противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\tau(e) < +\infty$ и операторы $x, y \in K^+$ таковы, что $xy \in M$. Тогда $x^{1/2}yx^{1/2}, y^{1/2}xy^{1/2} \in M^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, считаем $\tau(e) = 1 = \|xy\|$. Тогда

$$xy \in L_p \quad \text{и} \quad \|xy\|_p = \left(\int_0^1 \mu_t(xy)^p dt \right)^{1/p} \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|x^{1/2}yx^{1/2}\|_p = \tau((x^{1/2}yx^{1/2})^p)^{1/p} = \tau((xy)^p)^{1/p} \leq 1.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x^{1/2}yx^{1/2}\|_p = \|x^{1/2}yx^{1/2}\| \leq 1.$$

Аналогично, имеем $\|y^{1/2}xy^{1/2}\| \leq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $x, y \in K^+$. Тогда

$$xy \in K_0 \iff x^{1/2}yx^{1/2} \in K_0^+ \iff y^{1/2}xy^{1/2} \in K_0^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойств невозрастающих перестановок τ -измеримых операторов [6] имеем

$$\begin{aligned} xy \in K_0 &\implies y^{1/2} \cdot xy \cdot xy^{1/2} = (y^{1/2}xy^{1/2})^2 \in K_0^+ \iff y^{1/2}xy^{1/2} \in K_0^+ \\ &\iff x^{1/2}yx^{1/2} \in K_0^+ \iff x^{1/2}y^{1/2} \in K_0 \implies x^{1/2} \cdot x^{1/2}y^{1/2} \cdot y^{1/2} = xy \in K_0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\dim H = +\infty$, то в $B(H)$ для каждого $1 \leq p < +\infty$ найдутся ортопроекторы x и y такие, что оператор $x^{1/2}yx^{1/2} (= xyx) \in L_p^+$, а $xy \notin L_p$.

А. Н. Шерстнёв указал на применение теоремы 2 в задачах продолжения неограниченных мер на ортопроекторах алгебры фон Неймана до веса; подробно эта проблематика освещена в [10]. Напомним, что нормированное подпространство $E \subset K$ называется *нормированным идеальным пространством* на (M, τ) , если

- 1) $\|x\|_E = \|x^*\|_E$;
- 2) $x \in K, y \in E$ и $|x| \leq |y| \implies x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Определим дуальное по Кёте множество $E^\times \equiv \{y \in K : xy \in L_1 \text{ для любого } x \in E\}$. Пусть $\|x\|^\times \equiv \sup\{\tau(|xy|) : y \in E, \|y\|_E \leq 1\}$. С помощью теоремы 3 по схеме, предложенной в [7], доказывается

ТЕОРЕМА 4. а) Если $x \in K$, то $x \in E^\times \iff \|x\|^\times < +\infty$. При этом $\|x\|^\times = \sup\{\tau(xy) : y \in E, \|y\|_E \leq 1\}$.

б) Если $x \in E^+$ и $y \in E^{\times+}$, то справедливо утверждение (3).

в) Если $y \in E^\times$, то линейный функционал $x \mapsto \tau(xy)$, $x \in E$, непрерывен.

Поскольку класс нормированных идеальных пространств на (M, τ) шире класса перестановочно инвариантных пространств, теорема 4 обобщает построенную в [7] теорию двойственности Кёте.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. Н. Шерстнёву за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Upmeyer H. Automorphism groups of Jordan C^* -algebras // Math. Z. 1981. V. 176. P. 21–34.
- [2] Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: ФАН, 1986.
- [3] Takesaki M. Theory of operator algebras. I. New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1979.
- [4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [5] Dixmier J. Existence de traces non normales // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1966. V. 262. P. 1107–1108.
- [6] Yeadon F. J. Non-commutative L_p -spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1975. V. 77. P. 91–102.
- [7] Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., de Pagter B. Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 339. P. 717–750.
- [8] Stroth A., West Graeme P. τ -compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1993. V. 93. P. 73–86.
- [9] Brown L. G., Kosaki H. Jensen's inequality in semi-finite von Neumann algebras // J. Operator Theory. 1990. V. 23. P. 3–19.
- [10] Sherstnev A. N. On certain problems in the theory of unbounded measures on projections // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1994. V. 42. P. 357–366.