Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. И. Ишанкулов, О. И. Махмудов, Задача Коши для системы уравнений термоупругости в пространстве, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 212–217

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:50:35

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Т. И. Ишанкулов, О. И. Махмудов

Рассматривается задача продолжения решения системы уравнений термоупругости в пространственной ограниченной области по ее значениям и значениям ее напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе функции Карлемана.

Библиография: 14 названий.

В статье рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений термоупругости в пространственной ограниченной области по ее значениям и значениям ее напряжения на части границы этой области, т.е. задача Коши. Система уравнений термоупругости эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т.е. некорректна (пример Адамара). В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [1]. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [2].

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа началось в 50-х годах в работах М. М. Лаврентьева, С. Н. Мергеляна, В. К. Иванова и развивалось впоследствии В. Г. Мазьей и В. П. Хавиным, Ш. Я. Ярмухамедовым и другими [3]–[12].

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки трехмерного евклидова пространства E^3 и термоупругая среда есть ограниченная односвязная область D в E^3 с кусочно-гладкой границей, состоящей из куска Σ плоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т.е. $\partial D = S \cup \Sigma$. Рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, w\right) = \left\| B_{mj}\left(\frac{\partial}{\partial x}, w\right) \right\|_{4 \times 4},$$

$$B_{mj}\left(\frac{\partial}{\partial x}, w\right) = (1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{4j})\left(\delta_{mj}\mu\left(\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j}\right) - \delta_{4j}(1 - \delta_{m4})\gamma\frac{\partial}{\partial x_m} + i\omega\eta\delta_{m4}(1 - \delta_{4j})\frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{m4}\delta_{4j}\left(\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{i\omega}{\kappa}\right),$$

$$m, j = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

– оператор Лапласа, λ, μ и ρ – постоянные Ламе и плотность упругой среды соответственно, ω – частота колебания, δ_{mj} – символ Кронекера, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α – коэффициент линейного температурного расширения среды, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности среды, i – мнимая единица, k – коэффициент теплопроводности среды, $\eta = \gamma\Theta_0/k$, Θ_0 – температура среды в недеформированном состоянии. Уравнение термоупруго-колебательного состояния среды D в компонентах смещения принимает вид [13]

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \omega\right)U = 0, \quad (1)$$

где $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (u, u_4)$, u_1, u_2, u_3 – компоненты смещения, $u_4 = \Theta$ – отклонение температуры среды от температуры Θ_0 . Решение U системы (1) в области D назовем *регулярным*, если $U \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

В дальнейшем будем использовать матричный дифференциальный оператор термонапряжения

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y}, n(y)\right) = \begin{pmatrix} & -\gamma n_1 \\ T & -\gamma n_2 \\ & -\gamma n_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial n} \end{pmatrix},$$

где T – оператор напряжения

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n(y)\right) = \|T_{mj}\|_{3 \times 3} = \left\| \lambda n_m \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_m} + \mu \delta_{mj} \frac{\partial}{\partial n} \right\|_{3 \times 3},$$

$n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке y . Через $\hat{R}(\partial/\partial y, n(y))$ обозначим матрицу, которая получается из $R(\partial/\partial y, n(y))$ заменой в последнем столбце γ на $i\omega\eta$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти регулярное решение U системы (1) в области D , исходя из ее данных Коши на поверхности S :

$$U(y)|_S = f(y), \quad R\left(\frac{\partial}{\partial y}, n(y)\right)U(y)|_S = g(y), \quad (2)$$

$f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ – заданные непрерывные вектор-функции.

Данная задача является некорректной. Характер некорректности такой же, как у задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Для случая $\omega = 0$, $\gamma = 0$ [7] (система уравнений статики) рассматриваемая задача исследована в [11]. Наша цель состоит в построении приближенного решения задачи (1), (2), основанном на методе функции Карлемана.

Функцию Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и ему близких в случае, когда Σ – часть поверхности конуса, построил Ярмухамедов [6], [7]. Матрицу Карлемана задачи Коши для уравнений Коши–Римана в случае, когда S – произвольное множество положительной меры, построил Л. А. Айзенберг [9]. Развивая идею Мергеляна [5], указавшего (основывающийся на теоремах об аппроксимации) способ построения функции

Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S – кусок границы односвязной области с гладким краем, Н. Н. Тарханов [12] построил матрицу Карлемана для эллиптических систем.

Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы с точностью δ , $0 < \delta < 1$ (в метрике C), их приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$, которые могут не принадлежать классу существования решений. Построим семейство функций $U(x, f_\delta, g_\delta) = U_{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ , и докажем, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ задачи (1), (2). Следуя А. Н. Тихонову [14], назовем $U_{\sigma\delta}(x)$ *регуляризованным решением задачи*. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи (1), (2).

Используя результаты Лаврентьева и Ярмухамедова [1], [4], [6] относительно задачи Коши для уравнения Лапласа, нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на ее основе регуляризованное решение задачи Коши для систем уравнений термоупругости.

Ранее в работах [9], [12] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве с положительной мерой. Поскольку речь идет о явных формулах, построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Следуя [1], приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицей Карлемана задачи (1), (2) называется (4×4) -матрица $\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \Gamma(y, x, \omega, \gamma) + G(y, x, \omega, \gamma, \sigma),$$

где σ – положительный числовой параметр, матрица $G(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D , $\Gamma(y, x, \omega, \gamma)$ – матрица фундаментальных решений уравнения (1);

$$\int_{\Sigma} (|\Pi| + |(\tilde{R}\Pi^*)^*|) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$; здесь и далее Π^* – матрица сопряженная Π , а $|\Pi|$ – евклидова норма матрицы $\Pi = \|\Pi_{mj}\|$, т.е. $|\Pi| = (\sum_{m,j=1}^4 \Pi_{mj}^2)^{1/2}$. В частности, для вектора $U = (u, u_4)$ имеем $|U| = (\sum_{m=1}^4 u_m^2)^{1/2}$.

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2) рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) &= \|\Pi_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma)\|_{4 \times 4}, \\ \Pi_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma) &= \frac{(1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{j4})}{2\pi} \left(\frac{\delta_{mj}}{\mu} \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_3) - \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j} \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) \right) \\ &+ \frac{i\omega\eta}{2\pi} \delta_{m4}(1 - \delta_{j4}) \sum_{k=1}^3 \beta_k \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) \\ &- \frac{\gamma}{2\pi} \delta_{j4}(1 - \delta_{m4}) \sum_{k=1}^3 \beta_k \frac{\partial}{\partial x_m} \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) + \frac{\delta_{j4}\delta_{m4}}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k), \end{aligned} \quad (3)$$

где постоянные $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \lambda_k$ явно выражаются через постоянные термоупругости – коэффициенты системы (1) (см. [13]):

$$\Phi_\sigma(y, x, \Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{\exp(\sigma(W - x_3) + (W - x_3)^2)}{W - x_3} \frac{\cos \Lambda u \, du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad (4)$$

$$W = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad \alpha > 0.$$

Из результатов работы [6] вытекает

ЛЕММА 1. *Функция $\Phi_\sigma(y, x, \Lambda)$ является функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца, т.е. обладает следующими двумя свойствами:*

$$\Phi_\sigma(y, x, i\Lambda_k) = \frac{\exp(\Lambda r)}{4\pi r} + v(y, x, \Lambda, \sigma), \quad r = |x - y|, \quad (5)$$

где $v(y, x, \Lambda, \sigma)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) v - \Lambda^2 v = 0, \quad y \in D, \quad \int_\Sigma \left(|\Phi_\sigma| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n} \right| \right) ds_y \leq C(\Lambda, D) \sigma \exp(-\sigma x_3), \quad (6)$$

где $C(\Lambda, D)$ – постоянная.

Докажем аналогичную лемму для системы (1).

ЛЕММА 2. *Матрица $\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$, определенная равенствами (3) и (4), является матрицей Карлемана для задачи (1), (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (3) и (5) имеем

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) &= \Gamma(y, x, \omega, \gamma) + \left\| \frac{(1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{j4})}{2\pi} \left(\frac{\delta_{mj}}{\mu} v(y, x, i\lambda_3, \sigma) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j} v(y, x, i\lambda_k, \sigma) \right) + \frac{i\omega\eta}{2\pi} \delta_{m4}(1 - \delta_{m4}) \sum_{k=1}^3 \beta_k \frac{\partial}{\partial x_j} v(y, x, i\lambda_k, \sigma) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2\pi} \delta_{j4}(1 - \delta_{m4}) \sum_{k=1}^3 \beta_k \frac{\partial}{\partial x_m} v(y, x, i\lambda_k, \sigma) - \frac{\delta_{j4}\delta_{m4}}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \gamma_k v(y, x, i\lambda_k, \sigma) \right\| \\ &= \Gamma(y, x, \omega, \gamma) + \|G_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma)\| = \Gamma(y, x, \omega, \gamma) + G(y, x, \omega, \gamma, \sigma). \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что матрица $G(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$ по переменному y удовлетворяет системе (1) всюду в области D .

Используя формулы (3), (4) и (6) на каждом компакте $D' \subset D$, получим

$$\int_\Sigma (|\Pi| + |\tilde{R}\Pi^*|) ds \leq C(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D) \sigma^2 \exp(-\sigma x_3), \quad (7)$$

где $C(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D)$ – некоторая постоянная. Здесь и далее, для краткости обозначений опускаем аргументы функции Π . Лемма доказана.

Положим

$$2U_\sigma(x) = \int_S (\Pi RU(y) - (\tilde{R}\Pi^*)^* U(y)) ds_y, \quad x \in D. \quad (8)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $U(x)$ – регулярное решение системы (1) в области D , удовлетворяющее условию

$$|U(x)| + \left| R\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)U(x) \right| \leq 1, \quad y \in \Sigma. \quad (9)$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D)\sigma^2 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 для регулярного решения системы (1) в области D вытекает справедливость интегральной формулы Грина–Купрадзе [13]

$$2U(x) = \int_{\partial D} \left(\Pi R\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)U(y) - \left(\tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\Pi^* \right)^* U(y) \right) ds_y, \quad x \in D.$$

Перепишем это равенство в виде

$$2U(x) = \int_S (\Pi R U(y) - (\tilde{R}\Pi^*)^* U(y)) ds_y + \int_\Sigma (\Pi R U(y) - (\tilde{R}\Pi^*)^* U(y)) ds_y. \quad (11)$$

Неравенство (10) следует из (7) и (11). Теорема доказана.

Приведем результат, который позволяет вычислить $U(x)$ приближенно, когда на поверхности S вместо $U(x)$ и $R(\partial/\partial y, n(y))U(x)$ заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| + \max_S |g(y) - g_\delta(y)| \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1. \quad (12)$$

Предположим, что S удовлетворяет условиям Ляпунова. Функцию $U_\sigma(x)$ определим формулой

$$2U_\sigma(x) = \int_S \left(\Pi g_\delta(y) - \left(R\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\Pi^* \right)^* f_\delta(y) \right) ds_y, \quad x \in D, \quad (13)$$

$$\sigma = \frac{1}{x_3^0} \ln \frac{1}{\delta}, \quad x_3^0 = \max_D x_3. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $U(x)$ – регулярное решение системы (1) в области D , удовлетворяющее условию (9). Тогда справедлива оценка

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D)\delta^{x_3/x_3^0} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^3, \quad x \in D' \subset D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (8), (11) и (13) для любого $x \in D$ вытекает

$$\begin{aligned} & |U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left(\Pi \left(R \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) U(y) - g_\delta(y) \right) - \left(\tilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) \Pi^* \right)^* (U(y) - f_\delta(y)) \right) ds_y \\ &+ \int_\Sigma \left(\Pi R \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) U(y) - \left(\tilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial y}, n \right) \Pi^* \right)^* U(y) \right) ds_y, \quad x \in D. \end{aligned}$$

Из условия теоремы и неравенств (7), (10), (12) имеем

$$\begin{aligned} |U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| &\leq C_1(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D) \sigma^3 \exp(\sigma x_3^0 - \sigma x_3) + C(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D) \sigma^3 \exp(-\sigma x_3) \\ &\leq C_2(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D) \sigma^3 (1 + \delta \exp(\sigma x_3^0)) \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно выбору (14) параметра σ из (15) следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. *Предельные равенства*

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} U_{\sigma\delta}(x) = U(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D . Формула (8) дает в явном виде приближенное решение задачи (1), (2), а формула (13) – приближенное решение, когда данные Коши на S заданы приближенно.

В заключение авторы выражают признательность академику М.М. Лаврентьеву и профессору Ш.Я. Ярмухамедову за постановку задачи и обсуждения в процессе ее решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
- [2] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
- [3] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 6. С. 819–842.
- [4] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. С. 195–197.
- [5] Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т. 11. № 5. С. 3–26.
- [6] Ярмухамедов Ш. Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
- [7] Ярмухамедов Ш. Я., Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 1. С. 186–190.
- [8] Иванов В. К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. С. 131–136.
- [9] Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н. Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1292–1296.
- [10] Махмудов О. И. Задача Коши для системы теории упругости в пространстве. Дисс. ... к. ф.-м. н. Новосибирск, 1990.
- [11] Махмудов О. И. Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях // Изв. вузов. Матем. 1994. № 1. С. 54–61.
- [12] Тарханов Н. Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 294–297.
- [13] Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
- [14] Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.