Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ейко, А. А. Кондратюк, Об интегральных логарифмических средних произведений Бляшке, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 199–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:16:08

УДК 517.547

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ

В. В. Ейко, А. А. Кондратюк

С помощью метода рядов Фурье для мероморфных функций обобщаются результаты, характеризующие поведение интегральных логарифмических средних произведений Бляшке произвольного порядка.

Библиография: 7 названий.

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел, $0 < |a_n| < 1$, которые удовлетворяют условию Бляшке

$$\sum_n (1 - |a_n|) < \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_a$ класс произведений Бляшке

$$B(z) = \prod_n \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z},$$

для которых $a \leq |a_n|$, где $a > 0$. Интегральные логарифмические средние произведения Бляшке порядка q , $1 \leq q < \infty$, определим соотношением

$$m_q(r, B) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\ln |B(re^{i\theta})||^q d\theta \right)^{1/q}.$$

Пусть $n(t) = n(t, B)$ – количество членов последовательности $\{a_n\}$, которые удовлетворяют условию $a \leq |a_n| \leq t$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача оценки $m_2(r, B)$ через $n(r, B)$ была поставлена А. Зигмундом. В 1969 году она была решена Г. Маклейном и Л. Рубелом [1]. Исследуем общий случай, когда $1 \leq q < +\infty$.

Некоторые результаты, характеризующие поведение интегральных логарифмических средних порядка q , $1 \leq q < \infty$, произведений Бляшке и Цудзи–Джрбашяна были получены К. Линденом [2]–[4].

Используя метод рядов Фурье для мероморфных функций [1], [5], мы находим оценки (точные в определенном смысле) для $m_q(r, B)$ в терминах функции $n(r, B)$. Сначала сформулируем основные результаты настоящей статьи. Всюду далее p и q сопряжены, т.е. $1/p + 1/q = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B \in \mathcal{B}_a$. Тогда для каждого $q \in [1, +\infty)$ существует постоянная A_q такая, что

$$(1-r)^{1/p} m_q(r, B) \leq A_q \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt \quad (1)$$

для всех r , $0 < r < 1$.

СЛЕДСТВИЕ (см. также [2]). Если $B \in \mathcal{B}_a$, $q \in [1, +\infty)$ и $n(r) = O((1-r)^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, то $m_q(r, B) = O((1-r)^{1/q-\alpha})$, $r \rightarrow 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть нули произведения Бляшке B , $B \in \mathcal{B}_a$, положительны. Если существует β , $0 < \beta < 1$, такое, что

$$n(r)(1-r) \leq \beta \int_r^1 n(t) dt, \quad 0 < r < 1, \quad (2)$$

то при некотором $B_q > 0$ имеет место неравенство

$$m_q(r, B)(1-r)^{1/p} \geq B_q \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 < r < 1,$$

где $q \in [1, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < q \leq 2$ и нули произведения Бляшке B , $B \in \mathcal{B}_a$, положительны. Тогда для ограниченности функции $m_q(r, B)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$n(r) = O((1-r)^{-1/q}), \quad r \rightarrow 1.$$

Для доказательства этих результатов нам необходимы следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $B \in \mathcal{B}_a$. Тогда существует постоянная A_q такая, что при $q \geq 2$, $0 < r < 1$, $\rho = r(1 - \sqrt{1-r})^{1/p}$ имеет место неравенство

$$(1-r)^{1/p} m_q(r) \leq A_q \max \left\{ (n(r) - n(\rho))(1-r), n(r)(1-r)^{1+1/(4p)}, \int_r^1 (1-t) dn(t), (1-r)^{1/p} \int_r^1 n(t) dt \right\}. \quad (3)$$

ЛЕММА 2 [6]. Пусть $p > 1$,

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^k}{k} \right)^p, \quad 0 < r < 1.$$

Тогда $\psi(r) \leq q(1-r)^{p-1}$ при $0 < r < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $c_k(r)$ – коэффициенты Фурье в разложении функции $\ln |B(re^{i\theta})|$ по системе $\{e^{ik\theta}\}$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга при $q \geq 2$ и равенства $c_k = \bar{c}_{-k}$ имеем

$$m_q(r, B) \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^p \right)^{1/p} \leq |c_0| + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(r)|^p \right)^{1/p}. \quad (4)$$

Коэффициенты Фурье $c_k(r)$ можно выразить через a_n следующим образом [1]:

$$c_0(r) = - \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} c_k(r) &= \frac{1}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n^k - a_n^{-k}) r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|a_n| \leq r} \left(\left(\frac{r}{a_n} \right)^k - \left(\frac{\bar{a}_n}{r} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2k} \sum_{|a_n| \leq r} \left((\bar{a}_n r)^k - \left(\frac{\bar{a}_n}{r} \right)^k \right) + \frac{r^k}{2k} \sum_{|a_n| > r} a_n^{-k} (|a_n|^{2k} - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим модуль последней суммы в (6) через J_k , а предпоследней через I_k . Тогда

$$I_k \leq \frac{1 - r^{2k}}{2kr^k} \int_0^r t^k dn(t).$$

При $0 < \rho < r$ имеем

$$I_k \leq \frac{1 - r^{2k}}{2kr^k} \left(\int_0^\rho t^k dn(t) + \int_\rho^r t^k dn(t) \right) \leq \frac{1}{2k} (1 - r^{2k}) \left(\left(\frac{\rho}{r} \right)^k n(\rho) + n(r) - n(\rho) \right). \quad (7)$$

Обозначим $t^{-1} = e^x$. Тогда

$$\frac{t^{-k} - t^k}{t^{-1} - t} = \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} x}.$$

Учитывая, что функция $\operatorname{sh} kx / \operatorname{sh} x$ возрастающая по x , имеем

$$\begin{aligned} J_k &\leq \frac{r^k}{2k} \int_r^1 t^{-k} (1 - t^{2k}) dn(t) = \frac{r^k}{2k} \int_r^1 \frac{t^{-k} - t^k}{t^{-1} - t} (t^{-1} - t) dn(t) \\ &\leq \frac{r^k}{2k} \frac{r^{-k} - r^k}{r^{-1} - r} \int_r^1 (t^{-1} - t) dn(t) = \frac{r^k}{2k} \frac{r^{-k} (1 - r^{2k})}{r^{-1} (1 - r^2)} \int_r^1 \frac{1 - t^2}{t} dn(t). \end{aligned}$$

Выполняя элементарные оценки, получаем

$$J_k \leq 2 \frac{1 - r^k}{k(1 - r)} \int_r^1 (1 - t) dn(t). \quad (8)$$

Используя (7), (8) и неравенство Гёльдера, находим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - r^{2k}}{2k} (n(r) - n(\rho)) + \frac{1 - r^{2k}}{2k} \left(\frac{\rho}{r} \right)^k n(\rho) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{1 - r^k}{k} \frac{1}{1 - r} \int_r^1 (1 - t) dn(t) \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - r^{2k}}{2k} (n(r) - n(\rho)) \right)^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - r^{2k}}{2k} \left(\frac{\rho}{r} \right)^k \right)^p \right)^{1/p} \\ &\quad + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - r^k}{k} \frac{1}{1 - r} \int_r^1 (1 - t) dn(t) \right)^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^{2k}}{2k} (n(r) - n(\rho)) \right)^p \right)^{1/p} &\leq (q(1-r^2)^{p-1})^{1/p} (n(r) - n(\rho)) \\ &\leq q^{1/p} 2^{(p-1)/p} (1-r)^{1-1/p} (n(r) - n(\rho)). \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая $\rho = r(1 - \sqrt{1-r})^{1/p}$ и применяя неравенство Коши и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^{2k}}{2k} \left(\frac{\rho}{r} \right)^k n(\rho) \right)^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^{2k}}{2k} (1 - \sqrt{1-r})^{k/p} n(\rho) \right)^p \right)^{1/p} \\ &= n(\rho) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^{2k}}{2k} \right)^p (1 - \sqrt{1-r})^k \right)^{1/p} \\ &\leq n(\rho) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^{2k}}{2k} \right)^{2p} \right)^{1/(2p)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \sqrt{1-r})^{2k} \right)^{1/(2p)} \\ &\leq n(\rho) q(1-r^2)^{(2p-1)/(2p)} \left(\frac{1}{1 - (1 - \sqrt{1-r})^2} \right)^{1/(2p)}. \end{aligned}$$

С помощью элементарных преобразований имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^{2k}}{2k} \left(\frac{\rho}{r} \right)^k n(\rho) \right)^p \right)^{1/p} \leq q 2^{1-1/(2p)} n(r) (1-r)^{1-3/(4p)}. \quad (11)$$

Для оценки последней суммы в (9) снова воспользуемся леммой 2. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-r^k}{k} \frac{1}{1-r} \int_r^1 (1-t) dn(t) \right)^p \right)^{1/p} &\leq \frac{1}{1-r} \int_r^1 (1-t) dn(t) q(1-r)^{1-1/p} \\ &= q(1-r)^{-1/p} \int_r^1 (1-t) dn(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая, что

$$|c_0(r, B)| = \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{a} \int_r^1 n(t) dt,$$

и выбирая $A_q = 4 \max\{q^{1/p} 2^{1/p}, q^{1-1/(2p)}, 2q, 1/a\}$, из (4) и (10)–(12) получаем (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Используя очевидные неравенства

$$\begin{aligned} n(r)(1-r) &< \int_r^1 n(t) dt < \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt, \\ (n(r) - n(\rho))(1-r) &< n(r)(1-r), \quad n(r)(1-r)^{1+1/(4p)} < n(r)(1-r), \\ (1-r)^{1/p} \int_r^1 n(t) dt &< \int_r^1 n(t) dt, \\ \int_r^1 (1-t) dn(t) &= -n(r)(1-r) + \int_r^1 n(t) dt < \int_r^1 n(t) dt \end{aligned}$$

и лемму 1, получаем (1) при $q \geq 2$.

Рассмотрим теперь случай $1 \leq q < 2$. Обозначим $F(q) = m_q(r)$. Функция $\ln F(q)$ выпукла относительно $1/q$ [7, с. 236], т.е.

$$\ln F(q) \leq (1 - \theta) \ln F(\omega) + \theta \ln F(s)$$

при $1/q = (1 - \theta)/\omega + \theta/s$, $0 \leq \theta \leq 1$, или

$$m_q(r) \leq m_\omega(r)^{1-\theta} m_s(r)^\theta. \quad (13)$$

Положим $\omega = 1$, $s = 2$. Тогда $\theta = 2/p$ и

$$m_q(r) \leq m_1(r)^{2/q-1} m_2(r)^{2/p}. \quad (14)$$

Кроме того, в силу (5) и неравенства $|B(re^{i\theta})| < 1$ имеем

$$m_1(r) = \int_0^{2\pi} |\ln |B(re^{i\theta})|| d\theta = - \int_0^{2\pi} \ln |B(re^{i\theta})| d\theta = \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt,$$

а в силу (1) при $q = 2$ получаем

$$m_2(r) \leq A_2(1-r)^{-1/2} \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt.$$

Тогда (14) можно переписать в виде

$$m_q(r) \leq A_2^{2-2/q} (1-r)^{1/q-1} \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt.$$

Таким образом,

$$(1-r)^{1/p} m_q(r, B) \leq A_q \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt$$

для $q \in [1, +\infty)$, $0 < r < 1$, где

$$A_q = \begin{cases} 4 \max\{q^{1/p} 2^{1/q}, q^{2^{1-1/(2p)}}, 2q, 1/a\} & \text{при } q \geq 2, \\ A_2^{2/p} & \text{при } 1 \leq q \leq 2, \end{cases}$$

и теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используя неравенство Хаусдорфа–Юнга при $1 < q \leq 2$, имеем

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln |B(re^{i\theta})|)^q d\theta \right)^{1/q} \geq |c_0(r)| + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(r)|^p \right)^{1/p}.$$

Оценим при $p \geq 2$ сумму в правой части. Имеем

$$\begin{aligned} |c_k(r)|^p &= \left| \left(\frac{1}{2k} \right)^p \left((r^k - r^{-k}) \sum_{a_n \leq r} a_n^k + r^k \sum_{a_n \geq r} (a_n^k - a_n^{-k}) \right)^p \right| \\ &\geq \left(\frac{1}{2k} \right)^p \left(r^k \sum_{a_n \geq r} (a_n^{-k} - a_n^k) \right)^p = \left(\frac{1}{2k} \right)^p \left(r^k \sum_{a_n \geq r} \frac{(1 - a_n^k)(1 + a_n^k)}{a_n^k} \right)^p \\ &= \left(r^k \sum_{a_n \geq r} \frac{(1 - a_n)(1 + a_n + \dots + a_n^{k-1})(1 + a_n^k)}{2k a_n^k} \right)^p. \end{aligned}$$

Учитывая, что $1 + a_n + \dots + a_n^{k-1} \geq k a_n^k$, получаем

$$|c_k(r)|^p \geq \frac{1}{2^p} r^{pk} \left(\int_r^1 (1-t) dn(t) \right)^p.$$

Так как $r < 1$, имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{pk} = \frac{1}{1-r^p}$$

и

$$\begin{aligned} m_q(r, B) &\geq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(r)|^p \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{1-r^p} \right)^{1/p} \int_r^1 (1-t) dn(t) \\ &\geq p^{-1/p} (1-r)^{-1/p} \int_r^1 (1-t) dn(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрируя по частям и используя условие (2), получаем

$$2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(r)|^p \right)^{1/p} \geq p^{-1/p} (1-r)^{-1/p} (1-\beta) \int_r^1 n(t) dt.$$

Учитывая, что

$$\int_r^1 n(t) dt \geq a \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt,$$

для $1 \leq q \leq 2$ имеем

$$m_q(r) \geq 2(1-\beta)p^{-1/p}(1-r)^{-1/p} \int_r^1 n(t) dt \geq 2a(1-\beta)p^{-1/p}(1-r)^{-1/p} \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt.$$

Обозначим $B_q = 2a(1-\beta)p^{-1/p}$. Тогда

$$m_q(r, B)(1-r)^{1/p} \geq B_q \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt.$$

Чтобы доказать теорему для $q \geq 2$, воспользуемся приемом из доказательства теоремы 1 при $1 < q \leq 2$. Перепишем (13) в виде

$$m_s \leq m_{\omega}^{1-\theta} m_q^{\theta} \quad (16)$$

при $1/s = (1-\theta)/\omega + \theta/q$, где $0 \leq \theta \leq 1$.

Положим $s = 2$, $\omega = 1$. Тогда $\theta = q/(2(q-1))$. Как было доказано,

$$m_2(r, B) \geq B_2 \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt, \quad m_1(r, B) = \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt.$$

Тем самым, согласно (16) получим

$$B_2(1-r)^{-1/2} \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt \leq \left(\int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt \right)^{1-\theta} |m_q(r)|^{\theta},$$

откуда

$$B_2^{1/\theta} (1-r)^{(1-q)/q} \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt \leq m_q(r).$$

Таким образом,

$$m_q(r, B)(1-r)^{1/p} \geq B_q \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt,$$

где

$$B_q = \begin{cases} 2(1-\beta)p^{-1/p} & \text{при } 1 \leq q \leq 2, \\ B_2^{2/p} & \text{при } q \geq 2. \end{cases}$$

Тем самым, теорема 2 доказана.

Покажем теперь, что условие (2) существенно. Рассмотрим функцию

$$n(r) = \left[\ln^+ \ln \frac{1}{1-r} \right].$$

Покажем, что

$$(1-r)^{1/p} m_q(r) = o\left(\int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt\right), \quad r \rightarrow 1. \quad (17)$$

При $\rho = r(1 - \sqrt{1-r})^{1/p}$ имеем

$$\begin{aligned} n(\rho) &\geq n(r(1 - \sqrt{1-r})) = \left[\ln^+ \ln \frac{1}{\sqrt{1-r}(r + \sqrt{1-r})} \right] \\ &= \ln \ln \frac{1}{1-r} + O(1), \quad r \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $n(r) - n(\rho) = O(1)$, $r \rightarrow 1$. Таким образом,

$$(n(r) - n(\rho))(1-r) = O(1-r), \quad r \rightarrow 1. \quad (18)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} n(r)(1-r)^{1+1/(4p)} &\leq \left(\ln^+ \ln \frac{1}{1-r} \right) (1-r^{1/(4p)})(1-r) = o(1-r), \quad r \rightarrow 1, \\ \int_r^1 (1-t) dn(t) &\leq \int_r^1 \frac{1}{-\ln(1-t)} dt = O(1-r), \quad r \rightarrow 1, \\ (1-r)^{1/p} \int_r^1 n(t) dt &= o\left(\int_r^1 n(t) dt\right), \quad r \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку

$$1-r \leq \frac{1}{n(r)} \int_r^1 n(t) dt = o\left(\int_r^1 n(t) dt\right), \quad r \rightarrow 1,$$

используя лемму 1, (18) и (19), получаем (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Из неравенства (1) следует

$$(1-r)^{1/p} m_q(r, B) \leq \frac{A_q}{a} \int_r^1 n(t) dt.$$

При $n(r) = O((1-r)^{-\alpha})$ имеем

$$\frac{A_q}{a} \int_r^1 n(t) dt = O\left(\int_r^1 (1-t)^{-\alpha} dt\right) = O((1-r)^{-\alpha+1}), \quad r \rightarrow 1.$$

Следовательно,

$$m_q(r, B) = O((1-r)^{-\alpha+1-1/p}) = O((1-r)^{1/q-\alpha}), \quad r \rightarrow 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. *Необходимость.* Пусть функция $m_q(r, B)$ ограничена. Используем полученный результат (15) в следующем виде:

$$(1-r)^{1/p} m_q(r) \geq B \int_r^1 (1-t) dn(t),$$

где $B = \text{const}$.

Согласно условию Бляшке

$$n(r) = - \int_0^r \frac{d \int_t^1 (1-\tau) dn(\tau)}{1-t} \leq \int_0^1 (1-\tau) dn(\tau) + \int_0^r \frac{\int_t^1 (1-\tau) dn(\tau)}{(1-t)^2} dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} n(r) &\leq O(1) + \int_0^r \frac{\int_t^1 (1-\tau) dn(\tau)}{(1-t)^2} dt = O(1) + \int_0^r \frac{(1-t)^{1/p} m_q(t)}{(1-t)^2} dt \\ &= O((1-r)^{-1/q}), \quad r \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Достаточность получается из следствия при $\alpha = 1/q$. Заметим, что в этом случае $1 < q < \infty$ и из условия Бляшке и соотношения (8) всегда следует $m_1(r, B) = o(1)$, $r \rightarrow 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McLane G. R., Rubel L. A. On the growth of Blaschke products // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 595-601.
- [2] Linden C. N. Integral means and zero distributions of Blaschke products // Canad. J. Math. 1972. V. 24. P. 755-760.
- [3] Linden C. N. Integral logarithmic means for regular functions // Pacific J. Math. 1989. V. 138. P. 119-127.
- [4] Linden C. N. The characterization of orders for regular functions // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1992. V. 11. P. 299-307.
- [5] Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Выща школа, 1988.
- [6] Кондратюк А. А., Тарасюк С. И. Сравнение лебеговых средних и неванлинновской характеристики субгармонических функций // Матем. студии. Тр. Львовского матем. об-ва. 1991. Вып. 1. С. 74-80.
- [7] Бурбаки Н. Меры. Интегрирование мер. М.: Наука, 1987.