Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Гороховик, Е. А. Семенкова, Классификация полупространств по типам в бесконечномерных векторных пространствах, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 191–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:59:28

УДК 514.17+512.642

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВ ПО ТИПАМ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Гороховик, Е. А. Семенкова

В работе показано, что каждое полупространство $C \subset X$ естественным образом порождает на X отношение полного предпорядка, относительно которого пара множеств $(X \setminus C, C)$ является сечением X . Отождествлением типа полупространства с типом порождаемого им сечения проведена классификация полупространств по типам, распространяющая на бесконечномерный случай классификацию полупространств в конечномерных векторных пространствах, данную Мартинец-Легазом и Зингером.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть X – вещественное векторное пространство.

Выпуклое множество C из X называется *полупространством* в X , если его дополнение $X \setminus C$ также является выпуклым множеством.

Очевидно, что если C – полупространство, то $X \setminus C$ также является полупространством.

По-видимому, впервые полупространства рассматривались еще в работах Ш. Какутани [1] и Дж. Тьюки [2] в связи с общими теоремами об отделимости выпуклых множеств. Позднее полупространства изучались в работах целого ряда авторов, в частности, в [3]–[9]. Недавно детальное исследование полупространств в конечномерных векторных пространствах было проведено в статье Х.-Э. Мартинец-Легаза и И. Зингера [6], одним из главных результатов которой является классификация полупространств в конечномерных векторных пространствах. Основана данная классификация на следующем аналитическом представлении конечномерных полупространств, доказательство можно найти в [6, теорема 2.1, утверждение (17)].

ТЕОРЕМА 1. *Собственное подмножество C конечномерного векторного пространства X является полупространством в X тогда и только тогда, когда для некоторого натурального числа m , $1 \leq m \leq \dim X$, существуют линейный оператор $A: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ такие, что $\text{rank } A = m$ и либо*

$$C = \{x \in X \mid Ax \leq_L \alpha\}, \quad (1)$$

либо

$$C = \{x \in X \mid Ax <_L \alpha\}. \quad (2)$$

Здесь “ $\leq_L$ ” и “ $<_L$ ” обозначают соответственно отношения лексикографического и строгого лексикографического порядка на $\mathbb{R}^m$.

Напомним (см., например, [7]), что векторы $u = (u_1, \dots, u_m)$ и $v = (v_1, \dots, v_m)$ из $\mathbb{R}^m$ удовлетворяют соотношению $u <_L v$ тогда и только тогда, когда $u \neq v$ и $u_k < v_k$, где

$k = \min\{i \mid u_i \neq v_i, 1 \leq i \leq m\}$. Соотношение $u \leq_L v$ эквивалентно тому, что либо $u = v$, либо $u <_L v$.

Линейный оператор $A: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и вектор $\alpha \in \mathbb{R}^m$ в представлении собственного полупространства C , данном в теореме 1, определяются неоднозначно. В то же время натуральное число m , $1 \leq m \leq \dim X$, равное рангу линейного оператора A , а также тип представления (либо (1), либо (2)), который может быть задан в виде параметра τ , принимающего значения из двухэлементного множества $\{\leq_L, <_L\}$, являются инвариантами для каждого собственного полупространства C . Эти инварианты и положены Мартинец-Легазом и Зингером [6] в основу классификации конечномерных полупространств. Согласно их классификации два собственных полупространства C_1 и C_2 принадлежат одному и тому же классу, если $m(C_1) = m(C_2)$ и $\tau(C_1) = \tau(C_2)$, т.е. если они имеют одинаковый ранг и одинаковый тип. Как следует из теоремы 1, в соответствии с этой классификацией в конечномерном векторном пространстве X , размерность которого равна n , существуют полупространства двух типов (типа " $\leq_L$ " и типа " $<_L$ "), внутри же каждого типа полупространства разбиваются на n различных классов в зависимости от их ранга. Таким образом, если $\dim X = n$, то в X существует ровно $2n$ различных классов полупространств.

Настоящая работа посвящена классификации полупространств в бесконечномерных векторных пространствах. Мы ограничимся лишь классификацией полупространств по "типу", не затрагивая их классификацию по "рангу". Наша классификация не связана с каким-либо аналитическим представлением полупространств, а основана на следующем внутреннем свойстве, присущем полупространствам. Мы устанавливаем (теорема 4), что любое собственное полупространство $C \subset X$ однозначно порождает на X отношение полного предпорядка " $\leq_c$ ", относительно которого пара множеств $(X \setminus C, C)$ является сечением пространства X . Тип данного сечения и отождествляется нами с типом полупространства C . Известно (см., например, [10]), что в любом упорядоченном множестве возможны только четыре типа сечений: скачок, два дедекиндовых (нижнее и верхнее) и щель. Мы показываем, что

- а) среди сечений пространства X , порожденных всевозможными его полупространствами, не существует скачков (теорема 5);
- б) все сечения конечномерного векторного пространства X , порожденные его полупространствами, являются дедекиндовыми (теорема 6);
- в) в любом бесконечномерном векторном пространстве X , кроме дедекиндовых полупространств, существуют полупространства, которые порождают сечения X , являющиеся щелями (теорема 7).

Таким образом, согласно нашей классификации в конечномерных векторных пространствах существуют полупространства двух различных типов, а в бесконечномерных векторных пространствах – трех типов. Ниже будет показано, что в конечномерных векторных пространствах наша классификация полупространств по их типам совпадает с соответствующей классификацией, данной в работе [6]. Перейдем к подробному изложению отмеченных выше результатов.

2. Некоторые свойства полупространств. Этот пункт имеет вспомогательный характер. Установленные здесь свойства полупространств будут использованы нами при их классификации. Начнем с рассмотрения конических полупространств. Следуя [11], будем называть конус K *заостренным*, если $0 \in K$, и *незаостренным*, если $0 \notin K$.

ТЕОРЕМА 2. *Заостренный выпуклый конус $K \subset X$ является полупространством тогда и только тогда, когда*

$$K \cup (-K) = X. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $K \subset X$ – заостренный выпуклый конус, являющийся полупространством. Тогда $M := X \setminus K$ – асимметричный ($M \cap (-M) = \emptyset$) выпуклый конус. Действительно, дополнение любого конуса есть конус. Поскольку K – полупространство, то M – выпуклый конус. Покажем, что M является асимметричным. Предположим, что существует вектор $h \in M \cap (-M)$. В силу выпуклости M получаем, что $0 \in M$. Это невозможно, поскольку $0 \in K$. Значит, $M \cap (-M) = \emptyset$. Заметим также, что равенство (3), которое необходимо доказать, эквивалентно равенству

$$K \cup (-K^>) = X, \quad (4)$$

где $K^> = K \setminus (-K)$ – асимметричная часть конуса K . Так как $K \cap (-K^>) = \emptyset$, равенство (4) в свою очередь эквивалентно равенству $X \setminus K = -K^>$. Включение $-K^> \subset X \setminus K$ следует из определения асимметричной части. Рассмотрим вектор $h \in X \setminus K$. Поскольку $X \setminus K$ – асимметричный выпуклый конус, то $-h \notin X \setminus K$ и, следовательно, $-h \in K$, причем $h \notin K$, т.е. $h \in -K^>$. Таким образом, $X \setminus K \subset -K^>$, что и требовалось показать.

Достаточность. Из равенства (3), а точнее из эквивалентного ему (4) следует, что $X \setminus K = -K^>$. Так как асимметричная часть любого выпуклого конуса есть выпуклый конус, то $X \setminus K$ является выпуклым и, следовательно, K есть полупространство.

СЛЕДСТВИЕ. *Асимметричный выпуклый конус $K \subset X$ является полупространством тогда и только тогда, когда множество $X \setminus (K \cup (-K))$ является векторным подпространством.*

Заметим, что выпуклый конус K асимметричен тогда и только тогда, когда он является незаостренным ($0 \notin K$).

Пусть C – произвольное множество из X . *Рецессивным конусом* множества C называется (см. [11], [12]) множество O^+C , состоящее из векторов $h \in X$ таких, что $x + \gamma h \in C$ для всех $x \in C$ и всех действительных чисел $\gamma \geq 0$.

Нетрудно убедиться, что для любого множества $C \subset X$ его рецессивный конус O^+C является заостренным выпуклым конусом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого собственного подмножества $C \subset X$ ($C \neq X$, $C \neq \emptyset$) справедливо равенство*

$$O^+C = -O^+(X \setminus C). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in O^+C$. Предположим, что $-h \notin O^+(X \setminus C)$. Тогда существуют $x \in X \setminus C$ и $\gamma > 0$ такие, что $x - \gamma h \in C$. Так как $h \in O^+C$, то $x = (x - \gamma h) + \gamma h \in C$. Пришли к противоречию. Следовательно, $O^+C \subset -O^+(X \setminus C)$. Обратное включение доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 3. *Собственное подмножество $C \subset X$ является полупространством тогда и только тогда, когда его рецессивный конус O^+C также является полупространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Поскольку рецессивный конус O^+C является заостренным выпуклым конусом, то в силу теоремы 2 достаточно показать, что $O^+C \cup (-O^+C) = X$. Предположим противное. Пусть существует $h \in X \setminus (O^+C \cup (-O^+C))$. Тогда для любой точки $x \in C$ можно указать действительные числа $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ такие, что $x + \gamma_1 h \in X \setminus C$ и $x - \gamma_2 h \in X \setminus C$. Поскольку множество $X \setminus C$ выпукло, то весь отрезок, соединяющий эти точки, целиком принадлежит $X \setminus C$. Это невозможно, так как точка x лежит на этом отрезке.

Достаточность. Предположим, что O^+C является полупространством. Докажем, что множество C выпукло. Если множество C не является выпуклым, то существуют точки $x_1, x_2 \in C$ и точка $z \in X \setminus C$, лежащая на отрезке, соединяющем точки x_1, x_2 . Так как O^+C – полупространство, хотя бы один из векторов $h_1 := x_1 - z$ или $h_2 := x_2 - z$ принадлежит O^+C . Действительно, включение $h_1, h_2 \in -O^+C$ (O^+C – асимметричная часть конуса O^+C) невозможно, поскольку $h_1 = -\gamma h_2$, где $\gamma > 0$. Пусть для определенности $h_1 \in O^+C$. Тогда в силу теоремы 2 $-h_1 \in O^+(X \setminus C)$, значит $x_1 = z + (-h_1) \in X \setminus C$. Пришли к противоречию. Следовательно, C является выпуклым. Аналогично доказывается выпуклость $X \setminus C$.

3. Классификация полупространств по типам. Напомним некоторые понятия из теории упорядоченных множеств (см., например, [10]).

Множество X называется *упорядоченным*, если на нем задано отношение полного предпорядка, т.е. рефлексивное и транзитивное бинарное отношение “ $\leq$ ”, удовлетворяющее условию полноты: для любых $x, y \in X$ выполняется хотя бы одно из соотношений $x \leq y$ или $y \leq x$.

Сечением упорядоченного множества X называется его разбиение на два непересекающихся подмножества A и B такое, что для любых элементов $x \in A, y \in B$ выполняется $x < y$, где $x < y$ означает $x \leq y, y \not\leq x$. Множество A называется *нижним классом*, а множество B – *верхним классом* сечения. Сечения, у которых $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, называются *собственными*.

Возможны следующие типы собственных сечений.

1) *Скачок* – сечение, у которого в нижнем классе A есть наибольший элемент a , а в верхнем классе B есть наименьший элемент b (очевидно, что в этом случае не существует $x \in X$ такого, что $a < x < b$).

2) *Верхнее дедекиндово сечение* – сечение, у которого в нижнем классе A нет наибольшего элемента, а в верхнем классе B есть наименьший элемент.

3) *Нижнее дедекиндово сечение* – сечение, у которого в нижнем классе A есть наибольший элемент, а в верхнем классе B нет наименьшего элемента.

4) *Щель* – сечение, у которого в нижнем классе A нет наибольшего элемента, а в верхнем классе B нет наименьшего элемента.

Пусть C – полупространство в вещественном векторном пространстве X и O^+C – рецессивный конус C . Определим на X отношение полного предпорядка “ $\leq_c$ ”, полагая

$$x \leq_c y \iff y - x \in O^+C$$

(транзитивность и рефлексивность отношения “ $\leq_c$ ” следуют из выпуклости и заостренности конуса O^+C , а полнота – из того, что O^+C является полупространством). Таким

образом, отношение " $\leq_c$ " превращает вещественное векторное пространство X в упорядоченное множество.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого полупространства C в вещественном векторном пространстве X пара $(X \setminus C, C)$ является сечением пространства X , упорядоченного отношением полного предпорядка " $\leq_c$ ".*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для некоторых $x \in C$ и $y \in X \setminus C$ выполняется отношение $x \leq_c y$, то, поскольку оно эквивалентно включению $y - x \in O^+C$, имеем $y = x + (y - x) \in C$, что невозможно. Значит, $y <_c x$ для всех $x \in C, y \in X \setminus C$.

ТЕОРЕМА 5. *Среди сечений вещественного векторного пространства X , порожденных всевозможными его полупространствами, не существует скачков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть C – полупространство в X такое, что порожденное им сечение $(X \setminus C, C)$ есть скачок. Пусть a – наибольший (относительно " $\leq_c$ ") элемент в $X \setminus C$, а b – наименьший элемент в C . Из определения сечения следует, что $a <_c b$, т.е. $b - a \in O^+C$, причем $a - b \notin O^+C$. Рассмотрим произвольный вектор $c = a + \gamma(b - a)$, где γ – некоторое фиксированное число из $(0, 1)$. Так как $c - a = \gamma(b - a)$, причем $\gamma > 0$, то $c - a \in O^+C, a - c \notin O^+C$, т.е. $a <_c c$. Следовательно, $c \notin X \setminus C$, поскольку a – наибольший элемент в $X \setminus C$. С другой стороны, так как $b - c = (1 - \gamma)(b - a)$ и $\gamma \in (0, 1)$, то $b - c \in O^+C, c - b \notin O^+C$, т.е. $c <_c b$. Следовательно, $c \notin C$, ибо b есть наименьший элемент в C . Таким образом, $c \notin X \setminus C$ и $c \notin C$, что невозможно.

Приведем примеры полупространств, порождающих дедекиндовы сечения.

ПРИМЕР 1. Любое полупространство C в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ порождает на $\mathbb{R}$ отношение порядка " $\leq_c$ ", которое совпадает либо с естественным порядком, либо с противоположным ему порядком на $\mathbb{R}$. Как известно (см., например, [10]), любое сечение множества действительных чисел относительно естественного (значит, и противоположного ему) порядка является дедекиндовым. Заметим, что нижний и верхний классы любого сечения множества действительных чисел относительно естественного порядка являются полупространствами в $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = \mathbb{R}^2$. Нетрудно проверить, что множество

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > \alpha_1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \alpha_1, x_2 > \alpha_2\},$$

где α_1, α_2 – заданные действительные числа, является полупространством. Соответствующее ему отношение порядка " $\leq_c$ " есть отношение лексикографического порядка на $\mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \leq_c (y_1, y_2)$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 < y_1$, либо $x_1 = y_1, x_2 \leq y_2$. Нижний класс $X \setminus C$ сечения, порожденного C , обладает единственным наибольшим элементом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и, следовательно, сечение $(X \setminus C, C)$ является нижним дедекиндовым.

Полупространство, порождающее верхнее дедекиндово сечение пространства X , будем называть *заостренным дедекиндовым*, а полупространство, порождающее нижнее дедекиндово сечение, – *незаостренным дедекиндовым*.

Из равенства (5) следует, что если C является заостренным (незаостренным) дедекиндовым полупространством, то его дополнение $X \setminus C$ есть незаостренное (заостренное) дедекиндово полупространство.

ТЕОРЕМА 6. Любое собственное полупространство конечномерного векторного пространства является дедекиндовым (заостренным или незаостренным).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 любое собственное полупространство C конечномерного векторного пространства X может быть представлено либо в виде (1), либо в виде (2). Пользуясь линейностью оператора A и свойствами отношений " $\leq_L$ " и " $<_L$ ", можно показать, что (независимо от того, имеет ли полупространство C вид (1) или вид (2)) для рецессивного конуса O^+C справедливо представление $O^+C = \{x \in X \mid Ax \leq_L 0\}$. Так как линейный оператор A невырожден, аффинное подпространство $M := \{x \in X \mid ax = \alpha\}$ непусто и либо $M \subset C$, если C имеет вид (1), либо $M \subset X \setminus C$, если C имеет вид (2). Нетрудно убедиться, что в случае $M \subset C$ любая точка $x \in M$ является наименьшей в C относительно " $\leq_c$ " и, следовательно, C является заостренным дедекиндовым полупространством. Если же $M \subset X \setminus C$, то любая точка $x \in M$ является наибольшей в $X \setminus C$ относительно " $\leq_c$ " и в этом случае C является незаостренным дедекиндовым полупространством.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 6 следует, что заостренные дедекиндовы полупространства конечномерного векторного пространства, и только они, имеют в классификации Мартинец-Легаза и Зингера тип " $\leq_L$ ", а незаостренные дедекиндовы полупространства, и только они, имеют тип " $<_L$ ".

ТЕОРЕМА 7. В любом бесконечномерном векторном пространстве X существуют полупространства, которые порождают сечения X , являющиеся щелями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем в X произвольный базис Гамеля $H = \{e_j\}_{j \in J}$. Так как H бесконечно, выберем в нем счетное подмножество E и занумеруем его элементы натуральными числами, тем самым упорядочив E подобно натуральному ряду $\mathbb{N}$. Для каждого вектора $x \in X$ через $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ будем обозначать те его координаты в базисе H , которые соответствуют базисным векторам из E . Поскольку лишь конечное число координат вектора x в базисе H может быть отлично от 0, сумма $\sum_{i=n}^\infty x_i$ имеет смысл для каждого вектора $x \in X$ и каждого натурального числа n .

Определим в X последовательность подмножеств

$$C_n^+ := \left\{ x \in X \mid \sum_{i=n}^\infty x_i > 1, \sum_{i=s}^\infty x_i = 1, s < n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Непосредственно проверяется, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ подмножество C_n^+ является выпуклым. Кроме того, если $m < n$, то для любого $x \in C_m^+$ и любого $y \in C_n^+$ включение $\gamma x + (1 - \gamma)y \in C_m^+$ имеет место для всех $\gamma \in (0, 1]$. Действительно, для любого $y \in C_n^+$ выполняются равенства $\sum_{i=s}^\infty y_i = 1$ при всех $s = 1, \dots, m$. Для любого же $x \in C_m^+$ имеем $\sum_{i=s}^\infty x_i = 1$ при всех $s = 1, \dots, m - 1$ и $\sum_{i=m}^\infty x_i > 1$. Следовательно, для суммы векторов $\gamma x + (1 - \gamma)y$ при любом $\gamma \in (0, 1]$ имеем

$$\sum_{i=s}^\infty (\gamma x_i + (1 - \gamma)y_i) = 1, \quad s = 1, \dots, m - 1, \quad \sum_{i=m}^\infty (\gamma x_i + (1 - \gamma)y_i) > 1.$$

Значит, $\gamma x + (1 - \gamma)y \in C_m^+$ для всех $\gamma \in (0, 1]$.

Рассмотрим теперь множество $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^+$. В силу доказанных выше свойств подмножеств C_n^+ , $n = 1, 2, \dots$, множество C выпукло. Покажем, что C является полупространством в X . С этой целью введем последовательность подмножеств

$$C_n^- := \left\{ x \in X \mid \sum_{i=n}^{\infty} x_i < 1, \sum_{i=s}^{\infty} x_i = 1, s < n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и заметим, что $X \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^-$. Действительно, пусть

$$I(x) := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n}^{\infty} x_i \neq 1 \right\}.$$

Докажем, что $I(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in X$. Условие $I(x) = \emptyset$ эквивалентно тому, что $\sum_{i=n}^{\infty} x_i = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Однако, если x_m – ненулевая координата вектора x с наибольшим индексом m , то $\sum_{i=n}^{\infty} x_i = 0$ для всех $n > m$. Следовательно, никакой вектор $x \in X$ не может удовлетворять равенствам $\sum_{i=n}^{\infty} x_i = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x \in X \setminus C$ и $k = k(x)$ – наименьший элемент в $I(x)$. Тогда $\sum_{i=n}^{\infty} x_i = 1$ для всех $n < k$ и $\sum_{i=k}^{\infty} x_i < 1$, поскольку $x \notin C$ и $k \in I(x)$. Значит, $x \in C_k^-$ и, следовательно, $X \setminus C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^-$. Обратное включение очевидно. С использованием равенства $X \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^-$ выпуклость множества $X \setminus C$ доказывается аналогично выпуклости C . Таким образом, оба множества C и $X \setminus C$ являются выпуклыми и, следовательно, C есть полупространство в X .

Докажем теперь, что сечение X , которое порождается полупространством C , является щелью. Для этого построим рецессивный конус множества C . Введем последовательность подмножеств

$$M_n := \left\{ x \in X \mid \sum_{i=n}^{\infty} x_i > 0, \sum_{i=s}^{\infty} x_i = 0, s < n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и множество

$$M_0 := \left\{ x \in X \mid \sum_{i=n}^{\infty} x_i = 0, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Заметим, что $M_0 \neq \emptyset$, так как $0 \in M_0$.

Покажем, что

$$O^+C = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n. \quad (6)$$

Пусть $h \in M_n$ и $x \in C_k^+$, где n и k – некоторые фиксированные натуральные числа. Если $k \leq n$, то $x + \gamma h \in C_k^+$ для всех $\gamma \geq 0$. Если же $n < k$, то $x + \gamma h \in C_n^+$ для всех $\gamma > 0$. В любом случае имеем $x + \gamma h \in C$ для всех $x \in C$, $h \in \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, $\gamma \geq 0$. Значит, $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n \subset O^+C$. Для доказательства обратного включения заметим, что для любого вектора $h \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ существует номер $n \in \mathbb{N}$, при котором $-h \in M_n$. Но в этом случае для любого $x \in \bigcup_{k=n+1}^{\infty} C_k^+ \subset C$ имеем $x + \gamma h \in C_n^-$ для всех $\gamma > 0$ и, следовательно, $h \notin O^+C$. Значит, $X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n \subset X \setminus O^+C$, что влечет $O^+C \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$. Таким образом, равенство (6) доказано.

Покажем теперь, что в C нет $\leq_c$ -наименьшего элемента. С этой целью заметим, что при $m < k$ и только в этом случае отношение $y <_c x$ имеет место для всех $y \in C_k^+$ и

всех $x \in C_m^+$. Действительно, для любого $y \in C_k^+$ имеем $\sum_{i=n}^{\infty} y_i = 1$ при всех $n \leq m$, а для любого $x \in C_m^+$ имеем $\sum_{i=n}^{\infty} x_i = 1$ при всех $n < m$ и $\sum_{i=m}^{\infty} x_i > 1$. Значит, вектор $h := x - y$ удовлетворяет условиям $\sum_{i=n}^{\infty} h_i = 0$ для всех $n < m$ и $\sum_{i=m}^{\infty} h_i > 0$. Следовательно, $h \in M_m \subset O^+C$, причем $-h \notin O^+C$. Таким образом, $y \leq_c x$, но $x \not\leq_c y$, т.е. $y <_c x$.

Из этого замечания следует, что для любого вектора $x \in C$ существует $y \in C$, удовлетворяющий соотношению $y <_c x$. На самом деле, поскольку $x \in C$, то $x \in C_m^+$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, и, следовательно, любой вектор $y \in C_k^+ \subset C$, где k – произвольное натуральное число такое, что $m < k$, удовлетворяет отношению $y <_c x$.

Аналогично доказывается, что в $X \setminus C$ нет $\leq_c$ -наибольшего элемента. Таким образом, построенное множество C является полупространством, которое порождает сечение X , являющееся щелью.

Полупространство, которое порождает сечение векторного пространства, являющееся щелью, будем называть для краткости *полупространство-щель*.

Итак, все полупространства любого бесконечномерного векторного пространства делятся по типам порождаемых ими сечений векторного пространства на три непустых непересекающихся класса:

- 1) класс заостренных дедекиндовых полупространств, которые порождают верхние дедекиндовы сечения;
- 2) класс незаостренных дедекиндовых полупространств, которые порождают нижние дедекиндовы сечения;
- 3) класс полупространств-щелей, которые порождают сечения, являющиеся щелями.

В любом конечномерном векторном пространстве класс полупространств-щелей пуст, и наша классификация совпадает с классификацией Мартинец-Легаза и Зингера [6], при этом верхним дедекиндовым полупространствам соответствуют полупространства типа " $\leq_L$ ", а нижним дедекиндовым полупространствам – полупространства типа " $<_L$ ".

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kakutani S. Ein Beweis des Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen // Proc. Imp. Acad. Japan. 1938. V. 14. P. 93–94.
- [2] Tukey J. W. Some notes on the separation of convex sets // Portugal. Math. 1942. V. 3. P. 95–102.
- [3] Hammer P. C. Maximal convex sets // Duke Math. J. 1955. V. 22. P. 103–106.
- [4] Klee V. L. The structure of semispaces // Math. Scand. 1956. V. 4. P. 54–64.
- [5] Martinez-Legaz J.-E. Exact quasiconvex conjugation // Z. Oper. Res. 1983. V. 27. P. 257–266.
- [6] Martinez-Legaz J.-E., Singer I. The structure of semispaces in $\mathbb{R}^n$ // Linear Algebra Appl. 1988. V. 110. P. 117–179.
- [7] Martinez-Legaz J.-E., Singer I. Lexicographical order, lexicographical index, and linear operators // Linear Algebra Appl. 1990. V. 128. P. 65–95.
- [8] Гороховик В. В. Выпуклые задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990.
- [9] Lassak M. Convex half-spaces // Fund. Math. 1984. V. 120. P. 7–13.
- [10] Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
- [11] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [12] Luc D. T. Recession cones and the domination property in vector optimization // Math. Programming. 1990. V. 49. № 1. P. 113–122.