Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Зеленюк, Топологические группы, в которых каждое нигде не плотное подмножество замкнуто, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 207–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 05:40:15

УДК 512.546

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ КАЖДОЕ НИГДЕ НЕ ПЛОТНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО ЗАМКНУТО

Е. Г. Зеленюк

В предположении комбинаторного принципа $p = \mathfrak{C}$, следующего из аксиомы Мартина, доказано, что произвольная недискретная метризуемая групповая топология на абелевой группе усиливается до недискретной групповой топологии, в которой каждое нигде не плотное подмножество замкнуто.

Библиография: 9 названий.

Из экстремальных свойств топологических пространств достаточно известны экстремальная несвязность, неразложимость и замкнутость каждого дискретного подмножества. Пространство экстремально несвязно, если замыкание любого открытого подмножества открыто. Пространство неразложимо, если его нельзя разбить на два плотных подмножества. Для каждого из перечисленных свойств существуют недискретные топологические группы, им обладающие, однако при дополнительных теоретико-множественных предположениях [1]–[3]. Недавно И. В. Протасов доказал, что “наивно” построить недискретную неразложимую топологическую абелеву группу невозможно. Проблема построения “наивных” примеров счетной недискретной экстремально несвязной топологической группы и счетной недискретной топологической группы, в которой каждое дискретное подмножество замкнуто, остается открытой [4, I.16], [5].

Экстремальная несвязность и неразложимость топологической группы – достаточно жесткие ограничения на ее алгебраическое строение. Недискретная экстремально несвязная топологическая группа содержит открытую булеву подгруппу [2]. Булевой называется группа периода 2. Недискретная неразложимая топологическая абелева группа содержит открытую счетную булеву подгруппу [6]. Имеет ли место аналогичный результат для топологических групп, в которых каждое дискретное подмножество замкнуто, было неизвестно.

В данной заметке в предположении комбинаторного принципа $p = \mathfrak{C}$ доказано, что произвольная недискретная метризуемая групповая топология на абелевой группе усиливается до недискретной групповой топологии, в которой каждое нигде не плотное подмножество замкнуто, в частности, замкнуто каждое дискретное подмножество.

Далее все группы предполагаются абелевыми.

ЛЕММА 1. Пусть (G, τ) – недискретная метризуемая топологическая группа конечного простого периода, X – нигде не плотное подмножество из (G, τ) , касающееся нуля. Топология τ усиливается до недискретной метризуемой групповой топологии, в которой множество X уже не касается нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим в (G, τ) недискретную подгруппу, дизъюнктную с множеством X , – этого будет достаточно. Пусть $\{U_n : n < \omega\}$ – база окрестностей нуля (G, τ) , p – период G . Можно считать, что множество $X \cup \{0\}$ замкнуто. Выберем ненулевой элемент $a_0 \in U_0$ такой, что $\langle a_0 \rangle \cap X = \emptyset$, где $\langle a_0 \rangle$ – подгруппа, порожденная a_0 . Это можно сделать, так как для каждого ненулевого натурального $n < p$ отображение $x \mapsto nx$ на (G, τ) является гомеоморфизмом и объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно. Пусть V_1, W_1 – окрестности нуля (G, τ) такие, что

$$((\langle a_0 \rangle \setminus \{0\}) + V_1) \cap X = \emptyset, \quad \underbrace{W_1 + \dots + W_1}_{p-1} \subseteq V_1.$$

Выберем ненулевой элемент $a_1 \in U_1 \cap W_1$ такой, что $\langle a_1 \rangle \cap X = \emptyset$. Тогда $\langle a_0, a_1 \rangle \cap X = \emptyset$. Пусть V_2, W_2 – окрестности нуля такие, что

$$((\langle a_0, a_1 \rangle \setminus \{0\}) + V_2) \cap X = \emptyset, \quad \underbrace{W_2 + \dots + W_2}_{p-1} \subseteq V_2.$$

Выберем ненулевой элемент $a_2 \in U_2 \cap W_2$ такой, что $\langle a_2 \rangle \cap X = \emptyset$. Тогда $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle \cap X = \emptyset$. Продолжая этот процесс, мы построим недискретную подгруппу $\langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$.

ЛЕММА 2. Пусть (G, τ) – недискретная метризуемая топологическая группа, в которой каждая подгруппа конечного периода дискретна. Топология τ усиливается до недискретной метризуемой групповой топологии, в которой для каждого ненулевого натурального n отображение $x \mapsto nx$ на G открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на G систему множеств вида $nU = \{nx : x \in U\}$, где n – ненулевое натуральное число, а U – окрестность нуля (G, τ) . Эта система удовлетворяет характеристическим свойствам базы окрестностей нуля топологической группы и, следовательно, является базой окрестностей нуля в некоторой групповой топологии τ' на G . Очевидно, что τ' метризуема, $\tau' \supseteq \tau$ и все отображения на (G, τ') вида $x \mapsto nx$ открыты. Недискретность τ' следует из отсутствия в (G, τ) открытых подгрупп конечного периода.

ЛЕММА 3. Пусть (G, τ) – недискретная метризуемая топологическая группа, в которой для каждого ненулевого натурального n отображение $x \mapsto nx$ открыто, X – нигде не плотное подмножество из (G, τ) , касающееся нуля. Топология τ усиливается до недискретной метризуемой групповой топологии, в которой множество X уже не касается нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим в (G, τ) нетривиальную сходящуюся к 0 последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ такую, что $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots] \cap X = \emptyset$, где

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots] = \bigcup_n [a_0, a_1, \dots, a_n],$$

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \{x_0 + x_1 + \dots + x_n : x_i \in \{0, \pm a_i, \pm 2a_i, \dots, \pm(i+1)a_i\}\}.$$

Пусть $\{U_n : n < \omega\}$ – убывающая база окрестностей нуля (G, τ) . Можно считать, что множество $X \cup \{0\}$ замкнуто. Предположим, что уже выбраны ненулевые элементы

$a_0 \in U_0, \dots, a_{n-1} \in U_{n-1}$ такие, что $[a_0, \dots, a_{n-1}] \cap X = \emptyset$. Пусть V_n, W_n – симметричные окрестности нуля (G, τ) такие, что

$$([a_0, \dots, a_{n-1}] \setminus \{0\}) + V_n \cap X = \emptyset, \quad \underbrace{W_n + \dots + W_n}_n \subseteq V_n.$$

Выберем ненулевой элемент $a_n \in U_n \cap W_n$ такой, что $\pm a_n, \pm 2a_n, \dots, \pm(n+1)a_n \notin X$. Тогда $[a_0, \dots, a_n] \cap X = \emptyset$. Такой выбор возможен, так как на (G, τ) отображения вида $x \mapsto nx, x \mapsto -nx$ открыты, прообраз нигде не плотного множества при открытом отображении нигде не плотен и объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно.

Пусть τ' – наибольшая групповая топология на G , в которой последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ сходится к 0. Тогда $\tau' \supset \tau$ и в топологии τ' множество $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ является окрестностью нуля [7]. Ослабим топологию τ' до неметризуемой топологии $\tau'' \supset \tau$, в которой множество $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ остается окрестностью нуля. Топология τ'' является искомой.

ЛЕММА 4. Пусть $\{\tau_\alpha : \alpha < \mathfrak{C}\}$ – возрастающая $\mathfrak{C}$ -последовательность топологий счетного веса на множестве Y такая, что $\tau_\alpha = \bigcup \{\tau_\beta : \beta < \alpha\}$, если α – предельный ординал счетной кофинальности. Пусть X – подмножество Y , нигде не плотное в топологии τ , $\tau = \bigcup \{\tau_\alpha : \alpha < \mathfrak{C}\}$. Тогда существует ординал $\gamma < \mathfrak{C}$ такой, что множество X нигде не плотно в топологии τ_γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ', τ'' – произвольные топологии на множестве Y такие, что $\tau' \subseteq \tau''$. Будем говорить, что подмножество $X \subset Y$ τ'' -нигде не плотно в топологии τ' , если для любого непустого открытого множества U в топологии τ' найдется непустое открытое множество $V \subseteq U$ в топологии τ'' такое, что $V \cap X = \emptyset$.

Построим последовательность $\{\alpha_n : n < \omega\}$ счетных ординалов такую, что для каждого $n < \omega$ множество X $\tau_{\alpha_{n+1}}$ -нигде не плотно в топологии τ_{α_n} , и положим $\gamma = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$.

Основной результат данной заметки мы докажем в предположении комбинаторного принципа $p = \mathfrak{C}$, известного как лемма Буса (см., например, [8]). Согласно $p = \mathfrak{C}$ каждый фильтр на счетном множестве характера $< \mathfrak{C}$ усиливается до последовательности. Иными словами, для каждого фильтра φ на счетном множестве X с базой мощности $< \mathfrak{C}$ существует последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ элементов из X со следующим свойством: для любого множества $A \in \varphi$ найдется номер n такой, что $\{a_m : m \geq n\} \subseteq A$. Комбинаторный принцип $p = \mathfrak{C}$ следует из аксиомы Мартина (МА), которая, в свою очередь, следует из континуум-гипотезы (СН).

ЛЕММА 5 ($p = \mathfrak{C}$). Каждая неметризуемая групповая топология на счетной группе характера $< \mathfrak{C}$ усиливается до неметризуемой метризуемой групповой топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta < \mathfrak{C}$, $\{U_\alpha : \alpha < \theta\}$ – база окрестностей нуля счетной неметризуемой топологической группы (G, τ) . Используя $p = \mathfrak{C}$, построим в (G, τ) $\theta + 1$ цепочку нетривиальных сходящихся к 0 последовательностей $\{a_n^\alpha : n < \omega\}$, $\alpha \leq \theta$, такую, что для каждого $\alpha < \theta$

- 1) $|\{a_n^\alpha : n < \omega\} \setminus \{a_n^{\alpha+1} : n < \omega\}| < \omega$;
- 2) $[a_0^\alpha, a_1^\alpha, \dots, a_n^\alpha, \dots] \subseteq U_\alpha$ (см. доказательство леммы 3).

Затем усилим топологию τ до неметризуемой групповой топологии, в которой множества $[a_n^\theta, a_{n+1}^\theta, \dots]$, $n < \omega$, являются окрестностями нуля.

ТЕОРЕМА ($p = \mathfrak{C}$). *Произвольная неметризуемая групповая топология на группе усиливается до неметризуемой групповой топологии, в которой каждое нигде не плотное подмножество замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G, τ) – произвольная неметризуемая топологическая группа. Можно считать, что G счетна. Пусть $\{X_\xi : \xi < \mathfrak{C}\}$ – пересчет всех подмножеств из G . Построим возрастающую $\mathfrak{C}$ -последовательность $\{\tau_\alpha : \alpha < \mathfrak{C}\}$ неметризуемых групповых топологий на G , содержащих τ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\tau_\alpha = \bigcup \{\tau_\beta : \beta < \alpha\}$, если α – предельный ординал счетной конфинальности;
- 2) для каждого $\xi < \mathfrak{C}$ существует $\alpha(\xi) < \mathfrak{C}$ такой, что во всех топологиях τ_β , где $\alpha(\xi) \leq \beta < \mathfrak{C}$, множество X_ξ не является нигде не плотным множеством, касающимся нуля.

Можно считать, что имеет место один из двух случаев:

- а) (G, τ) содержит открытую подгруппу конечного простого периода;
- б) в (G, τ) каждая подгруппа конечного периода дискретна.

Рассмотрим случай а). В роли τ_0 возьмем топологию τ . Фиксируем ненулевой ординал $\alpha < \mathfrak{C}$ и предположим, что для всех $\beta < \alpha$ уже определены τ_β . Если α – предельный ординал счетной конфинальности, то τ_α определим условием 1). Если α – предельный ординал несчетной конфинальности, то, используя лемму 5, возьмем в роли τ_α любую неметризуемую групповую топологию, содержащую $\bigcup \{\tau_\beta : \beta < \alpha\}$. Пусть $\alpha = \beta + 1$, X – первое множество (в $\mathfrak{C}$ -последовательности $\{X_\xi : \xi < \mathfrak{C}\}$), которое в топологии τ_β нигде не плотно и касается нуля. С помощью леммы 1 усилим τ_β до неметризуемой групповой топологии, в которой множество X уже не касается нуля. Эту топологию и возьмем в роли τ_α .

Рассмотрим теперь случай б). С помощью леммы 2 усилим топологию τ до неметризуемой групповой топологии, в которой все отображения вида $x \mapsto nx$ открыты. Эту топологию возьмем в роли τ_0 . Фиксируем ненулевой ординал $\alpha < \mathfrak{C}$ и предположим, что для всех $\beta < \alpha$ уже определены топологии τ_β , причем во всех этих топологиях отображения вида $x \mapsto nx$ открыты. Если α – предельный ординал счетной конфинальности, то τ_α определим условием 1). Тогда в τ_α все отображения $x \mapsto nx$ также открыты. Если α – предельный ординал несчетной конфинальности, то, используя леммы 5 и 2, возьмем в роли τ_α любую неметризуемую групповую топологию, которая содержит $\bigcup \{\tau_\beta : \beta < \alpha\}$ и в которой все отображения вида $x \mapsto nx$ открыты. Пусть $\alpha = \beta + 1$, X – первое множество, которое в топологии τ_β нигде не плотно и касается нуля. С помощью лемм 3, 2 усилим τ_β до неметризуемой групповой топологии, в которой множество X уже не касается нуля и все отображения $x \mapsto nx$ открыты. Эту топологию и возьмем в роли τ_α .

Очевидно, что так построенная $\mathfrak{C}$ -последовательность $\{\tau_\alpha : \alpha < \mathfrak{C}\}$ удовлетворяет условию 1). Покажем, что она удовлетворяет условию 2). Действительно, фиксируем ординал $\xi < \mathfrak{C}$ и предположим, что для всех $\eta < \xi$ условие 2) выполняется. Пусть $\gamma = \sup\{\alpha(\eta) : \eta < \xi\}$. Если во всех топологиях τ_β , где $\gamma \leq \beta < \mathfrak{C}$, множество X_ξ не является нигде не плотным множеством, касающимся нуля, то в роли $\alpha(\xi)$ можно взять $\beta + 1$. Если же в некоторой топологии τ_β множество X_ξ нигде не плотно и касается

нуля, то в τ_β оно является первым из таких множеств и, следовательно, в роли $\alpha(\xi)$ можно взять $\beta + 1$.

Положим $\tau^* = \bigcup \{\tau_\alpha : \alpha < \mathfrak{C}\}$ и докажем, что в (G, τ^*) каждое нигде не плотное подмножество замкнуто. Допустим противное. Тогда существует $\xi < \mathfrak{C}$ такой, что множество X_ξ в топологии τ^* нигде не плотно и касается нуля. Но по лемме 4 для каждого $\alpha < \mathfrak{C}$ существует $\beta \geq \alpha$, $\beta < \mathfrak{C}$ такой, что множество X_ξ нигде не плотно и касается нуля в топологии τ_β . Получили противоречие с условием 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [9] в предположении $p = \mathfrak{C}$ для каждого натурального числа $n \geq 1$ на счетной булевой группе B построены три различные групповые топологии $\lambda_n, \rho_n, \varkappa_n$ с ровно n свободными сходящимися к 0 ультрафильтрами. Во всех этих топологиях каждое дискретное подмножество замкнуто. Другие примеры недискретных топологических групп, в которых каждое дискретное подмножество замкнуто, были неизвестны. Основной результат данной заметки можно доказать в усиленном варианте (естественно, в предположении $p = \mathfrak{C}$): произвольная недискретная метризуемая групповая топология на группе усиливается до недискретной групповой топологии с бесконечным числом сходящихся к 0 ультрафильтров, в которой каждое нигде не плотное подмножество замкнуто.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно теореме Малыхина в счетной неразложимой топологической группе каждое дискретное подмножество замкнуто. На нигде не плотные подмножества этот результат не распространяется. Для каждого натурального числа $n > 1$ топологическая группа $(B, \varkappa_n)$ неразложима и в ней существует незамкнутое нигде не плотное подмножество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сирота С. Произведение топологических групп и экстремальная несвязность // Матем. сб. 1969. Т. 79. № 2. С. 179–192.
- [2] Малыхин В. И. Экстремально несвязные и близкие к ним группы // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 27–30.
- [3] Малыхин В. И. Об экстремально несвязных топологических группах // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 59–66.
- [4] Нерешенные задачи топологической алгебры. Кишинев: Штиинца, 1985.
- [5] Протасов И. В. Дискретные подмножества топологических групп // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 150–151.
- [6] Протасов И. В. Абсолютно разложимые группы // Укр. матем. ж. 1996. Т. 48. № 3. С. 383–392.
- [7] Зеленюк Е. Г., Протасов И. В. Топологии на абелевых группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1090–1107.
- [8] Малыхин В. И. Топология и форсинг // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 69–118.
- [9] Зеленюк Е. Г. Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров // Матем. студії. Праці Львівського матем. т-ва. 1996. Т. 6.