Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Калюжный, О неравенстве фон Неймана для линейных матриц-функций нескольких переменных, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 218–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 05:43:42

УДК 517.982

О НЕРАВЕНСТВЕ ФОН НЕЙМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. С. Калюжный

Доказана теорема о существовании трех коммутирующих сжатий в гильбертовом пространстве и линейной однородной матрицы-функции трех независимых переменных, для которых нарушается обобщенное неравенство фон Неймана.

Библиография: 12 названий.

Дж. фон Нейман показал в [1], что для любого сжимающего линейного оператора T в гильбертовом пространстве (т.е. $\|T\| \leq 1$) и любого многочлена $p(z)$ от одной переменной выполнено неравенство

$$\|p(T)\| \leq \max_{z \in \Delta} |p(z)|,$$

где $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ – замкнутый единичный круг. Т. Андо [2] обобщил это неравенство на случай любых двух коммутирующих сжатий T_1 и T_2 в гильбертовом пространстве и любого многочлена $p(z_1, z_2)$ от двух независимых переменных:

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \max_{z \in \Delta^2} |p(z)|.$$

(Здесь и далее, для любого натурального N $\Delta^N = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_k| \leq 1, k = 1, \dots, N\}$ – замкнутый единичный поликруг.) Однако, Н. Варопулос [3] показал, что уже для трех коммутирующих сжатий аналогичное неравенство, вообще говоря, не выполняется, а именно: построил тройку коммутирующих сжимающих линейных операторов T_1, T_2, T_3 в некотором конечномерном гильбертовом пространстве и однородный многочлен второй степени $p(z_1, z_2, z_3)$ от трех независимых переменных такие, что

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| > \max_{z \in \Delta^3} |p(z)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Степень многочлена в примере Варопулоса нельзя уменьшить. Действительно, пусть $T = \{T_1, \dots, T_N\}$ – набор сжатий в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ и пусть

$$l(z_1, \dots, z_N) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k z_k$$

– произвольный многочлен первой степени от N независимых переменных, т.е. линейная скалярная функция в $\mathbb{C}^N$. Тогда

$$\begin{aligned} \|l(T_1, \dots, T_N)\| &= \left\| a_0 I_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^N a_k T_k \right\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left| \left\langle \left(a_0 I_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^N a_k T_k \right) x, y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left| a_0 \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^N a_k \langle T_k x, y \rangle_{\mathcal{H}} \right| \leq \max_{\substack{\lambda \in \Delta^N \\ z \in \Delta^N}} \left| a_0 \lambda + \sum_{k=1}^N a_k z_k \right| \\ &= \max_{\substack{|\zeta|=1 \\ z \in \Delta^N}} \left| a_0 \zeta + \sum_{k=1}^N a_k z_k \right| = \max_{z \in \Delta^N} \left| a_0 + \sum_{k=1}^N a_k z_k \right| = \max_{z \in \Delta^N} |l(z)| \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского–Шварца для оценки скалярного произведения и принципом максимума модуля для аналитических функций в круге). Отметим, что коммутативность набора T здесь несущественна.

Однако, для матричнозначных многочленов (т.е. многочленов с матричными коэффициентами) от нескольких независимых переменных можно рассмотреть понятие многочлена от нескольких коммутирующих сжатий [4]; тогда, как мы покажем, степень многочлена, для которого не выполняется соответствующее обобщенное неравенство фон Неймана, можно уменьшить до первой. Постановка этой задачи возникла при рассмотрении многопараметрических пассивных линейных систем рассеяния (определение таких систем см. в [5]), однако она имеет и самостоятельный интерес.

Итак, пусть $T = \{T_1, \dots, T_N\}$ – набор коммутирующих сжатий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $P(z_1, \dots, z_N)$ – матричнозначный многочлен от N независимых переменных, т.е.

$$P(z) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}_+^N \\ |t| \leq m}} A_t z^t, \quad z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

где $\mathbb{Z}_+^N = \{t \in \mathbb{Z}^N : t_k \geq 0, k = 1, \dots, N\}$, $|t| = \sum_{k=1}^N t_k$ для $t \in \mathbb{Z}_+^N$, $z^t = \prod_{k=1}^N z_k^{t_k}$, $A_t \in M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, т.е. мы будем отождествлять алгебру квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{C}$ с C^* -алгеброй линейных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Определим оператор

$$P(T) = P(T_1, \dots, T_N) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}_+^N \\ |t| \leq m}} A_t \otimes T^t \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}^n), \quad (2)$$

здесь $T^t = \prod_{k=1}^N T_k^{t_k}$. Можно также рассматривать $P(T)$ как элемент C^* -алгебры $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ всех квадратных матриц порядка n над $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. как матрицу с операторными элементами (см. [4]). Нам потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [6]. Набор $U = \{U_1, \dots, U_N\}$ коммутирующих унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *унитарной дилатацией* набора $T = \{T_1, \dots, T_N\}$ коммутирующих сжимающих операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, если

$$T^t = P_{\mathcal{H}} U^t|_{\mathcal{H}}, \quad t \in \mathbb{Z}_+^N,$$

где $P_{\mathcal{H}}$ – ортогональный проектор в $\mathcal{H}$ на подпространство $\mathcal{H}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из общей теоремы У. Арвесона о дилатациях (см. [7, с. 278]) следует, что набор $T = \{T_1, \dots, T_N\}$ коммутирующих сжатий в гильбертовом пространстве обладает унитарной дилатацией тогда и только тогда, когда для любого матричнозначного многочлена $P(z)$ вида (1) выполняется обобщенное неравенство фон Неймана

$$\|P(T)\| \leq \max_{z \in \Delta^N} \|P(z)\|, \quad (3)$$

где $P(T)$ определяется равенством (2). В частности, для $N = 1$ и $N = 2$ это означает (см. [8] и [2]), что неравенство (3) всегда выполняется.

Для $N = 3$ сформулируем основное утверждение настоящей статьи.

ТЕОРЕМА. В некотором конечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ существуют тройка $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ коммутирующих сжатий и тройка $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ квадратных матриц порядка n , $n > 1$, над полем $\mathbb{C}$ такие, что линейная однородная матрица-функция

$$L(z_1, z_2, z_3) = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 \quad (4)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|L(T)\| > \max_{z \in \Delta^3} \|L(z)\|. \quad (5)$$

Для доказательства нам потребуются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см., например, [9]). Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – C^* -алгебры. Линейное отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *положительным*, если оно переводит положительные элементы $\mathcal{A}$ в положительные элементы $\mathcal{B}$, т.е. из $a \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$ следует $\varphi(a) \geq 0$.

Пусть $\mathcal{S}$ – линейное подпространство в C^* -алгебре $\mathcal{A}$ (возможно, совпадающее с $\mathcal{A}$), $\mathcal{B}$ – C^* -алгебра, $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$ – линейное отображение. Тогда для каждого натурального n $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{A})$ – C^* -алгебра всех квадратных матриц порядка n над $\mathcal{A}$, а $M_n(\mathbb{C}) \otimes \varphi$ – линейное подпространство этой C^* -алгебры. Если обозначить через id_n тождественное отображение $M_n(\mathbb{C})$ на себя, то $\varphi_n = \text{id}_n \otimes \varphi$ есть линейное отображение $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{S}$ в $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}$, переводящее матрицы над $\mathcal{S}$ в матрицы над $\mathcal{B}$ применением линейного отображения φ поэлементно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [9]. Линейное отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *вполне положительным*, если для всех натуральных n отображения φ_n положительны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. Линейное отображение $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *вполне сжимающим*, если для всех натуральных n отображения φ_n сжимающие (т.е. $\|\varphi_n\| \leq 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из замечания 2 следует, что искомая тройка сжатий T не обладает унитарной дилатацией. Возьмем такую тройку сжатий из известного примера С. Парротта [10]. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное гильбертово пространство размерности больше 1 (т.е. $\mathcal{X}$ можно взять и конечномерным). Положим $\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$. Зададим тройку $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ сжимающих линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ блочными матрицами:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{\mathcal{X}} & 0 \end{pmatrix},$$

где B_1 и B_2 – произвольные некоммутирующие унитарные операторы в $\mathcal{X}$, $I_{\mathcal{X}}$ – единичный оператор в $\mathcal{X}$. Очевидно, T_k – коммутирующие операторы, так как $T_k T_j = 0$, $k, j = 1, 2, 3$.

Пусть $\mathbb{T}^N = \{\lambda \in \mathbb{C}^N : |\lambda_k| = 1, k = 1, \dots, N\}$ есть N -мерный тор, $\mathcal{S} = \text{span}\{\Lambda_1, \Lambda_2, \mathbf{I}\}$ – трехмерное линейное подпространство C^* -алгебры $C(\mathbb{T}^2)$ непрерывных комплекснозначных функций на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, порожденное функциями

$$\Lambda_1(\lambda) = \lambda_1, \quad \Lambda_2(\lambda) = \lambda_2, \quad \mathbf{I}(\lambda) = 1.$$

Определим линейное отображение $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ следующим образом: для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ положим

$$\varphi(\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2 + \gamma\mathbf{I}) = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma I_{\mathcal{X}}.$$

Покажем, что отображение φ является сжимающим, но не является вполне сжимающим. Согласно замечанию 1

$$\begin{aligned} \|\varphi(\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2 + \gamma\mathbf{I})\| &= \|\alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma I_{\mathcal{X}}\| \leq \max_{z \in \Delta^2} |\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma| \\ &= \max_{\lambda \in \mathbb{T}^2} |\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 + \gamma| = \|\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2 + \gamma\mathbf{I}\| \end{aligned}$$

(мы воспользовались принципом максимума модуля для аналитических функций в бикруге). Таким образом, φ – сжимающее отображение. Предположим теперь, что φ является также вполне сжимающим отображением. Тогда по теореме 1.2.9 [4] оно продолжается до вполне положительного линейного отображения $\tilde{\varphi}: C(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$, причем $\tilde{\varphi}(\mathbf{I}) = I_{\mathcal{X}}$. Такое отображение имеет вид [9]

$$\tilde{\varphi}(f) = P_{\mathcal{X}} \pi(f)|_{\mathcal{X}}, \quad f \in C(\mathbb{T}^2),$$

где π – представление C^* -алгебры $C(\mathbb{T}^2)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{Y} \supset \mathcal{X}$, а $P_{\mathcal{X}}$ – ортогональный проектор в $\mathcal{Y}$ на подпространство $\mathcal{X}$. Для любого $x \in \mathcal{X}$ имеем

$$\|x\| = \|B_k x\| = \|\varphi(\Lambda_k)x\| = \|\tilde{\varphi}(\Lambda_k)x\| = \|P_{\mathcal{X}} \pi(\Lambda_k)x\|, \quad k = 1, 2.$$

С другой стороны, $\pi(\Lambda_k)$ – унитарные операторы в пространстве $\mathcal{Y}$, так как Λ_k – унитарные элементы C^* -алгебры $C(\mathbb{T}^2)$. Поэтому $\|x\| = \|\pi(\Lambda_k)x\|$. Таким образом,

$$\|P_{\mathcal{X}} \pi(\Lambda_k)x\| = \|\pi(\Lambda_k)x\|,$$

а это возможно только если $P_{\mathcal{X}}\pi(\Lambda_k)x = \pi(\Lambda_k)x$, т.е. $\pi(\Lambda_k)x \in \mathcal{X}$. Так как x – произвольный элемент $\mathcal{X}$, отсюда получаем, что

$$\pi(\Lambda_k)|_{\mathcal{X}} = P_{\mathcal{X}}\pi(\Lambda_k)|_{\mathcal{X}} = \tilde{\varphi}(\Lambda_k) = \varphi(\Lambda_k) = B_k, \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} B_1 B_2 &= \pi(\Lambda_1)\pi(\Lambda_2)|_{\mathcal{X}} = \pi(\Lambda_1 \Lambda_2)|_{\mathcal{X}} \\ &= \pi(\Lambda_2 \Lambda_1)|_{\mathcal{X}} = \pi(\Lambda_2)\pi(\Lambda_1)|_{\mathcal{X}} = B_2 B_1, \end{aligned}$$

что противоречит выбору операторов B_1 и B_2 . Значит, φ не является вполне сжимающим отображением, т.е. найдется натуральное $n > 1$, для которого $\|\varphi_n\| > 1$. Это, в свою очередь, означает, что найдется тройка $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ квадратных матриц над $\mathbb{C}$ порядка n таких, что

$$\|\varphi_n(A_1 \otimes \Lambda_1 + A_2 \otimes \Lambda_2 + A_3 \otimes \mathbf{I})\| > \|A_1 \otimes \Lambda_1 + A_2 \otimes \Lambda_2 + A_3 \otimes \mathbf{I}\|. \quad (6)$$

Исследуем отдельно левую и правую части этого неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(A_1 \otimes \Lambda_1 + A_2 \otimes \Lambda_2 + A_3 \otimes \mathbf{I})\| &= \|A_1 \otimes B_1 + A_2 \otimes B_2 + A_3 \otimes I_{\mathcal{X}}\| \\ &= \|(I_n \otimes P_{\{0\} \oplus \mathcal{X}})(A_1 \otimes T_1 + A_2 \otimes T_2 + A_3 \otimes T_3)|_{\mathbb{C}^n \otimes (\mathcal{X} \oplus \{0\})}\| \\ &\leq \|A_1 \otimes T_1 + A_2 \otimes T_2 + A_3 \otimes T_3\|, \end{aligned}$$

где I_n – единичная матрица порядка n , $\mathcal{X} \oplus \{0\}$ и $\{0\} \oplus \mathcal{X}$ – подпространства в $\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ всех таких векторов $h = x_1 \oplus x_2$, у которых $x_2 = 0$ (соответственно $x_1 = 0$), а $P_{\{0\} \oplus \mathcal{X}}$ – ортопроектор в $\mathcal{H}$ на подпространство $\{0\} \oplus \mathcal{X}$. Правая часть неравенства (6)

$$\|A_1 \otimes \Lambda_1 + A_2 \otimes \Lambda_2 + A_3 \otimes \mathbf{I}\| = \max_{\lambda \in \mathbb{T}^2} \|A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + A_3\|$$

в силу изоморфизма C^* -алгебры $M_n(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{T}^2)$ и C^* -алгебры $C(\mathbb{T}^2, M_n(\mathbb{C}))$ непрерывных на $\mathbb{T}^2$ матриц-функций размера $n \times n$ (см., например, [11, предложение 4.7.3]). Однако,

$$\max_{\lambda \in \mathbb{T}^2} \|A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + A_3\| = \max_{\zeta \in \mathbb{T}^3} \|A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2 + A_3 \zeta_3\| = \max_{z \in \Delta^3} \|A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3\|$$

согласно принципу максимума для аналитических матриц-функций нескольких переменных (см., например, [12]).

Таким образом, окончательно получаем неравенство

$$\|A_1 \otimes T_1 + A_2 \otimes T_2 + A_3 \otimes T_3\| > \max_{z \in \Delta^3} \|A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3\|,$$

которое совпадает с неравенством (5) для линейной однородной матрицы-функции (4). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Von Neumann J. Eine Spectraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes // Math. Nachr. 1951. V. 4. P. 258–281.
- [2] Ando T. On a pair of commutative contractions // Ann. of Math. (2). 1963. V. 24. P. 88–90.
- [3] Varopoulos N. Th. On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operator theory // J. Funct. Anal. 1974. V. 16. P. 83–100.
- [4] Arveson W. B. Subalgebras of C^* -algebras // Acta Math. 1969. V. 123. P. 141–224.
- [5] Kalyuzhniy D. Multiparameter passive scattering linear stationary dynamic systems (discrete case) // Mark Krein International Conference “Operator theory and applications” (Odessa, August 18–22, 1997). Abstracts. Odessa, 1997.
- [6] Сёкевальфи-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
- [7] Arveson W. B. Subalgebras of C^* -algebras. II // Acta Math. 1972. V. 128. P. 271–308.
- [8] Szökefalvi-Nagy B. Sur les contractions de l'espace de Hilbert // Acta Sci. Math. (Szeged). 1953. V. 15. P. 87–92.
- [9] Stinespring W. Positive functions on C^* -algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 211–216.
- [10] Parrott S. Unitary dilations for commuting contractions // Pacific J. Math. 1970. V. 34. P. 481–490.
- [11] Takesaki M. Theory of Operator Algebras. V. 1. New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1979.
- [12] Шварц Л. Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
E-mail: Dmitriy.Kalyuzhniy@p25.f61.n467.z2.fidonet.org

Поступило
16.10.97